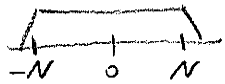
§5 approximierende Einsen, Ideale, Quotienten

5.1 Definition: Sei X ein topologischer Raum. Eine Familie $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq X$ heißt **Netz** in X, falls Λ eine gerichtete, geordnete Menge ist, d.h. falls eine Relation $\leq$ auf Λ existiert, so dass (i) $\lambda \leq \lambda$, (ii) $\lambda\leq\mu, \mu\leq\lambda \Rightarrow \lambda=\mu$, (iii) $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\lambda_3 \Rightarrow \lambda_1\leq\lambda_3$ und $\forall \lambda,\mu\in\Lambda\ \exists \nu\in\Lambda$ mit $\lambda\leq\nu, \mu\leq\nu$.

$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ konvergiert gegen $x\in X$, falls zu jeder Umgebung U von x ein $\lambda_0\in\Lambda$ existiert, so dass $x_\lambda\in U \quad \forall \lambda\geq\lambda_0$

5.2 Definition: A C^*-Algebra. Eine approximierende Eins in A ist ein monoton wachsendes Netz $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ mit $0\leq u_\lambda\leq 1$ (d.h. $0\leq u_\lambda$ und $\|u_\lambda\|\leq 1$), so dass $u_\lambda x\to x$, $xu_\lambda\to x \quad \forall x\in A$.

5.3 Beispiele: • $A = C_0(\mathbb{R})$ mit $u_N :=$ 

• $A = \mathcal{K}(H)$, $u_n := p_n$ Proj. auf $\langle e_1,\dots,e_n\rangle$, wenn $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ONB von H.

5.4 Satz: Sei A eine C^*-Algebra (oder ein Ideal in einer C^*-Algebra B).
22.11. Dann besitzt A eine approximierende Eins.

Bew: 1.) Die Menge $\Lambda := \{h\in A \mid h\geq 0, \|h\|<1\}$ ist gerichtet und geordnet

Bew. von 1.): geordnet: (i)✓, (ii) 4.5, (iii) 4.4

gerichtet: Seien $a,b\in\Lambda$. Setze $a' := a(1-a)^{-1}$, $b' := b(1-a)^{-1}$.
(${\|a\|<1} \Rightarrow 1\notin \mathrm{Sp}\, a$)

Dann $a = a'(1+a')^{-1} \leq (a'+b')(1+a'+b')^{-1} =: c$, ebenso $b\leq c$.

Lemma: $0\leq x\leq y \overset{4.8(c)}{\Longrightarrow} (1+y)^{-1}\leq(1+x)^{-1}$
$\Rightarrow x(1+x)^{-1} = 1-(1+x)^{-1} \leq 1-(1+y)^{-1} = y(1+y)^{-1}$

Und $c\in\Lambda$, denn $\frac{t}{1+t}\leq 1 \quad \forall t\in[0,\infty)$, also $\|c\|\leq 1$.

($c\geq 0$, da $a'+b'\geq 0$ und $\frac{t}{1+t}\geq 0$ für $t\geq 0$)

2.) Sei $h \geq 0$, $h \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Dann $h(\frac{1}{n}+h)^{-1} \in \Lambda$ und $h(1-h(\frac{1}{n}+h)^{-1}) \leq \frac{1}{n}$

⊢ $0 \leq \frac{t}{t+\frac{1}{n}} \leq 1 \quad \forall t \geq 0$ und $\frac{t(\frac{1}{n}+t)-t^2}{\frac{1}{n}+t} = \frac{1}{n}\frac{t}{t+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \quad \forall t \geq 0$

3.) Sei $h \geq 0$ und $g \in \Lambda$ mit $h(\frac{1}{n}+h)^{-1} \leq g$. Dann gilt $\|h-gh\|^2 \leq \frac{1}{n}\|h\|$, $\|h-hg\|^2 \leq \frac{1}{n}\|h\|$

⊢ $\|h-gh\|^2 = \|h(1-g)^2h\| \leq \|h(1-g)h\| \leq \|h(1-h(\frac{1}{n}+h)^{-1})h\| \overset{2.)}{\leq} \frac{1}{n}\|h\|$

$\left((1-g)-(1-g)^2 = g(1-g) \geq 0\right.$ für $0 \leq g \leq 1$. Also $(1-g)^2 \leq (1-g)$, 4.8(a), 4.8(b)$\left.\right)$

⊣

Sei nun $x \in A$, $\varepsilon > 0$. Setze $h := xx^* \geq 0$. Nach 2.) ist $\lambda_0 := h(\frac{1}{n}+h)^{-1} \in \Lambda$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n}\|h\| < \varepsilon^2$. Dann gilt für alle $g \in \Lambda$ mit $\lambda_0 \leq g$: $\|x-gx\|^2 = \|(1-g)h(1-g)\| \leq \underbrace{\|h-gh\|}_{\overset{3.)}{\leq}\varepsilon}\underbrace{(1+\|g\|)}_{\leq 2}$

Also $x-gx \to 0$ für $g \to \infty$, ebenso $x-xg \to 0$.

⊣

5.6 Definition/Erinnerung: Sei A eine C^*-Algebra. I ist ein Ideal in A, falls $I \subseteq A$ ein abgeschlossener linearer Teilraum mit $A \cdot I, I \cdot A \subseteq I$ ist. Schreibe dann $I \lhd A$.

5.7 Beispiele:
- $K(H) \lhd \mathcal{L}(H)$ (s. 1.20)
- $A \lhd \tilde{A}$ unter der Identifikation $A \hookrightarrow \tilde{A}$, $x \mapsto (x,0)$ (s. 3.10)

5.5 Bemerkung: Ist A eine separable C^*-Algebra (dh. es existiert eine abzählbare dichte Teilmenge), dann existiert eine abzählbare approximierende Eins $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_1 \leq u_2 \leq \dots$

⊢ Bew: Sei $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine approx. Eins nach 5.4, $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ dicht. Wähle λ_n mit $\lambda_n \geq \lambda_{n-1}$, so dass $\|u_\lambda x_i - x_i\|, \|x_i u_\lambda - x_i\| < \frac{1}{n}$ für alle $\lambda \geq \lambda_n$, $i=1,\dots,n$. $u_n := u_{\lambda_n}$

⊣

5.8 Bemerkung: (a) Sei A C^*-Algebra, $I \trianglelefteq A$ Ideal. Dann $I = I^*$.

(b) Sei A C^*-Algebra, $I \trianglelefteq J \trianglelefteq A$. Dann $I \trianglelefteq A$.

(c) Sei A C^*-Algebra, $I \trianglelefteq A$ Ideal mit $I \neq A$, $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ approx. Eins für I. Dann ist $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ keine approximierende Eins für A.

Bew: (a) Sei $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ approx. Eins für I, $x \in I$.

Dann $\underbrace{x^* u_\lambda}_{\in I} \to x^* \in I$, da $u_\lambda x \to x$, * stetig, I abgeschlossen.

(b) Sei $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ approx. Eins für I, sei $x \in I$ und $a \in A$.

Dann $I \ni x \underbrace{u_\lambda a}_{\in J} \to xa$, d.h. $xa \in I$, ebenso $ax \in I$.

(c) Ang.: $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ auch approx. Eins für A. Dann gilt $\forall a \in A$: $\underbrace{u_\lambda a}_{\in I} \to a \in I$ ↯

5.9 Satz: Sei $I \trianglelefteq A$ ein Ideal, A eine C^*-Algebra.

Dann ist A/I eine C^*-Algebra (mit Quotientennorm, s. 2.16).

Bew: Nach 2.16 ist A/I eine Banachalgebra, die nach 5.8(a) eine Involution $\dot{x}^* := (x^*)^{\cdot}$ besitzt ($\dot{x} = \dot{y} \Rightarrow x - y \in I \Rightarrow x^* - y^* \in I \Rightarrow (x^*)^{\cdot} = (y^*)^{\cdot}$).

Bzz.: $\|\dot{x}^* \dot{x}\| = \|\dot{x}\|^2$.

Sei $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ approximierende Eins in I, sei $x \in A$.

Dann gilt $\|\dot{x}\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|x - u_\lambda x\|$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $z \in I$ mit $\|x + z\| \leq \|\dot{x}\| + \varepsilon$. Es ex. $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $\|z - u_\lambda z\| < \varepsilon$ $\forall \lambda \geq \lambda_0$. Also:

$$\|\dot{x}\| \leq \|x - \underbrace{u_\lambda x}_{\in I}\| \leq \|(1-u_\lambda)(x+z)\| + \|(1-u_\lambda)z\| \leq \underbrace{\|1-u_\lambda\|}_{\leq 1}\|x+z\| + \varepsilon \leq \|\dot{x}\| + 2\varepsilon$$

Somit
$$\|\dot{x}\|^2 = \lim_\lambda \|x - u_\lambda x\|^2 = \lim \|(1-u_\lambda)x^* x(1-u_\lambda)\|$$
$$= \lim \|(1-u_\lambda)(x^* x + z)(1-u_\lambda)\|$$
$$\leq \|x^* x + z\| \qquad \forall z \in I.$$

$$\xRightarrow{\inf_{z\in I}} \|\dot{x}\|^2 \leq \|\dot{x}^* \dot{x}\| \Rightarrow \|\dot{x}\|^2 = \|\dot{x}^* \dot{x}\|$$

s. Ende des Beweises von 3.10

5.10 Prop.: Seien A, B C^*-Algebren, $\varphi: A \to B$ ein … $*$-Homomorphismus.

(a) Ist φ injektiv, so auch schon isometrisch (erstaunlich!)

(b) $\varphi(A)$ ist C^*-Algebra und $\varphi(A) \cong A/\mathrm{Kern}\,\varphi$
(falsch für Banachalgebren)

⌜**Bew:** (a) s. „3.20 (b)" (Beweis in §3 noch nicht möglich, da $r(x^*x) = \|x^*x\| \Rightarrow \|x^*x\| \in \mathrm{Sp}\, x^*x$ oder $-\|x^*x\| \in \mathrm{Sp}\, x^*x$. Nach §4 jedoch $\mathrm{Sp}\, x^*x \subseteq [0,\infty)$, also $\|x^*x\| \in \mathrm{Sp}\, x^*x$.)

(b)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\text{Quotienten-Abbildung}"'] & B \\ A/\mathrm{Kern}\,\varphi \arrow[ur, dashed, "\dot\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$\dot\varphi: A/\mathrm{Kern}\,\varphi \to B$ definiert durch $\dot\varphi(\dot x) := \varphi(x)$. Das ist ein wohldefinierter $*$-Hom., der injektiv ist.

Nach (a) ist $\dot\varphi$ also isometrisch. Somit ist $\varphi(A)$ vollständig und also abgeschlossen. Nach 3.3 ist $\varphi(A)$ also C^*-Algebra.
⌞

5.11 Bemerkung: (homologische Eigenschaften von C^*-Algebren)

Seien $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ Objekte mit Morphismen $\ldots \to A_i \xrightarrow{\varphi_i} A_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} A_{i+2} \to \ldots$

Eine solche Kette heißt *exakt*, falls $\mathrm{Kern}\,\varphi_{i+1} = \mathrm{Bild}\,\varphi_i$.

z.B. A_i C^*-Algebren, φ_i $*$-Homomorphismen (oder Gruppen oder Moduln, …)

Ist $I \lhd A$ ein Ideal in einer C^*-Algebra A, so ist

$$0 \to I \to A \xrightarrow{\text{Quot.abb.}} A/I \to 0$$
$$x \mapsto x$$
exakt („kurze exakte Sequenz")

⌜denn: $\mathrm{Kern}\,(I \hookrightarrow A) = 0 = \mathrm{Bild}\,(0 \to I)$, $\mathrm{Kern}\,(\text{Quot.abb.}) = I = \mathrm{Bild}\,(I \hookrightarrow A)$,
⌞ $\mathrm{Kern}\,(A/I \to 0) = A/I = \mathrm{Bild}\,(\text{Quot.abb.})$

Andererseits ist $0 \to I \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} B \to 0$ lesbar als:
$I \lhd A$ und $A/I \cong B$

⌜denn α ist injektiv und I kann also mit dem Ideal $\alpha(I) = \mathrm{Kern}\,\beta$
⌞ identifiziert werden. Weiterhin ist β surjektiv und $\beta(A) \cong A/\mathrm{Kern}\,\beta$.

Kurze exakte Sequenzen sind die griffige Sprache für das Studium von Idealen und Quotienten von C^*-Algebren. (insbesondere: K-Theorie)