§1 Hilberträume und Operatoren auf Hilberträumen

1.1 Def.: Ein *Hilbertraum* ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum H mit einem *Skalarprodukt* $\langle\cdot,\cdot\rangle : H\times H \longrightarrow \mathbb{C}$

⌈also: $\langle \lambda x+\mu y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle$

$\langle z, \lambda x+\mu y\rangle = \bar\lambda\langle z,x\rangle + \bar\mu\langle z,y\rangle$

$\overline{\langle x,y\rangle} = \langle y,x\rangle$ $\qquad \forall x,y,z\in H$

$\langle x,x\rangle \geq 0$ $\qquad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{C}$

⌊ $\langle x,x\rangle = 0 \iff x=0$

der bezüglich der *Norm* $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ vollständig ist.

⌈also: $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ $\qquad \forall x,y\in H$

$\|x\|\geq 0$ $\qquad \forall\lambda\in\mathbb{C}$

⌊ $\|x\|=0 \iff x=0$

1.2 Lemma: Es gilt die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*: $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ $\forall x,y\in H$.
Hierbei ist „$=$" $\iff$ x,y sind linear abhängig.

Beweisidee: $0 \leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle - \dfrac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}$ mit $\lambda = -\dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$. □

1.3 Beispiele: (a) $\mathbb{C}^n$ oder $\mathbb{R}^n$ mit $\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i\bar y_i$

(b) $L^2([0,1],\lambda)$, λ Lebesguemaß, oder $L^2(X,\mu)$, μ bel. Maß
mit $\langle f,g\rangle := \int f(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x)$.

(c) $\ell^2(\mathbb{N})$ oder $\ell^2(\mathbb{Z})$ als $\ell^2(\mathbb{N}) = L^2(\mathbb{N},\zeta)$, ζ Zählmaß,
also $\langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle := \sum_{n=1}^\infty a_n\bar b_n$

1.4 Def.: Sei H ein Hilbertraum.

(a) $x,y\in H$ *orthogonal* (schreibe $x\perp y$) $:\iff \langle x,y\rangle = 0$

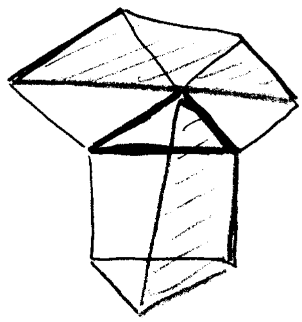
(b) $M_1, M_2\subseteq H$ *orthogonal* ($M_1\perp M_2$) $:\iff \forall x\in M_1, y\in M_2$: $x\perp y$

(c) Sei $M\subseteq H$. Dann ist $M^\perp := \{x\in H \mid x\perp M\}$ das orthogonale *Komplement* von M.

1.5 Lemma (Satz von Pythagoras): H Hilbertraum, $x, y \in H$, $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Beweis: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + 0 + 0 + \langle y,y \rangle$. $\square$

(ein altertümlicher Beweis:



)

1.6 Proposition: Sei $K \subseteq H$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann ist $H = K \oplus K^\perp$, d.h.
$K \perp K^\perp$, $K \cap K^\perp = \{0\}$, $K \oplus K^\perp := \{x + y \mid x \in K, y \in K^\perp\} \subseteq H$,
jedes $z \in H$ hat eine eindeutige Darstellung als $z = x + y$, $x \in K$, $y \in K^\perp$.

Beweisidee: $K^\perp$ ist abgeschlossener Teilraum, $K \perp K^\perp$ ✓. Für $x \in K \cap K^\perp$ ist $\langle x,x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$. Zu $z \in H$ ex. $x \in K$ mit $\|x - z\| = \inf\{\|w - z\| \mid w \in K\}$ (mehr Aufwand für Existenz von x!) und also $y := z - x \perp K$ (auch Arbeit).
Eindeutigkeit: $x + y = x' + y' \Rightarrow K \ni x - x' = y' - y \in K^\perp \Rightarrow x - x' = y' - y = 0$. $\square$

1.7 Darstellungssatz von Riesz: Sei H ein Hilbertraum. Dann ist die Abbildung
$j: H \to H' := \{f: H \to \mathbb{C} \text{ linear, stetig}\}$, $y \mapsto f_y$, $f_y(x) := \langle x, y \rangle$ ein antilinearer, isometrischer Isomorphismus. Insbesondere: $\forall f \in H' \; \exists y \in H \; \forall x \in H: f(x) = \langle x, y \rangle$.

Beweis: j antilinear ✓, j isometrisch: $|f_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \overset{1.2}{\leq} \|x\| \|y\|$
$\Rightarrow \|f_y\| \leq \|y\|$, d.h. $f_y \in H'$. Außerdem $f_y(y) = \|y\|^2 \Rightarrow \|f_y\| \geq \|y\|$.
j surjektiv: Sei $0 \neq f \in H'$. Dann $\ker f \subsetneq H$ ein abgeschlossener TR.
$\overset{1.6}{\Rightarrow} H = \ker f \oplus (\ker f)^\perp$. Also ex. $y \in (\ker f)^\perp$ mit $y \neq 0$, $f(y) = 1$.
Dann $f(x)y - x \in \ker f \Rightarrow 0 = \langle f(x)y - x, y \rangle = f(x)\|y\|^2 - \langle x, y \rangle$.
Setze $z := \frac{y}{\|y\|^2} \in H$. Also $f = f_z$, denn $f_z(x) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} = f(x)$. $\square$

1.8 Satz: Sei $(e_i)_{i\in I}$ ein <u>Orthonormalsystem</u> (ONS), d.h. $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}\ \forall i,j$.

Äq.: (i) $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \quad \forall x\in H$

(ii) $x = \sum_{i\in I}\langle x,e_i\rangle e_i$

(iii) $\operatorname{span}\{e_i \mid i\in I\}\subseteq H$ dicht

(iv) $z\in H,\ z\perp e_i\ \forall i\in I \Rightarrow z=0$

(v) $(e_i)_{i\in I}$ ist maximale orthonormale Familie.

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so ist $(e_i)_{i\in I}$ eine <u>Orthonormalbasis</u> (ONB).

<u>Beweisidee</u>: $(x_i)_{i\in I}$ summierbar zu s $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists J_0 \underset{fin}{\subseteq} I\ \forall I \underset{fin}{\supseteq} J \supseteq J_0 : \|\sum_{i\in J} x_i - s\| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow$ das Netz $\left(s_F := \sum_{i\in F} x_i\right)_{F\underset{fin}{\subseteq} I}$ konvergiert gegen s

(i)$\Leftrightarrow$(ii): $s_F := \sum_{i\in F}\langle x,e_i\rangle e_i$, $F \underset{fin}{\subseteq} I$. Also $\|x\|^2 \overset{1.5}{=} \|x-s_F\|^2 + \underbrace{\sum_{i\in F}|\langle x,e_i\rangle|^2}_{=\|s_F\|^2}$
$(\langle x - s_F, e_j\rangle = \langle x,e_j\rangle - \langle x,e_j\rangle)$

Jetzt (i) $\Leftrightarrow \|s_F\|^2 \to \|x\|^2 \Leftrightarrow \|x-s_F\| \to 0 \Leftrightarrow$ (ii)

(ii)$\Leftrightarrow$(iii): „$\Rightarrow$" ✓ „$\Leftarrow$" $\sum_{i\in I}\alpha_i e_i = x \Rightarrow \langle x, e_i\rangle = \alpha_i$

(ii)$\Leftrightarrow$(iv): „$\Rightarrow$" $z = \sum \underbrace{\langle z,e_i\rangle}_{=0} e_i = 0$ „$\Leftarrow$" $\left(x - \sum_{i\in I}\langle x,e_i\rangle e_i\right)\perp e_j\ \forall j\in I$

(iv)$\Leftrightarrow$(v): Ist $(e_i)_{i\in I}$ nicht maximal, so füge $\frac{z}{\|z\|}$ hinzu. $\square$

1.9 Bemerkung: (a) ONB $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Basis $\left(\sum^{fin}\alpha_i e_i = 0 \Rightarrow 0 = \langle \sum \alpha_i e_i, e_j\rangle = \alpha_j\ \forall j\right)$
nur <u>unendl.</u> Lin.komb. in 1.8

(b) Ist H ein HR mit ONBen $(e_i)_{i\in I}$ oder $(f_j)_{j\in J}$, so ist $|I| = |J|$.
(Klar für $|I|,|J|<\infty$ und LA, sonst ein Schröder-Bernstein-Argument.)
Setze $\dim H := |I|$. Ist $\dim H$ abzählbar, so heißt H <u>separabel</u>.

1.10 Def.: Seien H und K Hilberträume. Ein <u>Isomorphismus</u> von H und K ist eine lineare Abbildung $U: H \to K$, die surjektiv und isometrisch ist, d.h. $\langle Ux, Uy\rangle_K = \langle x,y\rangle_H\ \forall x,y\in H$.
(Also ist $\|Ux\| = \|x\|$, d.h. U ist injektiv. Außerdem ist U also die Hilbertraumstruktur erhaltend.)

1.11 **Bemerkung:** (a) Zwei Hilberträume sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche Hilbertraumdimension (im Sinne von 1.9(b)) haben. Tatsächlich, ist $U: H \to K$ ein Isomorphismus von Hilberträumen und $(e_i)_{i\in I}$ eine ONB von H, so ist auch $(Ue_i)_{i\in I}$ eine ONB von K (ONS ist klar und ONB mit 1.8(iv)). Also $\dim H \leq \dim K$ und „$\geq$" mit U^{-1}. Umgekehrt definiert $Ue_i := f_i$ einen Isomorphismus, falls $(e_i)_{i\in I}$, $(f_j)_{j\in J}$ ONBen von H bzw. K mit $I = J$ (oder $|I| = |J|$).

(b) Jeder separable HR ist daher isomorph zu $\mathbb{C}^n$ oder zu $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$. Bis auf Isomorphie gibt es also nur einen einzigen separablen, unendlichen HR. Allgemeiner: $H \cong \ell^2(I)$, $x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$ für $(e_i)_{i\in I}$ ONB von H.

(c) Eine ONB von $\mathbb{C}^n$ ist $e_1, \dots, e_n$ mit $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ bzw. $e_n = (0,\dots,0,1,0,\dots)$ von ℓ^2. Dies ist gerade keine VR-Basis!

(Satz von Baire: X vollst. metr. Raum, $M_n \subseteq X$ abgeschl. Teilmengen, $X = \bigcup_{n\in I} M_n$, I abzählbar $\Rightarrow \exists n_0 \in I\ \exists U \neq \emptyset$ offen: $U \subseteq M_{n_0}$.

Korollar: Es gibt keinen Banachraum von abzählbar unendlicher VR-Dimension, denn $M_n := \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq X$ ist abgeschlossen, aber $U \subseteq M_{n_0}$ impliziert für $x \in U$, dass $x + \frac{1}{N} e_{n_0+1} \in U \subseteq M_{n_0}$ ist, d.h. $e_{n_0+1} \in M_{n_0}$ ↯)

1.12 **Lemma:** H, K Hilberträume, $A: H \to K$ linear. Äquivalent:

(i) A ist stetig

(ii) A ist stetig in 0

(iii) $\exists C > 0: \|Ax\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in H$, d.h. A ist beschränkt.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) ✓

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$ mit $\|x\| \leq \delta \Rightarrow \|Ax\| \leq 1$. $C := \frac{1}{\delta}$.

Dann $\|Ax\| = \delta\|x\| \, \|A \frac{x}{\|x\|\delta}\| \leq \delta\|x\| = C\|x\|$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $x_n \to x \Rightarrow \|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq C\|x_n - x\| \to 0$. $\square$

1.13 **Def:** (a) $A: H \to K$ stetig, linear. $\|A\| := \inf\{C \mid \|Ax\| \leq C\|x\| \ \forall x \in H\}$

„Operatornorm"

(b) $\mathcal{L}(H) := \{A: H \to H \text{ linear, beschränkt}\}$

$\mathcal{L}(H,K) := \{A: H \to K \text{ linear, beschränkt}\}$

(englisch: $\mathcal{B}(H)$, $\mathcal{B}(H,K)$ „bounded")

1.14 Satz: Sei H ein Hilbertraum.

(a) Ist $A \in \mathcal{L}(H)$ bijektiv, so ist $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

(b) $\forall A \in \mathcal{L}(H) \; \exists! \; A^* \in \mathcal{L}(H)$ mit $\langle x, A^* y\rangle = \langle Ax, y\rangle$

(c) Die Abbildung aus (b) ist eine Involution, d.h. $^*: \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$ ist antilinear, involutiv ($A^{**} = A$) und $(AB)^* = B^* A^*$.

(d) $\mathcal{L}(H)$ ist eine *-Algebra mit Multiplikation $AB := A \circ B$.

(e) Die Operatornorm erfüllt:

(i) $\|Ax\| \le \|A\| \|x\|$

(ii) $\|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} = \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| \le 1\}$

(iii) $\|AB\| \le \|A\| \|B\|$

(iv) $\|A^* A\| = \|A\|^2$

(v) $\|A^*\| = \|A\|$

Beweis: (a) A^{-1} linear : $A^{-1}(x+y) = A^{-1}(Ax_0 + Ay_0) = A^{-1}(A(x_0+y_0)) = x_0 + y_0$
$= A^{-1}x + A^{-1}y$

A^{-1} stetig: Benutze den Satz von der offenen Abbildung
(„$T: E \to F$ stetig, linear, surj., E, F vollst., metr. VRe mit translationsinvarianter Metrik $\Rightarrow$ T ist offen, d.h. $\forall U \subseteq E$ offen ist $TU \subseteq F$ offen")
Also ist für $U \subseteq H$ offen auch $(A^{-1})^{-1} U = AU \subseteq H$ offen.

(b) Betrachte $g_y: H \to \mathbb{C}$, $g_y(x) := \langle Ax, y\rangle$ für $y \in H$ fest.
$\Rightarrow g_y \in H' \overset{1.2}{\Rightarrow} \exists z \in H: \langle Ax, y\rangle = g_y(x) = j(z)(x) = \langle x, z\rangle$.
Setze $A^* y := z$ und rechne nach, dass $A^* \in \mathcal{L}(H)$ ist.

(c) antilinear ✓ $\langle A^{**} x, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle = \langle Ax, y\rangle \quad \forall x, y$
(Benutze $\langle Ax, y\rangle = \langle Bx, y\rangle \; \forall x, y \Rightarrow \|(A-B)x\|^2 = \langle Ax, (A-B)x\rangle - \langle Bx, (A-B)x\rangle$
$= 0 \Rightarrow A = B$)

$\langle x, (AB)^* y\rangle = \langle ABx, y\rangle = \langle Bx, A^* y\rangle = \langle x, B^* A^* y\rangle$

(d) $A, B \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow AB \in \mathcal{L}(H)$ und (e.iii).

(e) (i) $C_n \searrow \|A\| \Rightarrow \|Ax\| \le C_n \|x\| \; \forall n \Rightarrow \|Ax\| \le \|A\| \|x\|$

(ii) $\|Ax\| \le \|A\|$ für $\|x\| \le 1$ nach (i). $\|Ax\| = \|x\| \|A \frac{x}{\|x\|}\| \le \|x\| \cdot \sup\{\dots\}$

(iii) $\|(AB)x\| \le \|A\| \|Bx\| \le \|A\| \|B\| \|x\|$

(iv) $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^* A x, x\rangle \overset{C.S.}{\le} \|A^* A\| \|x\|^2 = \|A^* A\|$
für $\|x\| = 1$
$\Rightarrow \|A\|^2 \le \|A^* A\| \le \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2$ nach (v)

(v) $\|A^* x\|^2 = \langle AA^* x, x\rangle \overset{C.S.}{\le} \|A\| \|A^* x\| \|x\| \Rightarrow \|A^* x\| \le \|A\| \|x\| \Rightarrow \|A^*\| \le \|A\|$
und $\|A\| = \|A^{**}\| \le \|A^*\|$. $\square$

1.15 Beispiel: $H = \mathbb{C}^n$. Also $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = \{A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \text{ linear}\} = M_n(\mathbb{C})$ und $A^* = (\overline{a_{ji}})_{1 \le i,j \le n}$.

1.16 Prop.: Für $A \in \mathcal{L}(H)$ ist $\ker A = (\operatorname{Bild} A^*)^\perp$, $(\operatorname{Kern} A)^\perp = \overline{\operatorname{Bild} A^*}$.

Beweis: $x \in (\operatorname{Bild} A^*)^\perp \iff \underset{\underset{\langle Ax, y\rangle}{\shortparallel}}{\langle x, A^* y\rangle} = 0 \;\forall y \underset{\nwarrow y = Ax}{\iff} Ax = 0 \iff x \in \ker A$

Außerdem gilt allgemein: $K \subseteq H$ Teilraum, dann $K^{\perp\perp} = \overline{K}$.
(Idee: $H = \overline{K} \oplus (\overline{K})^\perp$ und $H = K^{\perp\perp} \oplus K^\perp$, $\overline{K}^\perp = K^\perp$) $\square$

1.17 Def.: (a) $A \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert $:\iff A = A^*$
(b) $A \in \mathcal{L}(H)$ normal $:\iff AA^* = A^*A$
(c) $U \in \mathcal{L}(H)$ unitär $:\iff U^*U = UU^* = 1$
(d) $V \in \mathcal{L}(H)$ isometrisch $:\iff V^*V = 1$
(e) $P \in \mathcal{L}(H)$ Projektion $:\iff P^* = P = P^2$

1.18 Bemerkung: (a) $V^*V = 1 \iff \langle Vx, Vy\rangle = \langle V^*Vx, y\rangle = \langle x, y\rangle$ isometrisch
(b) U unitär $\Rightarrow$ U isometrisch und invertierbar ($U^{-1} = U^*$), also Hilbertraum-Isomorphismus. Umgekehrt: U Isomorphismus $\Rightarrow$ U isometrisch und U^* isometrisch: $\langle U^*x, U^*y\rangle \underset{\underset{\text{surj.}}{\uparrow}}{=} \langle U^*(Ux_0), U^*(Uy_0)\rangle = \langle x_0, U^*Uy_0\rangle$
$= \langle Ux_0, Uy_0\rangle = \langle x, y\rangle$
(c) H Hilbertraum, $K \subseteq H$ abgeschlossener Teilraum, $H = K \oplus K^\perp$.
Dann ist $P : H \to H$, $x + y \mapsto x$ eine Projektion im Sinne von 1.17(e)
$\left(\langle P^*(x+y), (z+w)\rangle = \langle x+y, P(z+w)\rangle = \langle \underset{\in K^\perp}{x+y}, \underset{\in K}{z}\rangle = \langle x, z\rangle = \langle P(x+y), z\rangle\right)$
mit $\operatorname{Bild} P = K$, $\operatorname{Kern} P = K^\perp$.
Ist umgekehrt $P : H \to H$ eine Projektion im Sinne von 1.17(e), so ist $H = (\operatorname{Bild} P) \oplus (\operatorname{Kern} P)$, insbesondere ist $\operatorname{Bild} P = PH$ abgeschlossen.
Außerdem ist $1 - P$ die Projektion auf $K^\perp$.

1.19 Def.: $A \in \mathcal{L}(H)$. A heißt kompakt, falls eine der äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i) $M \subseteq H$ beschränkte Teilmenge $\Rightarrow$ $\overline{AM}$ kompakt

(ii) $\overline{A\,B(0,1)}$ kompakt

(iii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folge in H $\Rightarrow$ $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält konvergente Teilfolge

$\mathcal{K}(H) := \{A \in \mathcal{L}(H) \mid A$ kompakt$\} \subseteq \mathcal{L}(H)$.

1.20 Satz: (a) $\mathcal{K}(H)$ ist ein abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{L}(H)$, d.h.
$\mathcal{K}(H) \subseteq \mathcal{L}(H)$ abgeschlossener Teilraum, $AB, BA \in \mathcal{K}(H)$ $\forall A \in \mathcal{K}(H)$, $B \in \mathcal{L}(H)$.

(b) $A \in \mathcal{K}(H) \Rightarrow A^* \in \mathcal{K}(H)$

(c) $E(H) := \{A \in \mathcal{L}(H) \mid$ Bild A endlichdimensional$\}$.
Sei H separabel. Dann ist $\mathcal{K}(H) = \overline{E(H)}$, d.h.
$\forall A \in \mathcal{K}(H)\ \exists (A_n) \subseteq E(H)$ mit $A_n \to A$.

Beweis: viel topologische Technik. $\square$