§ 8 Projektionen in VN-Algebren

8.1 Def: $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ VN-Algebra, $e, f \in A$ Projektionen ($e = e^* = e^2$).

(a) $e \sim f :\Leftrightarrow \exists u \in A : u^*u = e,\ uu^* = f$ „Murray-von-Neumann-äquivalent"

(b) $e \prec f :\Leftrightarrow \exists g \in A$ Projektion: $e \sim g \leq f$

8.2 Bemerkung: (a) u mit $u^*u = e$ Projektion ist eine partielle Isometrie (siehe Blatt 2: $uu^*u = u \Leftrightarrow u^*u$ Proj. $\Leftrightarrow uu^*$ Proj.)

(b) $g \leq f$ bedeutet $f - g \geq 0$ oder besser: $gf = g$. Blatt 6, A3:
$f - g \geq 0 \Leftrightarrow gf = g \Leftrightarrow fg = g \Leftrightarrow gH \subseteq fH$

(c) Die Relationen $\sim$ und $\prec$ sind relativ zu A. Es kann $e \sim f$ in $\mathcal{L}(H)$ gelten und $e \not\sim f$ in $A \subsetneq \mathcal{L}(H)$, nämlich wenn $u \notin A$. (Blatt 7)

(d) Für $A = \mathcal{L}(H)$ ist $e \sim f \Leftrightarrow \dim eH = \dim fH$
$e \prec f \Leftrightarrow \dim eH \leq \dim fH$ (Blatt 7)

(e) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, $\prec$ eine Ordnungsrelation (Blatt 7)
($e \sim e$, $e \sim f \Leftrightarrow f \sim e$, $e \sim f \sim g \Rightarrow e \sim g$; $e \prec e$, $e \prec f \prec g \Rightarrow e \prec g$)

8.3 Proposition: $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ VN-Algebra, $(e_i)_{i \in I}$ paarweise orthogonale Projektionen in A (dh. $e_i e_j = 0$ für $i \neq j$), ebenso $(f_i)_{i \in I}$.

(a) $\sum_{i \in I} e_i$ konvergiert im Sinne der starken Operatortopologie gegen eine Projektion.

(b) $e_i \sim f_i \ \forall i \in I \Rightarrow \sum_{i \in I} e_i \sim \sum_{i \in I} f_i$

(c) $e_i \prec f_i \ \forall i \in I \Rightarrow \sum_{i \in I} e_i \prec \sum_{i \in I} f_i$

Beweis: (a) Seien $K_i \subseteq H$ die Räume, auf die die e_i projizieren, $K := \bigoplus_{i \in I} K_i \subseteq H$.
Sei e die Projektion auf K. Es gilt für $\xi \in H$: $\sum_{i \in I} \underbrace{e_i \xi}_{\in K_i}$ konvergiert gegen ein Element in K.

(b) Seien $u_i \in A$ mit $u_i^* u_i = e_i$, $u_i u_i^* = f_i$. Definiere $u \in \mathcal{L}(H)$ durch $u_{|e_iH} := u_i$, $u_{|(\oplus e_iH)^\perp} := 0$. Also $u : \oplus e_iH \to \oplus f_iH$ partielle Isometrie mit u^*u Proj. auf $\oplus e_iH$, genauso wie $\sum e_i$, ebenso $uu^* = \sum f_i$. bzw. $u \in A$.
Sei $w \in A'$ unitär. Dann $wu_{|e_iH} = wu_{i|e_iH} \overset{w \in A'}{=} u_i w_{|e_iH} \overset{we_i = e_i w}{=} uw_{|e_iH}$ $\forall i$
$\Rightarrow wu = uw \Rightarrow u \in A'' = A$.

(c) $\sum e_i \sim \sum g_i \leq \sum f_i$

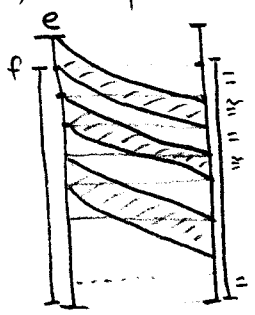
$\square$

8.4 Proposition: $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ VN-Algebra, $e, f \in A$ Projektionen. Dann gilt:

$$e \sim f \iff e \prec f \text{ und } f \prec e$$

Beweis: „$\Rightarrow$" $e \sim f \Rightarrow e \sim f \leq f$, d.h. $e \prec f$. Ebenso $f \prec e$.

„$\Leftarrow$" 1.) Sei $f \leq e$ und $e \prec f$, d.h. $\exists v \in A : v^*v = e,\ vv^* \leq f$.



Zerlege $eH = (e-f)H \oplus (f-vv^*)H \oplus (v(e-f)v^*)H \oplus \dots \oplus Y$

$\cong$ $\cong$

$fH = (f-vv^*)H \oplus (v(e-f)v^*)H \oplus (v(f-vv^*)v^*)H \oplus \dots \oplus Y$

mit $v(e-f)v^* = ve v^* - vfv^* = vv^*vv^* - vfv^*$
$= vv^* - vfv^*$

und $vfv^* \leq vv^*$, denn $(vfv^*)(vv^*) = vfv^*$.

Dann 8.3(5). (Induktion: $v^n(e-f)v^{*n}$, $v^n(f-vv^*)v^{*n}$)

2.) $f \sim f' \leq e$, $e \prec f \sim f' \Rightarrow f' \leq e$ und $e \prec f' \overset{1.)}{\Rightarrow} f \sim f' \sim e$. □

8.5 Satz: $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ Faktor. Dann gilt $e \prec f$ oder $f \prec e$.

Beweis: ") o.E. $e, f \neq 0$.

1.) $fAe \neq 0$.

[Bew. von 1.): $K := \overline{AeH} \subseteq H$ erfüllt $AK \subseteq K \overset{B2,A2}{\Rightarrow} P_K \in A'$

Ebenso $A'K \subseteq K \Rightarrow P_K \in A'' = A$. Also $P_K \in A' \cap A = \mathbb{C}1$, d.h. $P_K \in \{0,1\}$

$\Rightarrow K = 0$ oder $K = H$. Da $1 \in A$, $e \neq 0$ ist $K = H$. Dann $f\overline{AeH} \neq 0$.

2.) $\exists e_1, f_1 \in A$ Proj. mit $e_1, f_1 \neq 0$, $e_1 \leq e$, $f_1 \leq f$, $e_1 \sim f_1$

[Bew. von 2.): Sei $z \in A$ mit $x := fze \neq 0$. Also $fx = x$, $xe = x$.

Sei $x = u|x|$ die Polarzerlegung, $e_1 := u^*u$, $f_1 := uu^*$.

Dann $uu^* \leq f$, da u part. Isom. auf $\mathrm{Bild}\,x$ und $\mathrm{Bild}\,x \subseteq fH$ wg. $fx = x$.

3.) Sei $(e_i, f_i)_{i \in I}$ Familie mit $e_i \leq e$, $f_i \leq f$, (e_i) paarweise orth., (f_i) paarweise orth., $e_i \sim f_i$.

Maximal nach Zorn. Dann $e' := \sum e_i \leq e$, $f' := \sum f_i \leq f$, $e' \sim f'$.

Dann $e = e'$ oder $f = f'$ (sonst e.r. nach 2.) $0 \neq g \leq e - e'$, $0 \neq h \leq f - f'$, $g \sim h$) □

8.6 Bemerkung: $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ kein Faktor, dann 8.5 falsch.

Ist A bspws. kommutativ, so ist $\underset{u^*u}{e} \sim \underset{uu^*}{f} \Rightarrow e = f$ und $e \prec f \Rightarrow e \leq f$.

Also $e \prec f$ oder $f \prec e$ bedeutet hier $e \leq f$ oder $f \leq e$.

Das ist falsch für $f := 1 - e$, $e \neq 0$.

8.7 Korollar: $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ Faktor, $e, f \in A$ Proj.

Dann ex. $(e_i)_{i\in I}$, e_i paarweise orth., $e_i \sim e$ und $r \prec e$, $r \not\sim e$, so dass $f = \sum_{i\in I} e_i + r$ (teilen mit Rest). Für $|I| = \infty$ ist $r = 0$ möglich.

Beweis: Sei $(e_i)_{i\in I}$ nach Zorn maximal mit $e_i \sim e$, $e_i \leq f$, e_i paarweise orth.

Setze $r := f - \sum_{i\in I} e_i$. Nach 8.6: $r \prec e$

($e \prec r$ ergäbe $e \sim g \leq r$, also $(e_i) \cup \{g\} \supsetneq (e_i)$)

und $r \not\sim e$ (sonst wieder $e \prec r$). $\square$

8.8 Def.: Sei A eine Von-Neumann-Algebra, $e \in A$ eine Projektion.

(a) $e \neq 0$ heißt minimal, falls für jede Projektion $f \in A$ mit $f \leq e$ gilt: $f = 0$ oder $f = e$.

(b) e heißt endlich, falls $e \sim f \leq e$ impliziert: $f = e$.

8.9 Bemerkung: (a) Für $A = \mathcal{L}(H)$ ist

e minimal $\Leftrightarrow$ e Rang-1-Projektion

e endlich $\Leftrightarrow$ eH endlich-dimensional

(b) e minimal $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ e endlich $\left[e \sim f \leq e \overset{8.1(a)}{\Rightarrow} f = 0 \text{ oder } f = e \text{ oder } f \sim e \neq 0 \right]$

(c) e minimal $\Leftrightarrow$ $eAe = \mathbb{C}e$

8.10 Def.: Sei $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine Faktor.

A ist vom Typ I $:\Leftrightarrow$ $\exists e \in A$ minimale Projektion

A ist vom Typ II $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \exists\, e \in A \text{ endliche Projektion} \\ \nexists\, e \in A \text{ minimale Projektion} \end{cases}$

A ist vom Typ III $:\Leftrightarrow$ $\nexists\, e \neq 0 \in A$ endliche Projektion