UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Wintersemester 2015/2016

Blatt 10
Abgabe: Montag, 1.2.2016, 12:00 Uhr

Aufgabe 1. Sei $\vartheta = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ rational.

(a) Finde eine Darstellung von A_ϑ auf $M_q(\mathbb{C})$.

(b) Zeige, dass es unitale *-Homomorphismen $\varphi : A_\vartheta \to B$ und $\psi : A_\vartheta \to D$ gibt, so dass $\varphi(v^q) = 1$ und $\psi(v^q) \neq 1$.

(c) Folgere, dass A_ϑ nicht einfach ist.

(d) Zeige, dass u^q und v^q mit allen Elementen in A_ϑ kommutieren. Es gibt also einen *-Homomorphismus $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2) \to C^*(u^q, v^q) \subseteq A_\vartheta$. (Dieser ist sogar ein Isomorphismus.)

Aufgabe 2 (endlich-dimensionale C^*-Algebren)**.** Wir wollen den Satz von Wedderburn beweisen: Sei A eine endlich-dimensionale C^*-Algebra. Dann gibt es Zahlen $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$A \cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus M_{n_m}(\mathbb{C})$$

Zeige dies in folgenden Schritten: Sei A eine endlich-dimensionale C^*-Algebra.

(a) A ist unital. (Betrachte dazu eine approximierende Eins und beachte, dass die abgeschlossene Einheitskugel in A kompakt ist.)

(b) Sei I ein Ideal in A. Dann gibt es eine zentrale Projektion p in A (dh. $pa = ap$ $\forall a \in A$), so dass $I = Ap$ ist.

(c) Es gibt zentrale Projektionen $p_1, \dots, p_m \in A$ mit $p_i p_j = 0$ für $i \neq j$ und $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, so dass $A = \bigoplus_{i=1}^m Ap_i$ ist und alle Ap_i einfach sind. (Benutze dafür, dass das Zentrum $Z(A)$ bestehend aus allen $b \in A$, so dass $ab = ba$ $\forall a \in A$, eine kommutative C^*-Algebra ist.)

(d)* Ist A einfach, so ist A isomorph zu einem $M_n(\mathbb{C})$.

(e) Beweise den Satz von Wedderburn.

(f) Wie sehen endlich-dimensionale Von-Neumann-Algebren aus?