§ 2 Banachalgebren und ihr Spektrum

C^*-Algebren sind eine spezielle Klasse von Banachalgebren. Insofern nähern wir uns ihnen in diesem Kapitel auf abstraktem Weg, nachdem §1 eine „konkrete" Grundlage für unsere Anschauung bereitstellt.

2.1 **Def.:** Eine Algebra A über $\mathbb{C}$ ist ein Vektorraum mit bilinearer, assoziativer Multiplikation, so dass $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$ $\forall x,y \in A$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ gilt.
Eine normierte Algebra A ist eine Algebra (über $\mathbb{C}$), die ein normierter Vektorraum mit $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ $\forall x,y \in A$ ist.
Eine Banachalgebra ist eine vollständige, normierte Algebra.

2.2 **Bemerkung:** Die Multiplikation ist in einer normierten Algebra stetig.

2.3 **Bsp.:**
- X kompakter, topologischer Raum $\Rightarrow$ $\mathcal{C}(X)$ Banachalgebra mit punktweisen Operationen und $\|\cdot\|_\infty$
- X Menge $\Rightarrow$ $\ell^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ beschränkt}\}$ Banachalgebra mit punktweisen Operationen und $\|\cdot\|_\infty$
- H Hilbertraum $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(H)$ Banachalgebra mit Operatornorm (vgl. 1.12, 1.13)

2.4 **Prop.:** Sei A Banachalgebra mit 1. Dann gilt:
a) $x \in A$, $\|1 - x\| < 1$ $\Rightarrow$ x invertierbar (mit $x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$)
b) $x \in A$ invertierbar, $y \in A$, $\|x - y\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$ $\Rightarrow$ y invertierbar
c) $GL(A) := \{x \in A \mid x \text{ invertierbar}\}$ offen, $GL(A) \to GL(A)$, $x \mapsto x^{-1}$ stetig

Beweis: a) $z := 1 - x$. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist absolut konvergent ($\sum \|z^n\| \leq \sum \|z\|^n < \infty$ da $\|z\| < 1$)

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist konvergent ($\|\sum_{n=0}^{k} z^n - \sum_{n=0}^{\ell} z^n\| \leq \sum_{n=k+1}^{\ell} \|z^n\| < \varepsilon$ für $\ell > k > N$

$\Rightarrow (\sum_{n=0}^{k} z^n)_{k \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge)

Dann $(1 - z) \sum_{n=0}^{k} z^n = 1 - z^{k+1} \longrightarrow 1$, $k \to \infty$ $\Rightarrow x(\sum_{n=0}^{\infty} z^n) = (\sum_{n=0}^{\infty} z^n) x = 1$

b) $\|1 - y x^{-1}\| = \|(x - y) x^{-1}\| \leq \|x - y\| \|x^{-1}\| < 1$ $\Rightarrow y x^{-1}$ invertierbar,

d.h. $\exists z \in A$ mit $(y x^{-1}) z = 1$. Dann $y (x^{-1} z) = 1$, also y invertierbar.

c) $GL(A)$ offen nach b). Stetigkeit der Inversion:

Sei $y_n \to x$ in $GL(A)$. Dann ist für n groß: $\|1 - y_n x^{-1}\| < 1$

Nach a) also $x y_n^{-1} = (y_n x^{-1})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - y_n x^{-1})^k$. Somit:

$\|x^{-1} - y_n^{-1}\| = \|x^{-1}(1 - x y_n^{-1})\| = \|x^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1 - y_n x^{-1})^k\| \leq \|x^{-1}\| \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\|1 - y_n x^{-1}\|}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0}{}^k$

2.5 Def.: A Banachalgebra mit 1, $x \in A$. Das Spektrum von x ist definiert als $Sp\, x := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - x$ nicht invertierbar$\}$
und $\varrho(x) := \mathbb{C} \setminus Sp\, x$ Resolventenmenge.

2.6 Bemerkung: a) Ist $A = M_n(\mathbb{C})$ $(= \mathcal{L}(\mathbb{C}^n))$, so ist $Sp\, x = \{$Eigenwerte von $x\}$.

2.7 Prop.: $Sp\, x$ ist abgeschlossen und beschränkt durch

$Sp\, x \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|x\|\}$. Insbesondere ist $Sp\, x$ also kompakt.

Beweis: $\mathbb{C} \setminus Sp\, x = f^{-1}(GL(A))$ unter $f: \mathbb{C} \to A$, $\lambda \mapsto \lambda - x$ stetig, 2.4c.

$|\lambda| > \|x\| \overset{2.4a}{\Rightarrow} \lambda - x = \lambda(1 - \frac{x}{\lambda})$ invertierbar, da $\|\frac{x}{\lambda}\| < 1$, d.h. $\lambda \notin Sp\, x$.

! b) X kompakter Raum. Dann $Sp\, f = f(X)$ $\forall f \in \mathcal{C}(X)$.

2.8 (Fundamentalsatz der Banachalgebren)

Satz: In einer Banachalgebra A mit 1 gilt: $Sp\, x \neq \emptyset \quad \forall x \in A$.

Beweis: Für $\lambda \in \rho(x)$ setze $R_\lambda(x) := (\lambda - x)^{-1}$.

1.) $R_\lambda(x) - R_\mu(x) = (\mu - \lambda) R_\lambda(x) R_\mu(x) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Bew (1.): $R_\lambda(x) - R_\mu(x) = R_\lambda(x) \underbrace{R_\mu(x)(\mu - x)}_{=1} - \underbrace{(\lambda - x) R_\lambda(x)}_{=1} R_\mu(x) \overset{\uparrow}{=} (\mu - \lambda) R_\lambda(x) R_\mu(x)$

(Achtung: $x(\lambda - x) = (\lambda - x)x \Rightarrow R_\lambda(x)x = xR_\lambda(x)$) $\square$(1.)

2.) Ist x invertierbar und $f \in A'$ mit $f(x^{-1}) \neq 0$, so ist

$g: \rho(x) \longrightarrow \mathbb{C}$, $g(\lambda) := f(R_\lambda(x))$ holomorph, $g(0) \neq 0$

Bew (2.): $\frac{g(\lambda) - g(\mu)}{\lambda - \mu} = f\left(\frac{R_\lambda(x) - R_\mu(x)}{\lambda - \mu}\right) \overset{1.)}{=} -f(R_\lambda(x) R_\mu(x)) \longrightarrow -f(R_\lambda^2(x))$

für $\mu \to \lambda$, da $R_{\cdot}$ stetig (7.7(c)). $g(0) = -f(x^{-1}) \neq 0$. $\square$(2.)

3.) A: $Sp\, x = \emptyset$. Dann ist $0 \notin Sp\, x$, d.h. $(0 - x)$ ist invertierbar und somit auch x. Nach Hahn-Banach (2.6) ex. $f \in A'$ mit $f(x^{-1}) \neq 0$.

Dann ist g ganz und beschränkt, denn $g(\lambda) \to 0$ für $|\lambda| \to \infty$:

Mit $z := 1 - \lambda^{-1}x$ ist $\|1 - z\| = \frac{\|x\|}{|\lambda|} < 1$ für $|\lambda|$ groß.

$\overset{7.7(a)}{\Longrightarrow}$ z invertierbar mit $z^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - z)^n$, also $\|z^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|1 - z\|^n = \frac{1}{1 - \|1 - z\|}$

$\Rightarrow \|(1 - \lambda^{-1}x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\|x\|}{|\lambda|}}$

und $\|R_\lambda(x)\| = \|(\lambda - x)^{-1}\| = |\lambda|^{-1} \|(1 - \lambda^{-1}x)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|x\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|x\|} \longrightarrow 0$ für $|\lambda| \to \infty$

Nach Liouville ist also g konstant $\Rightarrow g \equiv 0$ ↯ $(g(0) \neq 0)$. $\square$

2.9 Def.: A Banachalgebra mit 1, $x \in A$. Der Spektralradius von x ist definiert als $r(x) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in Sp\, x\}$ $(\leq \|x\|)$
(Sp x abgeschl.)

2.10 Bsp.: • X kompakter Raum, dann $r(f) = \|f\|_\infty$ $\forall f \in C(X)$

• $A = M_2(\mathbb{C})$, $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann $\|x\| = 1$, aber $r(x) = 0$.

[$\|x\|^2 \overset{1.16}{=} \|x^* x\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| \overset{1.12(ii)}{=} 1$, $Sp\, x \overset{2.6a}{=} \{\text{Eigenwerte von } x\}$.
Also $\lambda \in Sp\, x \Rightarrow \exists \xi \neq 0$ mit $x\xi = \lambda \xi$. Dann $0 = x^2 \xi = \lambda^2 \xi \Rightarrow \lambda = 0$]

~~9.7~~ **Satz:** Sei A Banachalgebra mit Eins, $x \in A$.
2.11 Dann $r(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

(Erstaunlich: $r(x)$ ist eine rein algebraische Größe, $\lim \sqrt[n]{\|x^n\|}$ hingegen eine, die von der Norm (also der Topologie) abhängt)

Beweis: $\lambda \in Sp\, x \Rightarrow \lambda^n \in Sp\, x^n$, denn $\lambda^n - x^n = (\lambda - x)(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} x + \ldots + \lambda x^{n-2} + x^{n-1})$.

Also $|\lambda^n| \leq \|x^n\| \Rightarrow |\lambda| \leq \sqrt[n]{\|x^n\|}$, d.h. $r(x) \leq \liminf \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

bzz. $r(x) \geq \limsup \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

Betrachte $R(z) := (z - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{z^{n+1}}$ für $\|x\| < |z|$ (nach 7.7(a))

[$x' := 1 - \frac{x}{z}$. $\|1 - x'\| < 1 \overset{7.7}{\Rightarrow} x'^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - x')^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{z^n}$, $\underset{= z x'}{z - x}$

Wäre dies komplexwertig, so wäre der Konvergenzradius dieser Potenzreihe gegeben durch $\limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Sei nun $\varphi \in A'$. Wie in 7.9 ist $f: \varrho(x) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \varphi(R(z))$ holomorph und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(x^n)}{z^{n+1}}$ für $|z| > \|x\|$, sogar für $|z| > r(x)$.

Also $\limsup |\varphi(x^n)|^{\frac{1}{n}} \leq r(x)$ $\left(\text{Konvrad.} = \frac{1}{\limsup |\varphi(x^n)|^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{r(x)} > |\frac{1}{z}|\right)$

Für $r > r(x)$ ex. $N \in \mathbb{N}$, so dass $|\varphi(x^n)|^{\frac{1}{n}} < r$, $n \geq N$.

Somit $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\frac{\varphi(x^n)}{r^n}| < \infty$. Dies gilt für alle $\varphi \in A'$.

Nach 4.5 (Prinzip glm. Beschr.) also $\{\frac{x^n}{r^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt,

d.h. es ex. $C > 0$ mit $\|x^n\| \leq C r^n$, d.h. $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq C^{\frac{1}{n}} r$

$\Rightarrow \limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r \quad \forall r > r(x) \Rightarrow \limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x)$. □

2.12 Satz (Gelfand-Masur): A Banachalgebra mit 1 und Körper (d.h. jedes Element $a \neq 0$ in A ist invbar). Dann ist $A = \mathbb{C} \cdot 1$

[Beweis: $a \in A \overset{2.8}{\Rightarrow} \operatorname{Sp} a \neq \emptyset$, d.h. $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ so dass $\lambda - a$ nicht invbar $\overset{A \text{ Körper}}{\Longrightarrow} \lambda - a = 0$
$\Rightarrow a = \lambda \cdot 1$

2.13 Prop.: $\varphi: A \to \mathbb{C}$ Algebrenhomomorphismus (d.h. φ linear und $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$) mit $\varphi(1)=1$, A unitale Banachalgebra.

Dann gilt $\forall a \in A$: $\varphi(a) \in \operatorname{Sp} a$, φ ist stetig mit $\|\varphi\| \le 1$.

Bew.: $\varphi(\varphi(a)\cdot 1 - a) = 0 \Rightarrow \varphi(a)\cdot 1 - a$ nicht invertierbar $\Rightarrow \varphi(a) \in \operatorname{Sp} a$

(x invertierbar $\Rightarrow 1 = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}) \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$)

Nach 2.7 ist $|\varphi(a)| \le \|a\|$, also $\|\varphi\| \le 1$.

2.14 Def.: A Algebra. I ist ein Ideal in A, falls $I \subseteq A$ ein linearer Teilraum mit $A\cdot I, I \cdot A \subseteq I$ ist.

$I \neq A$ heißt maximal, falls $I \subseteq J \subseteq A$, J Ideal $\Rightarrow I = J$ oder $J = A$.

2.15 Bemerkung: Jedes Ideal ist in einem maximalen Ideal enthalten (Auswahlaxiom bzw. Lemma von Zorn).

2.16 Lemma: A Banachalgebra, $I \subseteq A$ abgeschlossenes Ideal.

Dann ist A/I (der Quotientenvektorraum) eine Banachalgebra mit $(xy)^{\cdot} = \dot{x}\dot{y}$, $(x+y)^{\cdot} = \dot{x} + \dot{y}$, $(\lambda x)^{\cdot} = \lambda \dot{x}$, $\|\dot{x}\| := \inf\{\|x+z\| : z \in I\} \le \|x\|$

„Bew.": $\|\cdot\|$ ist eine Norm ([...]) siehe 2-4a, A/I ist vollständig ([...]) siehe 2-4b

$\|\dot{x}\dot{y}\| \le \|\dot{x}\|\|\dot{y}\|$: Zu $\varepsilon > 0$ ex. $z_1 \in I$ mit $\|x+z_1\| \le \|\dot{x}\| + \varepsilon$, ebenso $z_2 \in I$ für y.

Dann $\|\dot{x}\dot{y}\| = \|(x+z_1)^{\cdot}(y+z_2)^{\cdot}\| \underset{(\|\dot{x}\| \le \|x\|)}{\le} \|(x+z_1)(y+z_2)\| \le \|x+z_1\|\|y+z_2\| \le (\|\dot{x}\|+\varepsilon)(\|\dot{y}\|+\varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$

Nachtrag zum Beweis von 2.16:

Sei E norm. VR, $F \subseteq E$ ein lin. TR.

(a) E/F ist VR mit $\dot{x} + \dot{y} = (x+y)^{\cdot}$, $\lambda \dot{x} = (\lambda x)^{\cdot}$

(b) $\|\cdot\|$ ist eine Halbnorm auf E/F und eine Norm genau dann, wenn F abgeschlossen ist.

(c) Ist F abgeschlossen, so ist $E \to E/F$, $x \mapsto \dot{x}$ stetig, linear mit Norm kleiner gleich 1 und bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.

(d) Ist F abgeschlossen und E ein Banachraum, so ist auch E/F ein Banachraum.

Beweis: (a) wohldef., da $(x+F)+(y+F) = (x+y)+F$

(b) Seien $z_1, z_2 \in F$, so dass $\|\dot{x}\| + \varepsilon = \|x + z_1\|$, $\|\dot{y}\| + \varepsilon = \|y + z_2\|$.

Dann $\|\dot{x} + \dot{y}\| \leq \|(x+y) + (z_1 + z_2)\| \leq \|x + z_1\| + \|y + z_2\| = \|\dot{x}\| + \|\dot{y}\| + 2\varepsilon$

Ebenso $\|\lambda \dot{x}\| = |\lambda| \|\dot{x}\|$.

Und $\|\dot{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \exists (z_n) \subseteq F : \|x + z_n\| \to 0 \Longleftrightarrow x \in \overline{F}$

Sei also F abgeschlossen. Dann folgt aus $\|\dot{x}\| = 0$: $x \in \overline{F} = F$, d.h. $\dot{x} = 0$.

Ist hingegen $\|\cdot\|$ eine Norm, so folgt aus $x \in \overline{F}$: $\|\dot{x}\| = 0$, d.h. $x \in F$

Also $F \subseteq \overline{F} \subseteq F$, d.h. F ist abgeschlossen.

(c) Da $\|\dot{x}\| \leq \|x\|$, ist die Quotientenabb. stetig mit Norm ≤ 1.

Sei $V \subseteq E$ offen. Sei $\dot{x} \in \dot{V}$. bzz. $\exists \varepsilon > 0$, so dass $B(\dot{x}, \varepsilon) \subseteq \dot{V}$ (für 1.2)

(Sonst $x+w \in V$) $\to$ O.E. $x \in V$. Also ex. $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq V$. Sei nun $\dot{z} \in B(\dot{x}, \varepsilon)$,

d.h. $\|(z-x)^{\cdot}\| < \varepsilon$, somit ex. $w \in F$ mit $\|z - x + w\| < \varepsilon$,

d.h. $z + w \in B(x, \varepsilon) \subseteq V \implies \dot{z} = (z+w)^{\cdot} \in \dot{V}$

(d) Sei $(\dot{x}_n)$ eine Cauchyfolge in E/F. O.E. $\|\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n\| < 2^{-(n+1)}$ (sonst Teilfolge)

Also ex. $a_n \in E$ mit $\|a_n\| < 2^{-n}$ und $\dot{a}_n = \dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n$.

Dann konvergiert $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ absolut, nach Lemma 1.38 konvergiert $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ also in E. Setze $z_{n+1} := x_1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(z_1 := x_1)$

Dann $\dot{z}_n = \dot{x}_n$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $z \in E$.

$\implies \dot{z}_n \to \dot{z}$, d.h. $(\dot{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

2.17 Prop.: A kommutative Banachalgebra mit 1. Dann gilt folgende bijektive Beziehung:

$$\{\varphi : A \to \mathbb{C} \text{ unitaler Algebrenhom.}\} \xleftrightarrow{\text{bij.}} \{\text{maximale Ideale in } A\}$$

(d.h. $\varphi(1)=1$)

$$\varphi \longleftrightarrow \ker\varphi$$

Bew. (2.17): $\ker\varphi \subseteq A$ Ideal: $x \in \ker\varphi,\ y \in A \Rightarrow \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = 0 \Rightarrow xy \in \ker\varphi$

$\varphi \mapsto \ker\varphi$ surj.: Sei $I \subseteq A$ maximales Ideal, dann ist I auch abgeschlossen ($I \subseteq \bar{I} \subseteq A \Rightarrow I = \bar{I}$, da $\bar{I} \neq A$ ([...])). Somit ist A/I Banachalgebra (2.16). Außerdem ist A/I Körper.

Sei $a \in A/I$. Dann $a\,A/I \subseteq A/I$ Ideal, da A/I kommutativ.
Aber auch $\pi^{-1}(a\,A/I) \subseteq A$ Ideal, wo $\pi : A \to A/I$ Quotientenabb.,
und $I \subseteq \pi^{-1}(a\,A/I) \overset{I \text{ max.}}{\Longrightarrow} I = \pi^{-1}(a\,A/I)$ oder $\pi^{-1}(a\,A/I) = A$,
d.h. $a\,A/I = 0$ ($\Rightarrow a = 0$) oder $a\,A/I = A/I$ ($\Rightarrow a$ invertierbar)

Nach 2.12 also $A/I = \mathbb{C}$, d.h. die Quotientenabb. ist $\pi : A \to \mathbb{C}$ mit $\pi(1) = 1$ und $I = \ker\pi$.

$\varphi \mapsto \ker\varphi$ inj.: $\ker\varphi_1 = \ker\varphi_2$. Dann $\varphi_1(\varphi_1(x)\cdot 1 - x) = 0$
$\Rightarrow 0 = \varphi_2(\varphi_1(x)\cdot 1 - x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \quad \forall x \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$

2.18 Def.: A Banachalgebra mit 1. Das Spektrum von A ist definiert als $\operatorname{Spec} A := \{\varphi : A \to \mathbb{C} \text{ unitaler Algebrenhom.}\}$
„Charaktere" (falls $\varphi \neq 0$)

2.19 **Proposition:** Sei A unitale Banachalgebra. Dann ist Spec A kompakt.

Beweisidee:
- Satz von Tychonov (äquivalent zum Auswahlaxiom): Jedes Produkt von kompakten Räumen ist kompakt.
- Sei E ein normierter Raum, $(E')_1 := \{x \in E' \mid \|x\| \leq 1\} \subseteq E'$ die abgeschlossene Einheitskugel im Dualraum E'.
  Versehe $(E')_1$ mit der lokalkonvexen Topologie der punktweisen Konvergenz:
  $$\varphi_\lambda \to \varphi \quad :\Leftrightarrow \quad \varphi_\lambda(x) \to \varphi(x) \quad \forall x \in E$$
  Dann ist $(E')_1$ eine abgeschlossene Teilmenge (nicht trivial) des Produkts $\prod_{x \in E_1} \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$, das nach Tychonov kompakt ist.
- Spec $A \overset{2.13}{\subseteq} (A')_1$ abgeschlossene Teilmenge: Sei $(\varphi_\lambda) \subseteq$ Spec A mit $\varphi_\lambda \to \varphi$ punktweise, $\varphi \in (A')_1$. Da $\varphi_\lambda(1) = 1$ $\forall \lambda$, auch $\varphi(1) = 1$, d.h. $\varphi \neq 0$. Außerdem $\varphi(xy) \leftarrow \varphi_\lambda(xy) = \varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y) \to \varphi(x)\varphi(y)$
  $\Rightarrow \varphi \in$ Spec A □

2.20 Satz: A Banachalgebra mit 1. Dann ist die Gelfandtransformation $\mathcal{X}: A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A)$, $x \longmapsto \hat{x}$, $\hat{x}(\varphi) := \varphi(x)$ für $\varphi \in \operatorname{Spec}$

Banachalgebra mit $\|\cdot\|_\infty$

ein stetiger Algebrenhomomorphismus.

Bew: $\widehat{x+y}(\varphi) = \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \hat{x}(\varphi) + \hat{y}(\varphi)$, ebenso $\widehat{xy}(\varphi) = \hat{x}(\varphi)\hat{y}(\varphi)$

Stetig: $|\hat{x}(\varphi)| = |\varphi(x)| \underset{2.13}{\le} \|x\| \quad \forall \varphi \Rightarrow \|\hat{x}\|_\infty \le \|x\|$

2.21 Satz: A kommutative Banachalgebra mit 1, $x \in A$. Dann gilt:

(a) Der Wertebereich der Funktion $\hat{x} = \mathcal{X}(x)$ ist $\operatorname{Sp} x \subseteq \mathbb{C}$.

(b) $r(x) = \|\hat{x}\|_\infty = \|\underbrace{\mathcal{X}(x)}_{\in \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A)}\|_\infty$

Bew: (a) $\mathcal{X}(x)(\operatorname{Spec} A) \subseteq \operatorname{Sp} x$: $\lambda \in \mathcal{X}(x)(\operatorname{Spec} A) \Rightarrow \exists \varphi \in \operatorname{Spec} A$ mit $\lambda = \mathcal{X}(x)(\varphi) = \varphi(x)$. (Dann $(\lambda - \mathcal{X}(x))(\varphi) = \varphi(x)\varphi(1) - \varphi(x) = 0$, also $\lambda - \mathcal{X}(x) = \mathcal{X}(\lambda - x)$ nicht invertierbar $\Rightarrow \lambda - x$ nicht invertierbar $\Rightarrow \lambda \in \operatorname{Sp} x$.) 2.13

„$\supseteq$": $\lambda \in \operatorname{Sp} x$. Dann $(\lambda - x)A \subseteq A$ echtes Ideal (da A kommutativ und $(\lambda - x)$ nicht invertierbar) $\overset{2.15\,\&\,2.17}{\Longrightarrow} \exists \varphi \in \operatorname{Spec} A: (\lambda - x)A \subseteq \operatorname{Ker} \varphi \subseteq A$ (max. Ideal)

Also $\varphi(\lambda - x) = 0$, d.h. $\lambda = \varphi(x) \in \mathcal{X}(x)(\operatorname{Spec} A)$.

(b) $r(x) \overset{(a)}{=} \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathcal{X}(x)(\operatorname{Spec} A)\} = \max\{|\varphi(x)| \mid \varphi \in \operatorname{Spec} A\} = \|\mathcal{X}(x)\|_\infty$