

Analysis: Untersuche Funktionen $f: A \rightarrow A$ oder $f: A \rightarrow B$ mit Zusatzstruktur (Stetig, messbar, ...).

Funktionalanalysis: Frage nach Transformationen von Funktionen, also

$$T: \{f: A \rightarrow B\} \longrightarrow \{f: A \rightarrow B\}$$

Welche Struktur haben die Räume $\{f: A \rightarrow B\}$? Typischerweise

Vektorräume, sogar normiert, ggf. vollständig $\leadsto$ Banachräume, Hilberträume

Welche Struktur haben die Abbildungen $T: X \rightarrow Y$? Typischerweise

linear (wenn X, Y Vektorräume). Stetigkeit?

für $X < \infty$: T linear $\Rightarrow T$ stetig (lineare Abb.)

für $X = \infty$: T linear $\not\Rightarrow T$ stetig

Bedeutung also lineare Analyse $\leadsto$ Operatoren auf Hilberträumen

Diese sind gewissermaßen unendlich große Matrizen und es gilt

häufig $ST \neq TS$. Also spielt Nichtkommutativität eine entscheidende Rolle.

Um diese zu verstehen, macht es Sinn den Raum aller linear, stetigen Abbildungen $\{T: X \rightarrow Y\}$ als Ganzes zu untersuchen (um Werkzeuge zu erlangen).

$\leadsto$ Operatoralgebra

(Körper der Multiplikation)

Messung sind diese als Unteralgebra von $\mathcal{L}(H) := \{T: H \rightarrow H \text{ beschr.}, \text{linear}\}$,

H Hilbertraum zu betrachten, mit einem topologischen Abschluss:

- Normtopologie (in char: gleichmäßige Konvergenz) $\leadsto C^*$ -Algebren
 - starke Operatortopologie
 - schwache Operatortopologie
- (punktw. Konvergenz) $\leadsto$ Von-Neumann-Algebren

Ein anderer Zugang ist, einen Raum X zu studieren, indem man die Algebra der Funktionen darüber betrachtet, also

X kompakter, topologischer Raum $\leadsto C(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{C}\}$ stetige Funktionen

X messbares Raum $\leadsto L^\infty(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{C}\}$ messbare, beschränkte Funktionen

Wir werden sehen: $C(X)$ ist eine C^* -Algebra, $L^\infty(X)$ eine $V-N$ -Algebra, die kommutativ sind, d.h. $fg = gf$. Eigentlich sind C^* -Algebren dann „wie $C(X)$, nur ohne $fg = gf$ “, also eine Art nichtkommutative Funktionen. Identifizieren wir nun X mit $C(X)$, so sind C^* -Algebren dann eine Art nichtkommutative Topologie. Ebenso stellt $V-N$ -Algebren eine nichtkommutative Maßtheorie dar.

- Ziele:
- Die Theorie der Operatoralgebren ist wichtig für eine quantenmechanische Formalismus, für Darstellungen von Gruppen, für abstrakte Riemannsche Geometrie (Murray-von-Neumann 1936)
 - Die Theorie der Operatoralgebren kann als das Studium von Operatoren auf einem Hilbertraum mit algebraischen Methoden angesehen werden. (aus dem Vortrag von Pedersen, C^* -alg. & their automorphism groups)
 - sie haben Verbindungen zu harmonischer Analysis, Operatortheorie, Differentialgeometrie, algebraischer Topologie, Induktionstheorie etc. (aus dem Vortrag von C^* -algebras 1943-1993, a fifty year celebration)
 - sie verdeutlichen das Auftreten der modernen Analysis und liefern den Grundstein für eine nichtkommutative Analysis. (Dale Kladison, in obigen Buch)

Geschichte:	Fredholm	~ 1900	Integraloperatoren
	Hilbert	~ 1910	Spektraltheorie beschränkter Operatoren
	Breuz	~ 1910/20	Lineare Abbildungen auf normierten Räumen
	Banach	~ 1920/30	Begründer der modernen Funktionalanalysis
	von Neumann	~ 1930/40	Begründer der Quantenmechanik, $V-N$ -Algebren
	Gelfand	~ 1940	C^* -Algebren

Plan: Okt, Nov - C^* -Algebren, Dez - $V-N$ -Algebren,
Jan - Unterfaktoren (J. von Neumann), Jan, Feb - univ. C^* -Algebren, endlich,
spectral types