

§9 Typ I Faktoren

9-1

9.1 Satz: $A \in \mathcal{L}(H)$ ist ein Typ I Faktor genau dann, wenn es einen Isomorphismus $\varphi: H \rightarrow H_1 \otimes H_2$ in H -Beträumen gibt, so dass $\varphi(A) = \mathcal{L}(H_1) \otimes 1$ und $\varphi(A') = 1 \otimes \mathcal{L}(H_2)$.

Mit anderen Worten: A Typ I $\Leftrightarrow A \cong \mathcal{L}(H_1)$ für ein $H \cong H_1$

Beweis: In $\mathcal{L}(H)$ gibt es eine minimale Projektion (z.B. auf $e_1, (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ONB).

Bleibt also zu zeigen, dass jeder Typ I Faktor in dieser Gestalt ist.

Sei $e \in A$ minimal. Dann gibt es paarweise orthogonale Projektionen $(e_i)_{i \in I} \rightarrow 1$ eine und $1 = \sum_{i \in I} e_i$ (nach 8.7) ($r \leq e \Rightarrow r n e$, da e minimal).

Setze $H_1 := \ell^2(I)$, $H_2 := e H$.

Also $H_1 \otimes H_2$ H -Betraum mit $\langle \sum_{i \in I} \xi_i \otimes \eta_i, \sum_{j \in I} \zeta_j \otimes \gamma_j \rangle := \langle \sum_{i \in I} \xi_i, \sum_{j \in I} \zeta_j \rangle_{H_1} \langle \sum_{i \in I} \eta_i, \sum_{j \in I} \gamma_j \rangle_{H_2}$

und dessen sesquilineare Fortsetzung $(\sum_{i \in I} \xi_i \otimes \eta_i \in H_1 \otimes H_2)$

und Vollständigkeit. Ist nun $(\xi_i)_{i \in I}$ ONB in H_1 und $(\eta_j)_{j \in J}$

ONB in H_2 , so ist $(\xi_i \otimes \eta_j)_{(i,j) \in I \times J}$ ONB in $H_1 \otimes H_2$ und

$$H_1 \otimes H_2 \cong \bigoplus_{i \in I} (\xi_i \otimes H_2) \cong H_2$$

$$\text{In unserem Fall also } H = \bigoplus_{i \in I} e_i H \cong \bigoplus_{i \in I} (\xi_i \otimes e H) \cong H_1 \otimes H_2$$

$$\text{per } \begin{matrix} \xi_i \otimes e_i H \xrightarrow{t_i} \xi_i \otimes e H \\ \eta_j \mapsto \xi_j \otimes \eta_j \end{matrix} \quad (t_i^* t_i = e_i, t_i t_i^* = e)$$

$$\text{Nun ist } t_j^* \times t_i = t_j^* \underbrace{t_j t_j^*}_{=e} \times \underbrace{t_i t_i^*}_{=e} t_i = \delta_{ij} t_j^* t_i \text{ für ein } \delta_{ij} \in \mathbb{C}$$

Also ist $x \in \mathcal{L}(\bigoplus_{i \in I} e_i H)$ eine Matrix $(\delta_{ij})_{i,j \in I} \in \mathcal{L}(\ell^2(I))$, d.h. $x \in \mathcal{L}(H_1) \otimes 1$.

9.2 Def: Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ Typ I Faktor.

A ist Typ I_n: $\Leftrightarrow A \cong \mathcal{L}(H_1)$, da $H_1 = n$

A ist Typ I_∞: $\Leftrightarrow A \cong \mathcal{L}(H_1)$, da $H_1 = \infty$

□