§3 grundlegende Eigenschaften von C^*-Algebren

3.1 Def.: Sei A eine Algebra über $\mathbb{C}$. Eine Involution auf A ist eine antilineare Abbildung $^*: A \to A$ mit $x^{**} = x$, $(xy)^* = y^* x^*$.

Eine C^*-Algebra ist eine Banachalgebra A mit Involution, so dass $\|x^* x\| = \|x\|^2 \quad \forall x \in A$.

3.2 Bemerkung: (a) Jede Involution ist bijektiv (da $x^{**} = x$), es folgt $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$ (denn $(x^{-1})^* x^* = (x x^{-1})^* = 1$), $1^* = 1$, falls A unital ist (denn $1^* x = (x^* 1)^* = x$), sowie $\operatorname{Sp} x^* = \overline{\operatorname{Sp} x}$ ($\lambda - x$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $(\lambda - x)^* = \bar{\lambda} - x^*$ invertierbar).

(b) Die Involution auf einer C^*-Algebra ist isometrisch, d.h. $\|x^*\| = \|x\|$ (denn $\|x\|^2 = \|x^* x\| \le \|x^*\| \|x\| \Rightarrow \|x\| \le \|x^*\| \le \|x^{**}\| = \|x\|$)

Außerdem ist $\|1\| = 1$. ($\|1\|^2 = \|1^* 1\| = \|1\| \in \{0,1\}$)

3.3 Beispiele:
- H Hilbertraum, dann $\mathcal{L}(H)$ C^*-Algebra (1.12, 1.13, 1.16)
- $M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ ist C^*-Algebra mit $(a_{ij})^* := (\overline{a_{ji}})$
- X kompakt, dann $\mathcal{C}(X)$ C^*-Algebra mit $f^* := \bar{f}$, $\|\cdot\|_\infty$

  X lokalkompakt, dann $\mathcal{C}_0(X) := \{ f: X \to \mathbb{C} \text{ stetig} \mid f \text{ verschwindet in } \infty \}$ C^*-Algebra (d.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists K \subseteq X$ kompakt: $|f(t)| < \varepsilon \;\; \forall t \notin K$)
- Jede *-invariante, abgeschlossene Unteralgebra einer C^*-Algebra ist wieder eine C^*-Algebra, z.B. $\mathcal{K}(H)$ (1.20, 1.21)

3.4 Prop.: (a) Sei A unitale C^*-Algebra und $x \in A$ selbstadjungiert ($x^* = x$). Dann ist $r(x) = \|x\|$. („die Norm ist algebraisch")

(b) Auf einer unitalen C^*-Algebra gibt es genau eine Norm, die sie zur C^*-Algebra macht.

Bew.: (a) $x^* x = x^2$. Also $r(x) \overset{2.11}{=} \lim \sqrt[2^n]{\|x^{2^n}\|} = \lim \sqrt[2^n]{\|x\|^{2^n}} = \|x\|$
$\leadsto \|x^2\| = \|x\|^2$

(b) Seien $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ zwei C^*-Normen auf A. Dann ist
$\|x\|_1^2 = \|x^* x\|_1 \overset{(a)}{=} r(x) \overset{(a)}{=} \|x^* x\|_2 = \|x\|_2^2$.

3.5 Prop.: Seien A, B unitale C^*-Algebren und $\varphi: A \to B$ ein $*$-Homomorphismus, d.h. φ ist Algebrenhomomorphismus mit $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$.
Dann ist φ stetig, es gilt sogar $\|\varphi(x)\| \leq \|x\| \quad \forall x \in A$.
Dies gilt sogar schon, wenn A bloß Banachalgebra mit Involution ist, so dass $\|x^*\| = \|x\|$ gilt. Daraus folgt, dass die C^*-Norm die kleinste Banachnorm ist.

Bew.: $\|x\|^2 \geq \|x^* x\| \overset{2.9}{\geq} r(x^* x) \geq r(\varphi(x^* x)) = r(\varphi(x)^* \varphi(x)) \overset{3.4}{=} \|\varphi(x)\|^2$

Es gilt: $Sp_B \varphi(x) \subseteq Sp_A x$, denn $\lambda - \varphi(x) = \varphi(\lambda - x)$ nicht invbar $\Rightarrow$ $\lambda - x$ nicht invbar.

Somit ist $\varphi: (A, \|\cdot\|_{\text{Banachnorm}}) \to (A, \|\cdot\|_{C^*\text{-Norm}})$ normvermindernd.

3.6 Satz: Sei A kommutative C^*-Algebra mit 1. Dann gilt:

(a) Jeder unitale ($\varphi(1) = 1$) Algebrenhomomorphismus $\varphi: A \to \mathbb{C}$ ist schon $*$-Algebrenhomomorphismus, d.h. $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)} \quad \forall x \in A$

(b) Für die Gelfandtransformation aus Satz 2.20 gilt $\chi(x^*) = \overline{\chi(x)}$, d.h. $\chi: A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A)$ ist ein stetiger $*$-Algebrenhomomorphismus.

Bew.: (a) Seien $\varphi(x)=\alpha+\beta i$, $\varphi(x^*)=\gamma+\delta i$ für $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$.

A: $\beta\neq-\delta$. Setze $c:=\dfrac{x+x^*-(\alpha+\gamma)1}{\beta+\delta}$. Also $c=c^*$, $\varphi(c)=i$.

Für beliebiges $\lambda\in\mathbb{R}$ ist also $\varphi(c+\lambda i)=(1+\lambda)i$

$$\Rightarrow 1+2\lambda+\lambda^2=|\varphi(c+\lambda i)|^2\overset{2.13}{\leq}\|c+\lambda i\|^2=\|(c+\lambda i)^*(c+\lambda i)\|$$

$$=\|(c-\lambda i)(c+\lambda i)\|=\|c^2+\lambda^2\|\leq\|c^2\|+\lambda^2$$

$\Rightarrow 1+2\lambda\leq\|c^2\|\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$ ↯ ($\|c^2\|$ konstant)

Genauso ist $\alpha=\gamma$. (mit $d:=\dfrac{ix+(ix)^*+(\beta-\delta)1}{\alpha-\gamma}$)

(b) $\chi(x^*)(\varphi)=\varphi(x^*)\overset{(a)}{=}\overline{\varphi(x)}=\overline{\chi(x)(\varphi)}$, 2.20

3.7 Satz (Gelfand-Naimark oder: Neumark**):** Sei A kommutative C^*-Algebra mit 1. Dann ist die Gelfandtransformation $\chi: A\longrightarrow\mathcal{C}(\operatorname{Spec}A)$, $x\longmapsto\hat{x}$ ein isometrischer *-Algebrenisomorphismus (kurz: *-Isomorphismus).
Insofern sind die kommutativen C^*-Algebren mit 1 genau die Funktionenalgebren $\mathcal{C}(K)$, K kompakt. (1. Fundamentalsatz)

Bew.: Wegen 3.6 bzw.: χ isometrisch (also auch injektiv), χ surjektiv.

χ isometrisch: $x\in A$. $\|\chi(x)\|_\infty^2=\|\chi(x^*x)\|_\infty\overset{2.21}{=}r(x^*x)\overset{3.4}{=}\|x^*x\|=\|x\|^2$.

χ surjektiv: Da χ isometrisch ist, ist $\chi(A)\subseteq\mathcal{C}(\operatorname{Spec}A)$ vollständig.
($(\chi(a_n))_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\chi(A)$ Cauchyfolge $\Rightarrow(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ Cauchyfolge, A vollständig)
Somit ist $\chi(A)\subseteq\mathcal{C}(\operatorname{Spec}A)$ abgeschlossene Unteralgebra, die *-invariant ist und die Punkte trennt ($\varphi,\psi\in\operatorname{Spec}A$, $\varphi\neq\psi\Rightarrow\exists x: \chi(x)(\varphi)=\varphi(x)\neq\psi(x)=\chi(x)(\psi)$)

$$\overset{\text{Stone-Weierstraß}}{\Longrightarrow}\ \chi(A)=\mathcal{C}(\operatorname{Spec}A)$$

3.8 Bemerkung:
- Der Name „C^*-Algebra" wurde von Segal in einer Arbeit 1947 erfunden: C = continuous (wegen 3.7), *, da die Involution eine starke Rolle spielt.
- Die Arbeit von 3.7 steckt in Definition 3.1: Für welche Banachalgebren ist χ in Satz 2.20 ein Isomorphismus?

Bisher waren alle betrachteten C^*-Algebren unital, diese verhalten sich nämlich besonders schön. Wie behandelt man aber nicht-unitale C^*-Algebren wie $\mathcal{C}_0(X)$ für einen lokalkompakten Raum X, oder $\mathcal{K}(H)$ (überhaupt Ideale)?

Auf zwei Arten: 1.) Man kann C^*-Algebren immer unitalisieren (s. dieses Kapitel)

2.) Man kann immer zumindest approximierende Einsen finden. (s. nächstes Kapitel)

3.9 Lemma: (a) Seien A, B C^*-Algebren. Dann ist $A \oplus B$ wieder C^*-Algebra mit koordinatenweisen Operationen und $\|(x,y)\| := \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

(b) Sei A eine involutive Banachalgebra. Dann ist

$\tilde{A} := \{(x,\lambda) \mid x \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}$ eine involutive Banachalgebra mit 1 per $(0,1)$

$(x,\lambda) + (y,\mu) := (x+y, \lambda+\mu)$, $(x,\lambda)\cdot(y,\mu) := (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu)$,

$(x,\lambda)^* = (x^*, \bar{\lambda})$, $\|(x,\lambda)\| := \|x\| + |\lambda|$

Schreibe $\lambda 1 + x$ für die Elemente in $\tilde{A}$ (sonst Multiplikation intuitiver)

A kann in $\tilde{A}$ per $x \mapsto (x,0)$ eingebettet werden (injektiver *-Homomorphismus)

3.10 Satz: Sei A eine C^*-Algebra. Dann existiert auf $\tilde{A}$ genau eine Norm, die $\tilde{A}$ zu einer C^*-Algebra macht. $A \hookrightarrow \tilde{A}$, $x \mapsto x$ Banachsubalg.

Bew.: Eindeutigkeit nach 3.4. Bew.: Existenz

1.) Sei A unital (mit Eins e). Dann ist $\tilde{A} \longrightarrow A \oplus \mathbb{C}$, $(x,\lambda) \longmapsto (\lambda e + x, \lambda)$ ein bijektiver, unitaler, (*-)Algebrenhomomorphismus. Also $\tilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$ als Algebren.

Dann besitzt $\tilde{A}$ eine C^*-Norm, nämlich die von $A \oplus \mathbb{C}$.

2.) Sei A nun nicht unital.

Betrachte $L: \tilde{A} \longrightarrow \mathcal{L}(A) := \{T: A \to A \text{ stetig, linear}\}$
$x \longmapsto L_x$ (für $x = \lambda 1 + a$ ist $xb := \lambda b + ab$)

gegeben durch $L_x(b) := xb$. L ist wohldefiniert, da L_x linear und $\|L_x(b)\| = \|xb\| \leq \|(\lambda 1 + a)b\| = \|\lambda b + ab\| \leq (|\lambda| + \|a\|)\|b\|$ falls $x = \lambda 1 + a \in \tilde{A}$, also $\|L_x\| \leq |\lambda| + \|a\|$, d.h. L_x stetig.

Setze dann $\|x\|_{\tilde{A}} := \|L_x\| = \sup\{\|(\lambda 1 + a)b\|_A \mid b \in A, \|b\| \leq 1\}$

Es gilt $\|a\|_{\tilde{A}} = \|a\|_A \quad \forall a \in A$

$\ulcorner$ $\|a\|\|a^*\| = \|a\|^2 = \|aa^*\| = \|L_a(a^*)\| \leq \|L_a\|\|a^*\| \Rightarrow \|a\|_A \leq \|L_a\| = \|a\|_{\tilde{A}}$

$\llcorner$ Andererseits $\|L_a(z)\| = \|az\| \leq \|a\|\|z\| \Rightarrow \|a\|_{\tilde{A}} = \|L_a\| \leq \|a\|_A$

$\|\cdot\|_{\tilde{A}}$ ist eine Norm auf $\tilde{A}$.

$\ulcorner$ bzzw. $\|x\|_{\tilde{A}} = 0 \Rightarrow x = 0$. Sei dazu $x \in \tilde{A}$ mit $x = \lambda 1 + a$, $\lambda \neq 0$
(sonst $x \in A$ und $\|x\|_{\tilde{A}} = \|x\|_A$)

$/A: \|L_x\| = 0$. Dann $xb = 0 \quad \forall b \in A$, d.h. $\lambda b + ab = 0 \quad \forall b \in A$.

$\llcorner$ Dann ist jedoch $-\frac{a}{\lambda}$ eine Eins in A, da $b = \frac{-a}{\lambda} b$ $\lightning$

$\|\cdot\|_{\tilde{A}}$ ist submultiplikativ: $\|L_{xy}\| = \|L_x L_y\| \leq \|L_x\|\|L_y\|$

Somit ist $(\tilde{A}, \|\cdot\|_{\tilde{A}})$ Banachalgebra.

$\|\cdot\|_{\tilde{A}}$ erfüllt die C^*-Bedingung:

Sei $x \in \tilde{A}$ und $\varepsilon > 0$. Dann ex. $b \in A$ mit $\|b\| \leq 1$ und $\|xb\|_A \geq \|L_x\| - \varepsilon$

$\Rightarrow (\|L_x\| - \varepsilon)^2 \leq \|xb\|_A^2 = \|b^* x^* x b\|_A \leq \|b^*\|_A \|L_{x^*x}(b)\|_A \leq \|L_{x^*x}\|$

$\Rightarrow \|L_x\|^2 \leq \|L_{x^*x}\|$, also $\|x\|_{\tilde{A}}^2 \leq \|x^* x\|_{\tilde{A}}$

Allgemein kann die C^*-Bedingung durch $\|x\|^2 \leq \|x^*x\|$ ersetzt werden:

$\|x\|^2 \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\| \Rightarrow \|x\| \leq \|x^*\| \Rightarrow \|x\| = \|x^*\| \Rightarrow \|x\|^2 \leq \|x^*x\| \leq \|x\|^2$

3.11 Bemerkung: Sind A, B Algebren, $\varphi: A \to B$ ein Algebrenhomomorphismus, so definiert $\tilde{\varphi}: \tilde{A} \to \tilde{B}$, $\lambda 1 + x \mapsto \lambda 1 + \varphi(x)$ einen unitalen Algebrenhomomorphismus. Insofern gilt beispielsweise Proposition 3.5 auch für nicht unitale C^*-Algebren.

⌈Bew: Setze $\varphi: A \to B$ aus 3.5 zu $\tilde{\varphi}: \tilde{A} \to \tilde{B}$ fort.
Nach 3.5 ist dann also $\|\tilde{\varphi}(x)\| \leq \|x\| \ \forall x \in \tilde{A}$, also auch $\|\varphi(x)\| \leq \|x\| \ \forall x \in A$. ⌊

3.12 Def.: Sei A eine nicht notwendig unitale C^*-Algebra, $x \in A$.
Dann
$$\operatorname{Sp} x := \begin{cases} \operatorname{Sp}_A x & \text{falls } A \text{ unital} \\ \operatorname{Sp}_{\tilde{A}} x & \text{falls } A \text{ nicht unital} \end{cases}$$

3.13 Bemerkung:
- Ist A nicht unital, so ist $0 \in \operatorname{Sp} x \ \forall x \in A$ ($x \in A$ kann nicht invertierbar sein)
- Ist A unital und $u \in A$ unitär (d.h. $u^*u = uu^* = 1$), so ist $\operatorname{Sp} u \subseteq S^1 \subseteq \mathbb{C}$
- Ist $x \in A$ selbstadjungiert (A nicht notwendig unital), so ist $\operatorname{Sp} x \subseteq \mathbb{R}$
- Ist $B \subseteq A$ C^*-Unteralgebra, $x \in B$, so ist $\operatorname{Sp}_B x = \operatorname{Sp}_A x$

3.14 Def.: Sei A kommutative, nicht notwendig unitale C^*-Algebra.
Setze $\operatorname{Spec} A := \operatorname{Spec} \tilde{A} \setminus \{\tilde{o}\}$, wobei $\tilde{o}: \tilde{A} \to \mathbb{C}$, $\lambda + x \mapsto \lambda$

3.15 Bemerkung: $\operatorname{Spec} A$ ist dann lokalkompakt und mit dem Gelfandisomorphismus gilt

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \cong & C(\operatorname{Spec} \tilde{A}) \\ \cup\!\mid & & \cup\!\mid \\ A & \cong & \{f: \operatorname{Spec} \tilde{A} \to \mathbb{C} \text{ stetig} \mid f(\tilde{o}) = 0\} \\ & & \| \\ & & C_0(\operatorname{Spec} A) \end{array}$$

Def. 2.18 konsistent mit Def. 3.14

⌈Sei A unital. Dann ist $\operatorname{Spec} A$ aus Def. 3.14 mit $\operatorname{Spec} A$ aus 2.18 konsistent:
Betrachte $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ mit komponentenw. Operationen. Beh: $\operatorname{Spec}_{2.18} A \xrightarrow{\cong} \operatorname{Spec}_{3.14} A$, $\varphi \mapsto \varphi'$
wobei $\varphi'(a, \lambda) := \varphi(a)$. Inj.: ✓ Surj.: Sei $\psi \in \operatorname{Spec} \tilde{A} \setminus \{\tilde{o}\}$. Dann $\psi(1,0) = 1$
$(\psi(1,0)^2 = \psi(1,0) \Rightarrow \psi(1,0) \in \{0,1\}$. $\psi(1,0) = 0 \Rightarrow \psi(a,\lambda) = \psi(a,0)\underset{=0}{\psi(1,0)} + \psi(0,\lambda) = \lambda(\underset{=0}{\psi(1,0)} + \psi(0,1)) = \lambda \overset{\lambda}{\overset{\|}{\psi(1,1)}}$
$\Rightarrow \psi = \tilde{o}$ ↯$)$
Also $\psi(0,1) = \psi(1,1) - \psi(1,0) = 1 - 1 = 0$, d.h. für $\varphi(a) := \psi(a,0)$ ist $\varphi \in \operatorname{Spec}_{2.18} A$
und $\varphi'(a,\lambda) = \varphi(a) = \psi(a,0) = \psi(a,\lambda) \Rightarrow \varphi' = \psi$ ⌊

3.15b <u>Bemerkung</u>: (a) Eine andere Möglichkeit eine C^*-Algebra A zu unitalisieren ist die Multiplikatoralgebra $\mathcal{M}(A)$: Ein Paar $L, R \in \mathcal{L}(A)$ mit $L(ab) = L(a)b$, $R(ab) = aR(b)$, $R(a)b = L(a)b$ heißt <u>Doppel-Zentralisator</u> von A. Beispiel: $L_x(a) = xa$, $R_x(a) = ax$.

Es gilt $\|L\| = \|R\|$. Die <u>Multiplikatoralgebra</u> $\mathcal{M}(A)$ ist gegeben durch $\mathcal{M}(A) := \{(L,R) \text{ Doppel-Zentralisatoren}\}$. Sie ist eine unitale C^*-Algebra mit:

$$
\begin{aligned}
&(L_1, R_1) + (L_2, R_2) := (L_1 + L_2,\ R_1 + R_2)\\
&\lambda (L, R) := (\lambda L, \lambda R)\\
&(L_1, R_1)(L_2, R_2) := (L_1 L_2,\ R_2 R_1)\\
&(L, R)^* := (R^*, L^*) \quad , \quad L^*(a) := (L(a^*))^*,\ R^* \text{ ebenso}\\
&\|(L, R)\| = \|L\| = \|R\|.\\
&1 = (\mathrm{id}, \mathrm{id})
\end{aligned}
$$

Und $A \hookrightarrow \mathcal{M}(A)$, $x \mapsto (L_x, R_x)$ ist eine isometrische Einbettung.

(b) $A \subseteq \tilde{A}$ und $A \subseteq \mathcal{M}(A)$ sind Ideale.

(c) Seien A, B C^*-Algebren, B unital und $A \subseteq B$ als Ideal eingebettet.

Dann gilt
$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\subseteq"] \arrow[dr, "\subseteq"'] & \arrow[d, phantom, "\hookrightarrow"] & \mathcal{M}(A) \\
& B \arrow[ur, "\exists"'] &
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\subseteq"] \arrow[dr, "\subseteq"'] & \arrow[d, phantom, "\hookleftarrow"] & \tilde{A} \arrow[dl, "\exists"] \\
& B &
\end{tikzcd}
$$

Insofern ist $\tilde{A}$ die kleinste, $\mathcal{M}(A)$ die größte Unitalisierung.

(d) X lokalkompakt. $\mathcal{M}(C_0(X)) = C_b(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ stetig, beschränkt}\}$

$\hat{X}$ Einpunktkompaktifizierung. $\widetilde{C_0(X)} = C_0(X) \oplus \mathbb{C}1 = C(\hat{X})$ $\qquad 1(x) \equiv 1$

(e) H Hilbertraum, $\dim H = \infty$. $\mathcal{M}(\mathcal{K}(H)) = \mathcal{L}(H)$

$\widetilde{\mathcal{K}(H)} = \mathcal{K}(H) \oplus \mathbb{C}1$

3.16 Def.: Sei A C^*-Algebra, $M \subseteq A$ Teilmenge.

$C^*(M) :=$ kleinste C^*-Unteralgebra von A, die M enthält

3.17 Bemerkung: (a) A, B C^*-Algebren, $M \subseteq A$, $\varphi, \psi : C^*(M) \to B$ *-Homomorphismen mit $\varphi_{|M} = \psi_{|M}$ $\Rightarrow$ $\varphi = \psi$

(denn $\{x \in C^*(M) \mid \varphi(x) = \psi(x)\} \subseteq A$ ist C^*-Unteralgebra, die M enthält)

(b) $x \in A$ heißt **normal**, falls $xx^* = x^*x$. Es gilt

$$C^*(x) \text{ kommutativ} \Leftrightarrow x \text{ normal}$$

(denn $C^*(x)$ ist der Abschluss von {nichtkommutative Polynome in x, x^*}, wobei $x^{k_1} x^{*k_2} x^{k_3} x^{*k_4} \cdots x^{k_n}$ ein nichtkommutatives Monom ist)

3.18 Prop.: Sei A eine C^*-Algebra, $x \in A$ normal.

(a) Ist A unital, so ist $\operatorname{Spec} C^*(x,1) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Sp} x$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$ ein Homöomorphismus

(b) Ist A nicht notwendig unital, so ist $\operatorname{Spec} C^*(x,1) \to \operatorname{Sp} x \setminus \{0\}$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$ ein Homöomorph.

Beweis: (a) $\varphi \mapsto \varphi(x)$ ist injektiv nach 3.17a, surjektiv nach 2.21a (denn $\varphi(x) = \hat{x}(\varphi)$ und $C^*(x,1)$ kommutativ nach 3.17b), stetig nach Definition der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\operatorname{Spec} C^*(x,1)$ (s. Bew. von 2.19).

Dann ist auch die Umkehrfunktion stetig (da $\operatorname{Spec} C^*(x,1)$ kompakt)

3.19 Korollar: Der Gelfandisomorphismus (Satz 3.7) und die vorige Proposition (Prop. 3.18) liefern den Funktionalkalkül:

(a) Sei A C^*-Algebra mit 1, $x \in A$ normal.

Dann gilt $C^*(x,1) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(\operatorname{Sp} x)$, wobei $x \mapsto \mathrm{id}_{\operatorname{Sp} x}$, $1 \mapsto 1$.

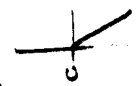
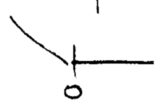
$\beta : C^*(x,1) \xrightarrow{\chi} \mathcal{C}(\operatorname{Spec} C^*(x,1)) \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp} x)$, $x \mapsto \hat{x}$, $f \mapsto f \circ \alpha^{-1}$, mit $\alpha : \operatorname{Spec} C^*(x,1) \to \operatorname{Sp} x$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$.

Dann $\beta(x)(\lambda) = (\hat{x} \circ \alpha^{-1})(\lambda) = \hat{x}(\varphi) = \varphi(x) = \lambda$ für $\alpha(\varphi) = \lambda$. D.h. $\beta(x) = \mathrm{id}_{\operatorname{Sp} x}$

Somit ist $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} x) \longrightarrow C^*(x,1)$ ein $*$-Isomorphismus
$f \longmapsto f(x)$

mit $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\bar{f}(x) = f(x)^*$.

Die Idee hierbei ist: Sei f ein Polynom in z und $\bar{z}$. Dann ist $f(x)$ ein Polynom in x und x^*. Der Funktionalkalkül verallgemeinert$^{*)}$ dieses Prinzip auf alle stetigen Funktionen $f \in \mathcal{C}(\operatorname{Sp} x)$. Insofern können leicht Elemente mit bestimmten Eigenschaften in $C^*(x,1)$ definiert werden. ($^{*)}$ nach dem Prinzip von Stone-Weierstraß)

1. Beispiel: Sei $x \in A$ selbstadjungiert. Nach 3.13 ist also $\operatorname{Sp} x \subseteq \mathbb{R}$.
Betrachte $f_+, f_- : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, f_+  , f_- 
Dann gilt mit $x_+ := f_+(x)$, $x_- := f_-(x)$:
$x = x_+ - x_-$, x_+, x_- selbstadjungiert, $\operatorname{Sp} x_+, \operatorname{Sp} x_- \subseteq [0,\infty)$,
$x_+ x_- = x_- x_+ = 0$. („Zerlegung in disjunkte positive Elemente")

2. Beispiel: $x \in A$ selbstadjungiert, $\operatorname{Sp} x \subseteq [0,\infty)$. Dann ex. $\sqrt{x} \in A$, mit $(\sqrt{x})^2 = x$, $\sqrt{x}$ selbstadjungiert, $\operatorname{Sp} \sqrt{x} \subseteq [0,\infty)$.

Der Funktionalkalkül verhält sich gut: Es gelten z.B.

15.11 $\operatorname{Sp} f(x) = f(\operatorname{Sp}(x))$, g stetig auf $f(\operatorname{Sp}(x)) \Rightarrow g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

(b) Ist A eine nicht unitale C^*-Algebra, $x \in A$ normal, dann gilt
$$C^*(x) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}_0(\operatorname{Sp} x) = \{ f \in \mathcal{C}(\operatorname{Sp} x) \mid f(0) = 0 \} \subseteq \mathcal{C}(\operatorname{Sp} x)$$
und auch hier ist ein Funktionalkalkül gegeben.

3.20 Prop.: Seien A, B C^*-Algebren, $\varphi : A \to B$ ein $*$-Homomorphismus.

(a) Ist $x \in A$ normal, $f \in \mathcal{C}(\operatorname{Sp} x)$, so ist $\varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$

(b) ~~Ist φ injektiv, so ist φ schon isometrisch. (erst mal viel!)~~
((b) erst als 5.10(b))

Beweis: (a) klar für Polynome. Seien nun p_n Polynome, die gleichmäßig gegen f auf $\mathrm{Sp}\,x$ konvergieren. Dann gilt $p_n(x) \to f(x)$.

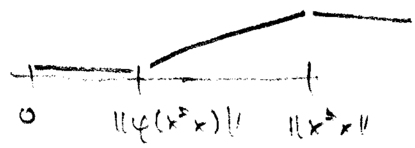
Dann $\varphi(f(x)) \leftarrow \varphi(p_n(x)) = p_n(\varphi(x)) \to f(\varphi(x))$.

Bemerke: $\mathrm{Sp}\,\varphi(x) \subseteq \mathrm{Sp}\,x$, also ex. $f(\varphi(x))$.

(b) z.z. $\|\varphi(x^*x)\| = \|x^*x\|$ (denn $\|\varphi(x)\|^2 = \|\varphi(x^*x)\| = \|x^*x\| = \|x\|^2$)

Sei φ nicht isometrisch, d.h. es ex. ein $x \in A$, so dass $\|\varphi(x^*x)\| \underset{(3.5)}{<} \|x^*x\|$

Betrachte $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



, mit den Eigenschaften $0 \le f \le 1$, $f|_{(\|x^*x\|, \infty)} \equiv 1$, $f|_{(-\infty, \|\varphi(x^*x)\|)} \equiv 0$.

Dann $\|f(x^*x)\| = \|f\|_\infty = 1$, da der Funktionalkalkül isometrisch ist und $\|x^*x\| \in \mathrm{Sp}\,x^*x$ $(r(x^*x) = \|x^*x\|)$. Außerdem $\|f(\varphi(x^*x))\| = 0$.

Da nun $\varphi(f(x^*x)) \overset{(a)}{=} f(\varphi(x^*x))$ und $f(x^*x) \neq 0$, ist φ nicht injektiv.

3.21 Bemerkung: Der Funktionalkalkül für C^*-Algebren funktioniert nur mit stetigen Funktionen. Für Von-Neumann-Algebren hat man jedoch auch einen mit messbaren Funktionen.

(C^*-Algebren $\Longleftrightarrow$ stetige Funktionen über einem Raum $\Longleftrightarrow$ Topologie
VN-Algebren $\Longleftrightarrow$ messbare Funktionen über einem Raum $\Longleftrightarrow$ Maßtheorie)

analyt. Fktk.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Neben der bisher betrachteten Konvergenz in Operatornorm gibt es auch andere Formen der Konvergenz für beschränkte Operatoren auf Hilberträumen. Seien $A_n, A \in B(H)$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir sagen:

- $A_n \to A$ *gleichmäßig* (oder *in Norm*), falls $\lim_{n\to\infty}\|A_n - A\| = 0$.
- $A_n \to A$ *stark*, falls $\lim_{n\to\infty}\|A_n x - Ax\| = 0$ für alle $x \in H$.
- $A_n \to A$ *schwach*, falls $\lim_{n\to\infty}\langle A_n x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle$ für alle $x, y \in H$.

(a) Zeigen Sie: $A_n \to A$ in Norm $\implies$ $A_n \to A$ stark $\implies$ $A_n \to A$ schwach

(b) Sei H ein separabler Hilbertraum mit ONB $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $V_n \in B(H)$ durch $V_n e_1 := e_n$ und $V_n e_k := 0$, $k \neq 1$. Bestimmen Sie V_n^* und zeigen Sie: $V_n^* \to 0$ schwach und $V_n \to 0$ schwach, aber $V_n^* \to 0$ stark und $V_n \not\to 0$ stark.

(c) Sei $S \in B(\ell_2(\mathbb{N}))$ der einseitige Shift (siehe Blatt 8). Zeigen Sie: $S^n \to 0$ schwach und $(S^*)^n \to 0$ schwach, aber $S^n(S^*)^n \to 1$ schwach. Gelten die entsprechenden Konvergenzen auch stark oder in Norm?

Die starke und die schwache Konvergenz verhalten sich also nicht so schön bzgl. der algebraischen Operationen wie die Konvergenz in Norm.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**. Analytischer Funktionalkalkül.** Sei H ein Hilbertraum und $T \in B(H)$. Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Obermenge des Spektrums $\sigma(T)$ von T und Γ eine Kette von stückweise glatten, geschlossenen Kurven in $\Omega\backslash\sigma(T)$, die die Bedingung $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1$ für alle $z \in \sigma(T)$ erfüllt. Zeigen Sie:

(a) Für jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gibt es einen eindeutig bestimmten Operator $\Phi_T^\Omega(f) \in B(H)$ mit der Eigenschaft

$$\langle \Phi_T^\Omega(f)x, y\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\langle (z-T)^{-1}x, y\rangle\, dz \qquad \text{für alle } x, y \in H.$$

(b) Ist $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ein holomorphes Polynom, d.h. gibt es $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, so dass $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ für alle $z \in \Omega$ erfüllt ist, dann gilt

$$\Phi_T^\Omega(f) = \sum_{k=0}^n a_k T^k.$$