§ 10 Typ II Faktoren

10.1 Lemma: Sei A ein Typ II Faktor, $e, f \in A$ Projektionen.

(a) f endlich, $e < f \Rightarrow e$ endlich (sogar in bel. vNAlg.)

(b) e, f endlich, $ef = 0 \Rightarrow e+f$ endlich (sogar in bel. vNAlg.)

(c) $0 \neq e$ endlich $\Rightarrow \exists\, 0 \neq e' \in A$ endlich mit $[e/e'] \geq 2$
wobei $[f/e] := |I|$ für $f = \sum_I e_i + r$ wie in 8.7

(d) Es gibt eine Fundamentalfolge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, d.h. endliche Projektionen mit $[e_n/e_{n+1}] \geq 2$.

(e) e, f endlich, $e \neq 0$, sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Fundamentalfolge $\Rightarrow \dfrac{[f/e_n]}{[e/e_n]} \longrightarrow (f/e) \in \mathbb{R}^+$ konvergiert

Beweisideen: (a) Blatt 7, A2

(b) Wäre $e+f$ unendlich, so gäbe es unendliche Projektionen $g_1, g_2 \in A$ mit $g_1 g_2 = 0$ und $g_1 + g_2 \leq e+f$.
(denn es ex. $v \in A$ mit $v^*v = e+f$, $vv^* \lneqq e+f$, dann $v^n(e+f-vv^*)v^{*n}$ wie in 8.4 betrachten, siehe Blatt 7, A2).
Kann zeigen, dass ein Teil von g_1 oder g_2 unter e oder f liegen müsste, was der Endlichkeit widerspräche (aufwändiges Argument).

(c) e nicht minimal $\Rightarrow \exists\, e_1 \neq 0$ mit $e_1 \lneqq e$, e_1 endlich. Dann $e - e_1 \prec e_1$ oder $e_1 \prec e - e_1$, d.h. $e = e_1 + \underset{\sim e_1}{e_2} + \dots + r$ im letzteren Fall.
Muss noch überprüfen, dass I aus 8.7 endlich und eindeutig ist.

(d) Iteration von (c).

(e) Zeige $[g/f][f/e] \leq [g/e] \leq ([g/f]+1)([f/e]+1)$
für $e, f, g \in A$ endlich mit einfachem Teilen-mit-Rest-Argument.

$$\Rightarrow \frac{[f/e_{i+j}]}{[e/e_{i+j}]} \leq \frac{([f/e_i]+1)([e_i/e_{i+j}]+1)}{[e/e_i][e_i/e_{i+j}]}$$

$$\Rightarrow \limsup_n \frac{[f/e_n]}{[e/e_n]} \leq \liminf_i \frac{[f/e_i]+1}{[e/e_i]}$$

□

10.2 Satz: Sei A ein Faktor. Dann existiert eine, bis auf positives Vielfaches eindeutige Dimensionsfunktion auf A, d.h.

$D : \{\text{Projektionen in } A\} \to [0,\infty]$ mit $D(0)=0$, $D(e) \neq \infty$ für e endlich, $D(e)=\infty$ für e unendlich, $D(e)\neq 0$ für e endlich, $e \sim f \Leftrightarrow D(e)=D(f)$, $ef=0 \Rightarrow D(e+f)=D(e)+D(f)$, $e \prec f \Leftrightarrow D(e)\leq D(f)$.

Beweis: 1.) A Typ I. Also $A \cong \mathcal{L}(H)$ und $D(e) := \dim eH$.

2.) A Typ III. $D(e) := \begin{cases} \infty & e \neq 0 \\ 0 & e = 0 \end{cases}$.

3.) A Typ II. Sei $s=(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Fundamentalfolge und $0\neq e\in A$ endlich. Dann $D(f) := \left(\frac{f}{e}\right)_s$, $D(e)=1$. □

10.3 Korollar: A Faktor, D Dimensionsfunktion.

(a) A Typ I, $A \cong \mathcal{L}(H)$, $\dim H = n \Rightarrow \text{Bild } D = \{0,\dots,n\}$, d.h. A Typ I_n
(falls $D(\text{minimal})=1$)

$\dim H = \infty \Rightarrow \text{Bild } D = \{0,1,\dots,\infty\}$, A Typ I_∞

(b) A Typ II, $D(1)=\infty \Rightarrow \text{Bild } D = [0,\infty]$, A Typ II_∞

$D(1)<\infty \Rightarrow \text{Bild } D = [0, D(1)]$, A Typ II_1

(c) A Typ III $\Rightarrow \text{Bild } D = \{0,\infty\}$

„A endlich"

Beweis für (b): $D(e) \leq D(1)$ $\forall e \in A$ Proj. $\Rightarrow \text{Bild } D \subseteq [0, D(1)]$.

Für Fundamentalfolge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $D(e_{n+1}) \leq \frac{1}{2} D(e_n) \Rightarrow D(e_n) \to 0$.
Also enthält Bild D beliebig kleine Zahlen und für $x \in [0, D(1)]$ ex. $f_1,\dots,f_n \in A$ Proj. mit $x - \frac{1}{2^n} \leq D(f_1)+\dots+D(f_n) \leq x$, f_i paarweise orth.
$\rightsquigarrow$ finde $(f_n) \subseteq A$ mit $D(\sum f_n) = x$. □

10.4 Korollar: Ist A Typ I_n oder II_1, so gibt es eine eind. Spur auf A, d.h. $\tau : A \to \mathbb{C}$ Zustand mit $\tau(ab)=\tau(ba)$ $\forall a,b \in A$.

Umgekehrt: Hat A eine Spur, so ist es Typ I_n oder II_1.

Beweis: I_n: ✓, II_1: $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \in A$ Linearkombination von Projektionen.
$\tau(x) := \sum_{i=1}^n \alpha_i D(f_i)$. Andernfalls: Approximationsargument.

Aufwändiger Beweis für $\tau(ab)=\tau(ba)$. □

10.5 Beispiel: (a) Sei G eine diskrete Gruppe.

$\ell^2(G) := \{a : G \to \mathbb{C} \mid \sum_{x\in G} |a(x)|^2 < \infty\}$ Hilbertraum per $\langle a,b\rangle = \sum_{x,y\in G} a(x)\overline{b(y)}$.

$\lambda : G \to \mathcal{B}(\ell^2(G))$ linksreguläre Darstellung per $\lambda(g)(a)(x) := a(g^{-1}x)$

Bzw. auf ONB $(\delta_g)_{g\in G}$ mit $\delta_g(x) := \begin{cases} 1 & x=g \\ 0 & x\neq g\end{cases}$ ist $\lambda(g)\delta_h = \delta_{gh}$.

$\mathbb{C}G := \{\sum^{\text{endl.}}_{g\in G} \alpha_g g \mid \alpha_g \in \mathbb{C}\}$ Gruppenalgebra mit $(\sum \alpha_g g)(\sum \alpha_h h) = \sum \alpha_g \alpha_h gh$ und $(\sum \alpha_g g)^* = \sum_g \overline{\alpha_g}\, g^{-1}$. Setze $\lambda : \mathbb{C}G \to \mathcal{B}(\ell^2(G))$ fort.

$L(G) := \overline{\lambda(\mathbb{C}G)}^{\text{stark}} \subseteq \mathcal{B}(\ell^2(G))$ Von-Neumann-Algebra mit treuer Spur $\tau(a) := \langle a\delta_e, \delta_e\rangle$ für $e \in G$ neutrales Element.

$L(G)$ ist ein Faktor $\Longleftrightarrow$ G ist icc (infinite conjugacy classes), d.h. $\{ghg^{-1} \mid g\in G\}$ ist unendlich $\forall h \neq e$.

Also $L(G)$ II_1-Faktor, denn $L(G)$ nicht Typ I_n ($|G| = \infty$, (δ_g) l.u.)

Berühmtes Beispiel: $L(\mathbb{F}_n)$, für $\mathbb{F}_n$ freie Gruppe.

Frage: $L\mathbb{F}_n \not\cong L\mathbb{F}_m$ für $n \neq m$? Offen! ($\rightsquigarrow$ freie Wahrscheinlichkeitstheorie)

(b) Eine Von-Neumann-Algebra A heißt *hyperfinit*, falls es endlich-dimensionale Von-Neumann-Algebren $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq A$ und $A = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ (schwach dicht). Jede endlichdimensionale Von-Neumann-Algebra ist von der Form $A_m = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_m}(\mathbb{C})$.

Satz (Murray-von-Neumann): Es gibt nur einen einzigen hyperfiniten II_1-Faktor, der R genannt wird.

Satz (Connes): $L(G)$ hyperfinit $\Leftrightarrow$ G icc und amenabel.