§ 7 Definition Von-Neumann-Algebren

7.1 Bemerkung: Man könnte C^*-Algebren wie folgt definieren:
Eine C^*-Algebra ist eine *-Unteralgebra von $\mathcal{L}(H)$, die bzgl. der Normtopologie abgeschlossen ist. Nach 3.3 ist eine so definierte C^*-Algebra auch eine C^*-Algebra im Sinne von Def. 3.1. Nach 6.15 ist jedoch auch jede nach 3.1 definierte C^*-Algebra isomorph zu einer norm-abgeschlossenen *-Unteralgebra von $\mathcal{L}(H)$.
Die Definitionen sind also äquivalent (daher „Fundamentalsatz").
Auf $\mathcal{L}(H)$ gibt es jedoch auch noch andere Topologien. Was ist, wenn wir einen anderen Abschluss einer *-Unteralgebra wählen?

7.2 Definition: Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in $\mathcal{L}(H)$, $x \in \mathcal{L}(H)$.

(a) (x_λ) konvergiert in Norm gegen x, falls $\|x_\lambda - x\| \to 0$, $\lambda \to \infty$.

(b) (x_λ) konvergiert stark gegen x, falls $\|x_\lambda\xi - x\xi\| \to 0$, $\lambda \to \infty$ $\forall \xi \in H$.

(c) (x_λ) konvergiert schwach gegen x, falls $\langle x_\lambda\xi - x\xi, \eta\rangle \to 0$ $\forall \xi,\eta \in H$.

7.3 Definition: Sei $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine *-Unteralgebra mit $1_{\mathcal{L}(H)} \in A$. Ist A abgeschlossen in der starken Operatortopologie (7.2(b)), so heißt A Von-Neumann-Algebra.

7.4 Bemerkungen: (a) Die Topologien unter 7.2 verhalten sich recht verschieden. Während die Normtopologie ((a)) von einer Norm kommt, kommen die starke und die schwache Operatortopologie ((b) und (c)) von Halbnormen $p_\xi(x) := \|x\xi\|$ bzw. $p_{\xi,\eta}(x) := \langle x\xi,\eta\rangle$, sind also lokalkonvexe Topologien.
Während für die Normtopologie Addition, Multiplikation, Involution und Norm ($x \mapsto \|x\|$) stetig sind, gilt für die anderen beiden:

- Addition: immer stetig (gilt für alle lokalkonvexen Topologien)
- Multiplikation: nicht stetig, d.h. $\begin{matrix} x_\lambda \to x \\ y_\lambda \to y \end{matrix} \not\Rightarrow x_\lambda y_\lambda \to xy$

  Aber $x_\lambda \to x \Rightarrow x_\lambda y \to xy,\ y x_\lambda \to yx$ in (b) und (c)

  und $\begin{matrix} x_\lambda \to x \\ y_\lambda \to y \end{matrix},\ \|x_\lambda\|, \|y_\lambda\| \le C \ \forall \lambda \Rightarrow x_\lambda y_\lambda \to xy$ in (b)
- Involution: nicht stetig in (b), stetig in (c).
- Norm: $x \mapsto \|x\|$ nicht stetig in (b) und (c)

(b) $x_\lambda \to x$ in Norm $\Rightarrow x_\lambda \to x$ stark $\Rightarrow x_\lambda \to x$ schwach

Also: $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ schwach abgeschlossen $\Rightarrow A$ stark abgeschlossen $\Rightarrow A$ in Norm-topol. abgeschlossen

Insb.: $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ Von-Neumann-Algebra $\Rightarrow A$ C^*-Algebra.

7.5 Beispiele: (a) $\mathcal{L}(H)$ ist eine VN-Algebra.

(b) $L^\infty(X,\mu)$ ist eine VN-Algebra, mit X kompakt, μ endliches Borelmaß auf X. Und kommutative VN-Algebra $\cong L^\infty$ (Details §10)

Also: C^*-Algebra $\hat{=}$ nichtkommutative Topologie (via $X \mapsto \mathcal{C}(X)$)

VN-Algebra $\hat{=}$ nichtkommutative Maßtheorie (via $X \mapsto L^\infty(X,\mu)$)

($L^\infty(X,\mu) := \{f : X \to \mathbb{C}$ beschränkt, messbar$\}$)

7.6 Definition: Sei $S \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine Teilmenge. Die Kommutante von S ist definiert durch $S' := \{y \in \mathcal{L}(H) \mid xy = yx \ \forall x \in S\}$.

7.7 Lemma: (a) S' ist schwach abgeschlossene unitale Algebra.

(b) Gilt $S = S^*$ (d.h. $x \in S \Rightarrow x^* \in S$), so ist $S' \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine VN-Algebra.

(c) Es gilt $S \subseteq S''$ und $S \subseteq T \Rightarrow T' \subseteq S'$, $S''' = S'$.

Beweis: Übung.

7.8 Drchtensatz von von Neumann: Sei $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ $*$-Unteralgebra mit 1.

Dann sind äquivalent: (i) $A = A''$ (algebraische Form)

(ii) A ist stark abgeschlossen (analytische Form)

(iii) A ist schwach abgeschlossen (")

Insbesondere gilt also $A = A''$ für jede VN-Algebra und für eine Teilmenge $S \subseteq \mathcal{L}(H)$ ist $vN(S) := (S \cup S^*)'' \subseteq \mathcal{L}(H)$ die von S erzeugte VN-Algebra (also die kleinste VN-Algebra, die S enthält).

Beweis: (i)$\Rightarrow$(iii): 7.7(a), (iii)$\Rightarrow$(ii): 7.4(b).

(ii)$\Rightarrow$(i): Nach 7.7(c) ist $A \subseteq A''$. Sei also $x \in A''$.

bzz: $\forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall \xi_1, \dots, \xi_n \in H\ \exists z \in A: \|z\xi_i - x\xi_i\| < \varepsilon$ für $i = 1, \dots, n$

(denn ex. $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in A mit $x_\lambda \to x$ stark $\Rightarrow x \in A$, also $A \subseteq A''$ stark dicht)

1.) $n=1$. Sei $x \in A''$, $\xi \in H$. Betrachte $K := \overline{\{z\xi \mid z \in A\}} \subseteq H$ abgeschl. Teilraum mit $\xi \in K$ (für $z = 1 \in A$). Sei P_K die Projektion auf K. Für $a \in A$ ist $aK \subseteq K$ und $a^*K \subseteq K \overset{\text{Blatt 2, A2}}{\Longrightarrow} aP_K = P_K a \overset{\forall a \in A}{\Longrightarrow} P_K \in A' \overset{x \in A''}{\Longrightarrow} xP_K = P_K x$

$\Rightarrow x\xi = xP_K\xi = P_K x\xi \in K$, dh. zu $\varepsilon > 0$ ex. $z \in A$ mit $\|z\xi - x\xi\| < \varepsilon$.

2.) n beliebig. Betrachte $H_n := \underbrace{H \oplus \dots \oplus H}_{n\text{-mal}}$ und $\varphi: \mathcal{L}(H) \hookrightarrow \mathcal{L}(H_n)$ injektiv, $x \mapsto \begin{pmatrix} x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x \end{pmatrix}$.

Also ist $\varphi(A) \subseteq \mathcal{L}(H_n)$ eine $*$-Unteralgebra mit 1, die stark abgeschlossen ist.

Nach 1.) ex. also zu $\varepsilon > 0$, $\xi := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in H_n$ und $\varphi(x) \in \varphi(A'') \subseteq \varphi(A)''$ ein $\varphi(z) \in \varphi(A)$ mit $\underbrace{\|\varphi(z)\xi - \varphi(x)\xi\|}_{\geq \max_{1 \le i \le n} \|z\xi_i - x\xi_i\|} < \varepsilon$. $\quad (\|\eta\|_{H_n}^2 = \sum_{i=1}^n \|\eta_i\|_H^2)$ $\square$

7.9 Bemerkungen: (a) Von-Neumann-Algebren sind abgeschlossen unter messbaren Funktionalkalkül, dh. $x \in A$ normal, $f: \mathrm{Sp}\,x \to \mathbb{C}$ beschränkt, messbar $\Rightarrow f(x) \in A$ $\quad [(f_n) \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,x), f_n \to f$ beschränkt, punktweise $\Rightarrow \underset{\in A}{f_n(x)} \xrightarrow{\text{schwach}} f(x)]$

Somit gibt es – im Gegensatz zu C*-Algebren – viele Projektionen in VN-Algebren, per $\chi_B(x)$, wobei $\chi_B: \mathrm{Sp}\,x \to \mathbb{C}$ charakteristische Fkt.

Da jede stetige Funktion in Norm durch Treppenfunktionen angenähert werden kann, kann jedes Element $x = x^* \in A$ durch Linearkombinationen von Projektionen approximiert werden. Linearkombinationen von Projektionen sind also $\|\cdot\|$-dicht in VN-Algebren.

(Es gibt C*-Algebren, in denen es außer 0 und 1 keine Projektionen gibt!)

(b) Sei $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine VN-Algebra und $x \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt
$x \in A \iff ux = xu \ \forall u \in A'$ unitär

Denn für „$\Leftarrow$": Jedes Element einer VN-Algebra (hier also A') lässt sich als Linearkombination von unitären Elementen darstellen. (sei $z \in B$ selbstadjungiert, $-1 \leq z \leq 1$. $u := z + i\sqrt{1-z^2}$, $z = \frac{1}{2}(u+u^*)$)
Also gilt $yx = xy \ \forall y \in A' \Rightarrow x \in A'' = A$.

(c) Sei $x \in A \subseteq \mathcal{L}(H)$, A eine VN-Algebra, $x = v|x|$ die Polarzerlegung. Dann gilt $|x|, v \in A$ (in C^*-Algebren: $|x| \in A$, aber $v \notin A$ i.A.)

(d) Nach 7.7(b) ist für $S \subseteq \mathcal{L}(H)$ Teilmenge $vN(S) := (S \cup S^*)''$ die kleinste VN-Algebra, die S enthält.

(e) VN-Algebren sind größer als C^*-Algebren:
Sei $F := \{\xi \mapsto \langle \xi, \eta \rangle \zeta \mid \eta, \zeta \in H\} \subseteq \mathcal{L}(H)$ die Menge der Rang-1-Operatoren (Bild ist eindimensional). Dann gilt:

$$\underbrace{*\text{-Alg}(F)}_{=\{\text{endliche Rang-Operatoren}\}} \subsetneq \underbrace{C^*(F)}_{=\mathcal{K}(H)} \subsetneq vN(F) = \mathcal{L}(H)$$

Ist $S: \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$, $e_n \mapsto e_{n+1}$ der einseitige Shift, so gilt

$$\mathcal{K}(H) \subsetneq C^*(S) \subsetneq vN(S) = \mathcal{L}(H).$$

Als VN-Algebra wird $\mathcal{L}(H)$ also von einem einzigen Element erzeugt.

(f) VN-Algebren sind häufiger isomorph (typischerweise: sehr oft).
A, B C^*-Algebren $\quad A \cong B \underset{\not\Leftarrow \text{ i.A.}}{\Rightarrow} A'' \cong B'' = vN(B)$

7.10 <u>Definition</u>: Sei $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine VN-Algebra.
(a) $Z(A) := A \cap A' \subseteq \mathcal{L}(H)$ heißt <u>Zentrum von A</u> (kommutative VN-Alg.).
(b) Gilt $Z(A) = \mathbb{C}1$, so heißt A ein <u>Faktor</u>. ($\mathbb{C}1 \subseteq Z(A)$ gilt immer)

7.11 <u>Beispiel</u>: $\mathcal{L}(H)$ ist ein Faktor, denn $\mathcal{L}(H)' = \mathbb{C}1$.