Exkurs: Der Satz von Stone-Weierstraß

Weierstraß (1895): Kann man stetige Funktionen $f \in \mathcal{C}[0,1]$ bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$-Norm durch „einfachere" Funktionen approximieren? Die einfachsten Funktionen sind Polynome und die Antwort ist ja (Approximationssatz von Weierstraß, s. auch A II, 15.4, Fuchs).

Stone (1948): Für den Beweis sind nur sehr wenige, sehr algebraische Eigenschaften notwendig. Weierstraß' Satz ist daher stark verallgemeinerbar.

Im Folgenden betrachten wir $\mathcal{C}(K) := \{f : K \to \mathbb{C} \text{ stetig}\}$, wobei K ein kompakter, metrischer Raum ist, versehen mit $\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)|$.
Dann ist $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

E.1 Definition: Eine Teilmenge $A \subseteq \mathcal{C}(K)$ heißt *-Unteralgebra mit Eins, falls:

(i) $f, g \in A \Rightarrow fg \in A$
(ii) $f, g \in A,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda f + \mu g \in A$
(iii) $f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A$
(iv) $\mathbb{1} \in A \quad (\mathbb{1}(x) :\equiv 1 \quad \forall x \in K)$

A heißt punktetrennend, falls $\forall s, t \in K, s \neq t \ \exists f \in A : f(s) \neq f(t)$.

E.2 Beispiel: Die Menge $P \subseteq \mathcal{C}[0,1]$ aller Polynome auf $[0,1]$ in x und $\bar{x}$ ist eine punktetrennende *-Unteralgebra mit Eins.
Betrachtet man die Polynome in x in $\mathcal{C}_\mathbb{R}[0,1]$ (reellwertige Fktn), so ist dies ebenfalls der Fall.

E.3 Satz von Stone-Weierstraß: Sei K ein kompakter, metrischer Raum und $A \subseteq \mathcal{C}(K)$ eine punktetrennende *-Unteralgebra mit Eins.
Dann ist A dicht in $\mathcal{C}(K)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.
Ist A also schon abgeschlossen, so ist $A = \mathcal{C}(K)$.
Gleiches gilt für $A \subseteq \mathcal{C}_\mathbb{R}(K)$ (ohne (iii) von E.1).

Sei A abgeschlossen. (Sonst auch $\bar{A}$ pkttrennende $*$-Unteralg. mit Eins) 5 - 15

Beweis: 1.) Ist $f \in A$, $f \geq 0$, so ist auch $\sqrt{f} \in A$.

Bew. von 1.): Sei $0 \leq f \leq 1$. Setze $g := 1 - f$, also $0 \leq g \leq 1$.

Dann ist $\sqrt{f(t)} = \sqrt{1 - g(t)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(t)^n \quad \forall t \in K$ (Taylorreihe von $\sqrt{1-x}$ um $x=0$)

mit $a_n = \frac{1}{2n-1} 2^{-2n+1} \binom{2n-1}{n} < c \cdot n^{-\frac{3}{2}}$ für ein $c > 0$ (Stirling)

Da die Taylorreihe für $\sqrt{1-x}$ auf $[-1,1]$ gleichmäßig konvergiert, gilt also $h_m := 1 - \sum_{n=1}^{m} a_n g^n \in A$ und $h_m \xrightarrow[m \to \infty]{} \sqrt{f}$ in $\|\cdot\|_\infty$.

Da A abgeschlossen ist, ist $\sqrt{f} \in A$. Ist $f \not\leq 1$: Reskalieren. $\square$ (1.)

2.) Sind $f, g \in A$ reellwertig, so ist $\max(f,g), \min(f,g) \in A$.

Bew. von 2.): $\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$, $\min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$

und $|f| = \sqrt{f\bar{f}} \overset{1.)}{\in} A$. $\square$ (2.)

3.) Sei $f \in \mathcal{C}(K)$ reellwertig und $\varepsilon > 0$. Dann ex. $g \in A$, $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Bew. von 3.): Zu $s \neq t$ in K ex. $f_{s,t} \in A$ mit $f_{s,t}(s) = f(s)$, $f_{s,t}(t) = f(t)$.

Da A punktetrennend ist, gibt es nämlich ein $h \in A$ mit $h(s) \neq h(t)$.

Setze $f_{s,t}(x) := f(t) + (f(s) - f(t)) \cdot \frac{h(x) - h(t)}{h(s) - h(t)}$.

Setze $U_t := \{x \in K \mid f_{s,t}(x) < f(x) + \varepsilon\}$. Dann ist U offen (denn $(f_{s,t} - f)^{-1}(\varepsilon, \infty)$ ist offen). Außerdem ist $t \in U_t$.

Damit ist $(U_t)_{t \in K}$ eine offene Überdeckung von K, d.h. es gibt $t_1, \dots, t_n \in K$ mit $K = \bigcup_{i=1}^{n} U_{t_i}$. Setze $h_s := \min_{1 \leq i \leq n} f_{s,t_i} \in A$.

Setze $V_s := \{x \in K \mid h_s(x) > f(x) - \varepsilon\}$ offen, $s \in V_s$ $(h_s(s) = f(s))$

$\Rightarrow \exists s_1, \dots, s_m \in K$ mit $K = \bigcup_{j=1}^{m} V_{s_j}$. Setze $g := \max_{1 \leq j \leq m} h_{s_j} \in A$.

Sonst ist $h_{s_j} < f + \varepsilon \quad \forall j$, d.h. $g < f + \varepsilon$ und $g > f - \varepsilon$, d.h. $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. $\square$ (3.)

4.) Sei $f \in \mathcal{C}(K)$ beliebig. Nach 3.) ex. $(g_n), (h_n) \subseteq A$ mit $g_n \to \operatorname{Re} f$, $h_n \to \operatorname{Im} f$ $\Rightarrow \underbrace{g_n + i h_n}_{\in A} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. $\square$

E.4 <u>Korollar:</u> Die Algebra aller Polynome ist dicht in $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0,1]$.
(Weierstraß)

E.5 <u>Bemerkung:</u> Betrachtet man $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty)$, wobei $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0,1]$ alle Polynome sind, oder $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}[0,1]$, so ist dies kein Banachraum nach Blatt 5. Und tatsächlich, die Vervollständigung ist ja $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ bzw. $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$!

E.6 <u>Korollar:</u> (a) Die Menge der Polynome $\sum_{n=-N}^{N} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ ist dicht in $\mathcal{C}(S^1)$, wobei $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$.
Hierbei ist $z^n := \bar{z}^{-n}$ für $n < 0$.

(b) Die Menge der Funktionen $e_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$, $t \in [0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$ ist eine ONB für $L^2([0,2\pi], \lambda)$.

(c) Der Hilbertraum $L^2[0,2\pi]$ ist isomorph zu ℓ^2. Ebenso $L^2[0,1]$.

<u>Beweis:</u> (a) $\{\sum_{n=-N}^{N} a_n z^n \mid a_n \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}(S^1)$ punktetrennende $*$-Unteralg. mit Eins.
(Beachte $z^n z^m = z^{n+m}$, selbst für $z^n \bar{z}^{-m}$, denn $z\bar{z} = 1$.)

(b) Sei $\mathcal{C}_{per}[0,2\pi] = \{f : [0,2\pi] \to \mathbb{C} \text{ stetig}, f(0) = f(2\pi)\}$.
<u>Sei</u> $\Phi : \mathcal{C}_{per}[0,2\pi] \to \mathcal{C}(S^1)$ mit $\Phi(f)(e^{it}) := f(t)$ für $t \in [0,2\pi]$.
Dann ist Φ isometrisch, surjektiv und $\Phi(\sqrt{2\pi}\, e_n)(z) = z^n$.
$(\Phi(\sqrt{2\pi}\, e_n)(e^{it}) = \sqrt{2\pi}\, e_n(t) = e^{int} = (e^{it})^n, \quad z = e^{it})$
Da Φ linear ist, werden also endliche Linearkombinationen von e_n auf Polynome $\sum a_n z^n$ abgebildet, und sind daher dicht in $\mathcal{C}_{per}[0,2\pi]$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.
Da $\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(t)|^2}_{\leq \|f\|_\infty} dt \leq 2\pi \|f\|_\infty^2$ ist, sind endliche Linearkombinationen von e_n also auch dicht in $\mathcal{C}_{per}[0,2\pi]$ bzgl. $\|\cdot\|_2$.
($f \in \mathcal{C}_{per}[0,2\pi]$. Dann ex. $g \in \{\sum a_n e_n\}$ mit $\|f-g\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \|f-g\|_2 < 2\pi\varepsilon$)
Es gilt: $\mathcal{C}_{per}[0,2\pi) \subseteq \mathcal{C}[0,2\pi] \subseteq L^2[0,2\pi]$ dicht.
(denn in L^2 ist $\|f - g\|_2 = 0$ für $f \in \mathcal{C}[0,2\pi)$ und $g(x) := \begin{cases} f(x) & 0 \leq x < 2\pi \\ f(0) & x = 2\pi \end{cases}$)

Bew.: $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist ein ONS bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in $L^2[0,2\pi]$.
(Nach 5.25 und da Lin.komb. dicht in L^2 sind: auch ONB)

$$\langle e_n, e_m\rangle = \int_0^{2\pi} e_n(t)\overline{e_m(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}e^{-imt}\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}\,dt = \delta_{nm}$$

(c) $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist eine abzählbare ONB von $L^2[0,2\pi]$, daher
$L^2[0,2\pi] \cong \ell^2$ als HRe. $L^2[0,1] \cong L^2[0,2\pi]$

$$f \longmapsto \cancel{\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}}\, f\circ h, \quad h(t)=\frac{1}{2\pi}t$$

E.7 Bemerkung: Ist $f\in C[0,2\pi]$, so ist $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ die zugehörige Fourierreihe. Die obige ONB von $L^2[0,2\pi]$ ist also einfach die Darstellung als Fourierreihe. Beachte: Die Approximation im HR-Sinne ist jedoch in der $\|\cdot\|_2$-Norm. Die punktweise oder glm. Konvergenz (für die man sich bei Fourierreihen sonst oft interessiert) ist hingegen viel schwieriger.