

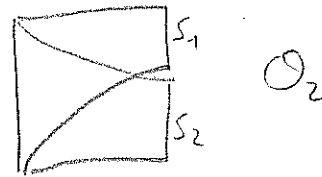
§9 Die Cuntzalgebren O_n

9-1

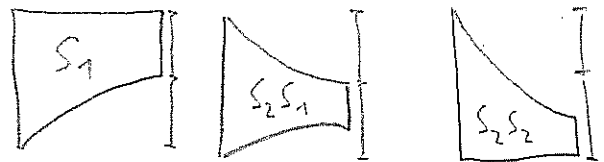
9.1 Def.: Die Cuntzalgebren O_n ist für $2 \leq n < \infty$ definiert als $O_n := C^*(S_1, \dots, S_n \text{ Isometrien} \mid \sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1)$

(Es gibt auch $O_\infty := C^*(S_1, S_2, \dots \text{ Isometrien} \mid \sum_{i=1}^N S_i S_i^* = 1 \quad \forall N)$
 $= C^*(S_1, S_2, \dots \text{ Isometrien} \mid S_i^* S_j = \delta_{ij})$)

9.2 Bemerkung: (a) O_n ist gewissermaßen die Struktur, einen Raum in n Kppen zu zerlegen:



Bzw. in n m. Kppen:



($S_1, S_2 S_1, S_2 S_2$ sind Isometrien $\wedge S_1 S_1^* + (S_2 S_1)(S_2 S_1)^* + (S_2 S_2)(S_2 S_2)^* = 1$)

(b) Die 1977 von Cuntz eingeführten Cuntzalgebren O_n sind erstes ein wichtiges Beispiel von C^* -Algebren, bzw. Gegenbeispiel (zu mehreren damalsigen Fragen), zweitens sind sie jedoch strukturell so wichtig, dass sie sogar zu Bausteinen der Theorie der C^* -Algebren geworden sind. So gibt es z.B. Sätze z.B.

"A separable C^* -Alg. A ist exakt $\Leftrightarrow A \hookrightarrow O_2$ "
 "A $\otimes O_2 \cong O_2 \Leftrightarrow A$ unital, einfach, separabel, nuklear"
 "A sep., nuklear $A \cong A \otimes O_\infty \Leftrightarrow A$ ist rein unendlich"

Kendall
-Phillips

(c) O_n hat außerordentlich schöne Eigenschaften. Eine davon ("rein unendlich"), die "einfach" impliziert, werden wir hier erörtern.

Zunächst studieren wir die algebraische Struktur der Wörter auf $\mathcal{O}_n$.

9.3 Definition: Ein Wort in $\mathcal{O}_n$ ist $s_\mu := s_{i_1} \cdots s_{i_k}$, wobei $\mu = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$. $|\mu| = k$ bezeichnet die Länge des Wortes s_μ , μ heißt Multiindex.

9.4 Lemma: (a) $s_i^\sharp s_j = \delta_{ij} 1$

(b) $|\mu| = |\nu|$, dann $s_\mu^\sharp s_\nu = \delta_{\mu\nu} 1$

(c) $|\mu| < |\nu|$, dann $s_\mu^\sharp s_\nu = \begin{cases} s_\nu & \text{falls } \nu = \mu\nu' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$|\mu| > |\nu|$, dann $s_\mu^\sharp s_\nu = \begin{cases} s_\mu^\sharp & \text{falls } \mu = \nu\mu' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Bew: (a) $i=j$: s_i ist Isometrie, also $s_i^\sharp s_i = 1$

$i \neq j$: $s_i s_i^\sharp + s_j s_j^\sharp \leq \sum_{k=1}^n s_k s_k^\sharp = 1$

$\Rightarrow s_i^\sharp (s_i s_i^\sharp + s_j s_j^\sharp) s_i \leq s_i^\sharp s_i = 1$

"
 $1 + s_i^\sharp s_j s_j^\sharp s_i$

$\Rightarrow s_i^\sharp s_j s_j^\sharp s_i \geq 0$ und $s_i^\sharp s_j s_j^\sharp s_i \leq 0$, also " $= 0$ ".

$\Rightarrow \|s_j^\sharp s_i\|^2 = \|(s_j^\sharp s_i)^\sharp (s_j^\sharp s_i)\| = 0$

(b) $s_\mu^\sharp s_\nu = s_{\mu_k}^\sharp \cdots s_{\mu_1}^\sharp s_{\nu_1} \cdots s_{\nu_k} \stackrel{(a)}{=} \delta_{\mu_k \nu_1} \cdots \delta_{\mu_1 \nu_k} = \delta_{\mu\nu}$

(c) $s_\mu^\sharp s_\nu = (s_{\mu_k}^\sharp \cdots s_{\mu_1}^\sharp s_{\nu_1} \cdots s_{\nu_k}) s_{\nu_{k+1}} \cdots s_{\nu_\ell} \stackrel{(b)}{=} \delta_{\mu\nu'} s_{\nu''}$, $\nu' = (\nu_{k+1}, \dots, \nu_\ell)$, $\nu'' = (\nu_1, \dots, \nu_k)$

9.5 Prop: (a) $\mathcal{F}_n^k := \text{Span}\{s_\mu s_\nu^\sharp \mid |\mu| = |\nu| = k\} \cong M_n^k$ für $k \in \mathbb{N}$

(b) $\text{Span}\{s_\mu s_\nu^\sharp \mid \mu, \nu \text{ beliebig}\} \subseteq \mathcal{O}_n$ dicht

Bew: (a) Setze $e_{\mu\nu} := s_\mu s_\nu^\sharp \in \mathcal{F}_n^k$. Dann $e_{\mu\nu}^\sharp = e_{\nu\mu}$ und

$e_{\mu\nu} e_{\sigma\tau} = s_\mu s_\nu^\sharp s_\sigma s_\tau^\sharp = \delta_{\nu\sigma} e_{\mu\tau}$ nach 9.4(b).

Da $\{\mu \in \{1, \dots, n\}^k\}$ genau n^k Elemente hat, ex.

$M_n^k \rightarrow \mathcal{F}_n^k$ nach 7.6 und ist ein Isomorphismus nach 7.7.

(Beachte: $\mathcal{F}_n^k = C^*(s_\mu s_\nu^\sharp \mid |\mu| = |\nu| = k) \subseteq \mathcal{O}_n$, ist also C^* -Algebra.)

(b) Die Abbildungen in $\mathcal{O}_n$ sind genau der Form $s_\mu s_\nu^\sharp$ nach 9.4

9.5 Lemma: (a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann $\sum_{\substack{\delta \text{ Multiindex} \\ |\delta| = k}} S_\delta S_\delta^\# = 1$

(b) Für $0 \leq k$ ist $\mathcal{F}_0^\eta \subseteq \mathcal{F}_k^\eta$

Beweis: (a) $\sum_{|\delta|=k} S_\delta S_\delta^\# = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_{k-1}=1}^n \left(\sum_{i_k=1}^n S_{i_1} \dots S_{i_{k-1}} S_{i_k} S_{i_k}^\# S_{i_{k-1}}^\# \dots S_{i_1}^\# \right)$

$\left(\sum_{i_k=1}^n S_{i_k} S_{i_k}^\# = 1 \right) \rightarrow \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_{k-1}=1}^n S_{i_1} \dots S_{i_{k-1}} S_{i_{k-1}}^\# \dots S_{i_1}^\#$

$= \dots = \sum_{i_1=1}^n S_{i_1} S_{i_1}^\# = 1$

(b) Sei $S_\mu S_\nu^\# \in \mathcal{F}_k^\eta$, $|\mu| = |\nu| = k$. Dann ist

$S_\mu S_\nu^\# = \sum_{\delta, |\delta|=k-1} S_\mu S_\delta S_\delta^\# S_\nu^\#$ und $S_\mu S_\delta S_\delta^\# S_\nu^\# \in \mathcal{F}_k^\eta$

L

9.6 Lemma: Seien μ und ν Multisetses $\rightarrow |\mu| \neq |\nu|$ und $|\mu|, |\nu| \leq k$. Dann ist $S_\mu^\pm (S_\nu S_\nu^\pm) S_\mu = 0$ für $S_\mu = S_1^k S_2$.

Bew: $S_\mu^\pm S_\mu = S_2^\pm \underbrace{S_1 \dots S_1}_{k-|\mu|} \underbrace{S_1^\pm \dots S_1^\pm}_{|\mu|} S_\mu \stackrel{9.4}{=} \delta_{\mu, (1, \dots, 1)} S_2^\pm S_1^{\pm k-|\mu|}$
 $S_\nu^\pm S_\nu = S_\nu^\pm \underbrace{S_1 \dots S_1}_{|\nu|} \underbrace{S_1 \dots S_1}_{k-|\nu|} S_2 \stackrel{9.4}{=} \delta_{\nu, (1, \dots, 1)} S_1^{k-|\nu|} S_2$
 $\Rightarrow S_\mu^\pm (S_\nu S_\nu^\pm) S_\mu = \delta_{\mu, (1, \dots, 1)} \delta_{\nu, (1, \dots, 1)} S_2^\pm S_1^{\pm k-|\mu|} S_1^{k-|\nu|} S_2$
 $= \delta_{\mu, (1, \dots, 1)} \delta_{\nu, (1, \dots, 1)} S_2^\pm S_1^a S_2 \quad \text{mit } a = |\mu| - |\nu| \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
 $= 0$

L

9.7 Lemma: Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ex. eine Isometrie $w \in \mathcal{O}_n$, so dass

(i) $w x = x w \quad \forall x \in \mathbb{F}_k^n$

(ii) $w^\pm S_\mu S_\nu^\pm w = \begin{cases} S_\mu S_\nu^\pm & \text{falls } |\mu| = |\nu| \\ 0 & \text{falls } |\mu| \neq |\nu| \end{cases} \quad \forall |\mu|, |\nu| \leq k$

Bew: Setze $w := \sum_{\delta, |\delta|=k} S_\delta S_\gamma S_\delta^\pm$, wenn $S_\gamma := S_1^{2k} S_2$.

Dann $w^\pm w = \sum_{\delta, \varepsilon \text{ mit } |\delta|=|\varepsilon|=k} S_\delta S_\gamma^\pm S_\varepsilon^\pm S_\gamma S_\varepsilon^\pm = \sum_{\delta, |\delta|=k} S_\delta S_\gamma^\pm S_\gamma S_\delta^\pm \stackrel{9.5b}{=} 1$

$= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_k=1}^n S_{i_1} \dots S_{i_{k-1}} S_{i_k}^\pm \dots S_{i_n}$
 $\left(\sum_{i_k=1}^n S_{i_k} S_{i_k}^\pm = 1 \right) \Rightarrow \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_{k-1}=1}^n S_{i_1} \dots S_{i_{k-1}} S_{i_{k-1}}^\pm \dots S_{i_n}$
 $= \dots = \sum_{i_1=1}^n S_{i_1} S_{i_1}^\pm = 1$

(i) Sei $x = S_\mu S_\nu^\pm$, $|\mu| = |\nu| = k$. Dann

$w S_\mu = \sum_{\delta, |\delta|=k} S_\delta S_\gamma S_\delta^\pm S_\mu = S_\mu S_\gamma, \quad S_\nu^\pm w = \sum_{\delta, |\delta|=k} S_\nu^\pm S_\gamma S_\delta^\pm S_\delta = S_\nu^\pm S_\gamma$

Also $w S_\mu S_\nu^\pm = S_\mu S_\gamma S_\nu^\pm = S_\mu S_\nu^\pm w$.

(ii) Seien $|μ|, |ν| ≤ k$.

1. Fall: $|μ| = |ν| = k$. Dann $ω^{\frac{1}{2}} S_μ S_ν^{\frac{1}{2}} ω \stackrel{(i)}{=} ω^{\frac{1}{2}} S_μ S_ν^{\frac{1}{2}} = S_μ S_ν^{\frac{1}{2}}$ a.5b

2. Fall: $|μ| = |ν| < k$. Dann $S_μ S_ν^{\frac{1}{2}} = \sum_{\substack{ε, |ε| = k-|μ|}} S_μ S_ε S_ε^{\frac{1}{2}} S_ν^{\frac{1}{2}}$, da $\sum_{\substack{ε, |ε| = k-|μ|}} S_ε S_ε^{\frac{1}{2}} \stackrel{!}{=} 1$ a.5b

Aber $S_μ S_ε S_ε^{\frac{1}{2}} S_ν^{\frac{1}{2}} \in F_k$, also $ω^{\frac{1}{2}} S_μ S_ν^{\frac{1}{2}} ω = S_μ S_ν^{\frac{1}{2}}$ und 1. Fall.

3. Fall: $|μ| \neq |ν|$. Dann $ω^{\frac{1}{2}} S_μ S_ν^{\frac{1}{2}} ω = \sum_{\substack{ε, δ \\ |ε| + |δ| = k}} S_δ S_δ^{\frac{1}{2}} S_δ^{\frac{1}{2}} S_μ S_ν^{\frac{1}{2}} S_ε S_ε^{\frac{1}{2}} = 0$.
 (denn $S_δ S_μ S_ν^{\frac{1}{2}} S_ε \stackrel{a.4}{=} S_μ S_ν^{\frac{1}{2}}$ mit $|μ'|, |ν'| \leq k, |μ'| \neq |ν'|$) $\xrightarrow{\text{noch 9.6}}$

L

9.8 Prop.: Es gibt eine triviale Erwartung $\varphi: \mathcal{O}_n \rightarrow F^n$

$$\text{mit } \varphi(S_μ S_ν^{\frac{1}{2}}) = \begin{cases} S_μ S_ν^{\frac{1}{2}} & \text{falls } |μ| = |ν| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{also } F^n := \overline{\text{span}} \{ S_μ S_ν^{\frac{1}{2}} \mid k \in \mathbb{N} \} = \overline{\text{span}} \{ S_μ S_ν^{\frac{1}{2}} \mid |μ| = |ν| \}.$$

Bew: Für $\zeta \in S^1$ ist $\varphi_{\zeta}: \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n$ gegeben durch $\varphi_{\zeta}(S_i) = \zeta S_i$

ein Automorphismus, (φ_{ζ} un. und das univ. Eig., $\varphi_{\zeta} \circ \varphi_{\bar{\zeta}} = \varphi_{\bar{\zeta}} \circ \varphi_{\zeta} = \text{id}_{\mathcal{O}_n}$)

Für $x \in \mathcal{O}_n$ ist $f_x: S^1 \rightarrow S^1$ normstetig.
 $\zeta \mapsto \varphi_{\zeta}(x)$

$$(\text{s. 8.9 und Lemma } \varphi_{\zeta}(S_μ S_ν^{\frac{1}{2}}) = \zeta^{|μ|-|ν|} S_μ S_ν^{\frac{1}{2}})$$

$$\text{Also ex. } \varphi(x) = \int_0^1 f_x(e^{2\pi i t}) dt = \int_0^1 \varphi_{e^{2\pi i t}}(x) dt \leftarrow \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n f_x(e^{2\pi i t_j}) \quad (\text{s. 8.9})$$

und ist positiv, linear, unital und tra.

$$\text{Außerdem } \varphi(S_μ S_ν^{\frac{1}{2}}) = \left(\int_0^1 e^{2\pi i t(|μ|-|ν|)} dt \right) S_μ S_ν^{\frac{1}{2}} = \delta_{|μ|, |ν|} S_μ S_ν^{\frac{1}{2}},$$

L Also gilt auch $\varphi^2 = \varphi$.

Die Erwartung aus 9.8 kann blat sogar abstrakter beschrieben werden. Das ist eine starke Eigenschaft, die schon bei φ zum Beweis der Einfachheit geführt hat.

9.9 Lemma: Sei $k \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in \text{Span}\{S_\mu S_\nu^* \mid |\mu|, |\nu| \leq k\}$ gilt dann $\varphi(x) = W^* x W \in F_k^n$ für W aus 9.7.

Bew: $|\mu|, |\nu| \leq k$. Dann $\varphi(S_\mu S_\nu^*) = \begin{cases} S_\mu S_\nu^* & \text{falls } |\mu| = |\nu| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \xleftarrow{9.7} W^*(S_\mu S_\nu^*)W \in F_{|\mu|}^n$
 $\mathbb{C}$ und $F_\ell^n \subseteq F_k^n$, $\ell \leq k$, s. 9.5b. 9.8

9.10 Definition: Sei A eine unitäre C^* -Algebra. A heißt rein unendlich (purely infinite), falls es zu jedem $0 \neq x \in A$ Elemente $a, b \in A$ gibt, so dass $axb = 1$.

9.11 Bemerkung: (a) A rein unendlich $\Rightarrow A$ ist einfach

(Sei $0 \neq I \triangleleft A$, also ex. $0 \neq x \in I$. Dann aber $1 = axb \in I$)

(b) Der Begriff „rein unendlich“ kommt aus der Theorie der von-Neumann-Algebren und besagt: Eine von-Neumann-Algebra M ist rein unendlich bzw. Typ III, falls M keine endliche Projektionen besitzt (p endl., falls $p \sim q \in P \Rightarrow p = q$).

Typ III - von-Neumann-Algebren sind Bausteine in der Theorie der von-Neumann-Algebren. (Bis hereditär, falls $0 \leq a \leq b, b \in B \Rightarrow a \in B$)

Für einfache C^* -Algebren A ist äquivalent:

A ist rein unendlich $\Leftrightarrow$ Jede hereditäre C^* -Unteralgebra von A besitzt eine unendliche Projektion.

Sei nun A rein unendlich. Angenommen A besitzt eine endliche Projektion p . Dann ist $pAp \subseteq A$ hereditär und besitzt eine unendliche Projektion $q \in pAp$, d.h. $q \in p \Rightarrow p$ unendlich sch.

9.12 Satz: O_n ist rein unendlich für $2 \leq n < \infty$ (und $n = \infty$).

Bew. Sei $0 \neq x \in O_n$, dann ist $x^*x \neq 0$ und also

$\varphi(x^*x) \neq 0$, o.E. $\|\varphi(x^*x)\| = 1$. Nach 9.5(b) ex.

$y \in \text{Span}\{S_{j_1} S_{j_1}^*, \dots, S_{j_k} S_{j_k}^*\}$ mit $y = y^*$ und $\|x^*x - y\| \leq \frac{1}{4}$

(a priori $y \neq y^*$, aber mit $y' := \frac{y+y^*}{2}$ ist $\|x^*x - y'\| \leq \frac{1}{2} \|x^*x - y\| + \frac{1}{2} \|x^*x - y^*\| \leq \frac{1}{4}$

Also gilt $\|\varphi(y)\| \geq \frac{2}{3}$. ($1 = \|\varphi(x^*x)\| \leq \|\varphi(x^*x - y)\| + \|\varphi(y)\| \leq \frac{1}{4} + \|\varphi(y)\|$)

Sei k die maximale Länge der j_i und v_i aus $y = \sum_{i=1}^m \alpha_i S_{j_i} S_{j_i}^*$.

9.9 $\Rightarrow \exists w \in O_n$ Isometrie mit $w^* y w = \varphi(y)$.

Da nun $\varphi(y) \in F_k^n \cong M_k$, fasse $\varphi(y)$ als Matrix auf.

Da $\varphi(y)$ selbstadjungiert ist, ist $\varphi(y)$ diagonalisierbar und es gibt

eine eindimensionale Projektion $e \in F_k^n$ mit

$$e \varphi(y) = \varphi(y) e = \|\varphi(y)\| e \quad (\text{genauer gesagt: } e \varphi(y) = \pm \|\varphi(y)\| e)$$

$$\left(\begin{array}{l} \exists v \text{ unitär: } v \varphi(y) v^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ also mit } p_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\ v \varphi(y) v^* p_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 p_1 = p_1 v \varphi(y) v^*, \text{ d.h. mit } e := v^* p_1 v \\ \text{gilt } \varphi(y) (v^* p_1 v) = \lambda_1 (v^* p_1 v) = (v^* p_1 v) \varphi(y) \end{array} \right)$$

(benutze auch 3.4(a) und 2.9 für $\|\varphi(y)\| = \text{größter Eigenwert von } \varphi(y)$)

Es gibt ein Unitäres $u \in F_k^n$, dass die Projektion e zu $S_1^k S_1^{\pm k}$ transformiert (dies entspricht $e_{11} \in M_k$), also

$$u e u^* = S_1^k S_1^{\pm k}.$$

Setze $z := \|\varphi(y)\|^{-\frac{1}{2}} S_1^{\pm k} u e u^* \in O_n$. Dann gilt:

$$\|z\| < \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \left(\|z\| = \|\varphi(y)\|^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\|S_1^{\pm k} u e u^*\|}_{\leq 1} \leq \|\varphi(y)\|^{-\frac{1}{2}} < \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

?

$$zyz^* = 1 \quad \left(zyz^* = \|y(y)\|^{-1} \sum_{i=1}^k u e \underbrace{w y w^*}_{= \underbrace{\|y(y)\| e}_{= \|y(y)\| \sum_{i=1}^k S_i S_i^*}} e u^* \sum_{i=1}^k S_i^* = 1 \right)$$

$$zx^*x z^* \text{ ist invertierbar} \quad (\|1 - zx^*x z^*\| = \|z(y - x^*x)z^*\| \leq (\frac{2}{\sqrt{2}})^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1, \quad 2.4)$$

$$\text{Setze dann } a := b^* x^*, \quad b := z^* (zx^*x z^*)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Also } a \times b = b^* x^* \times b = (zx^*x z^*)^{\frac{1}{2}} z x^* x z^* (zx^*x z^*)^{-\frac{1}{2}} = 1.$$

(falls $ey(y) = -\|y(y)\|e$, so ist $zyz^* = -1$, also ist $-zx^*x z^*$ invertierbar $\Rightarrow zx^*x z^*$ invertierbar)

Idee: • Sei $0 \neq x \in \mathcal{O}_n$

• dann $x^*x \neq 0$

• wähle $y = y^*$ im Span von $S_1 S_1^*$ in der Nähe von x^*x

• Zeige nun $\exists z: zyz^* = 1$. Das gelingt so, dass $zx^*x z^*$ nicht ganz auf x^*x , aber innerhalb so, dass $zx^*x z^*$ invertierbar ist. Hierfür muss z eine kontrollierte Norm haben.

- Kandidat {
- Dieses y ist per $y(y)$ eine Matrix, die sich per $ey(y)e$ zu $\|y(y)\|e$ kleinschneiden und per $\sum_{i=1}^k S_i^* S_i$ zu 1 wieder aufheben lässt.
 - ($y(y) \in M_n \leadsto ey(y)e \approx \begin{pmatrix} \|y(y)\| & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \approx \|y(y)\| \sum_{i=1}^k S_i^* S_i$)
 - Andererseits ist $y(y)$ als algebraische Operation (also $\leadsto$ Element in $\mathcal{O}_n$) darstellbar: $y(y) = w^* y w$.
 - Somit können obige Transformationen von y als Element aus $\mathcal{O}_n$ (!) durchgeführt werden, d.h. $\exists z: zyz^* = 1$
 - Definiere dann a und b wie oben, so dass $a \times b = 1$

L

9.13 Bemerkung: (a) $\mathcal{O}_n$ ist auch noch „nuklear“. Für diese C^* -Algebra funktioniert die Invarianz der K -Theorie besonders gut. $\mathcal{O}_n$ ist sogar eine „Kirchbyalgebra“ (separabel, unital, π_1 -trivial, nuklear = π_1 -sum), für diese gilt, dass sie schon komplett durch ihre K -Gruppen klassifiziert sind.

(b) Es gibt viele Verallgemeinerungen von Cuntz-Algebren, z.B. Cuntz-Krieger-Algebren $\mathcal{O}_A$, $A \in M_{I \times I}(\{0,1\})$

$$\mathcal{O}_A := C^*(S_i \text{ partielle Isometrie, } i \in I \mid S_i^* S_j = 0 \text{ für } i \neq j, S_i^* S_i = \sum_{j \in I} a_{ij} S_j S_j^* \text{ für } i \in I)$$

wobei A eine $I \times I$ -Matrix mit $a_{ij} \in \{0,1\}$ ist.

Idee: $\mathcal{O}_n$:



$\mathcal{O}_A$:



mit Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

bes. Graph $\begin{array}{c} \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet \\ \uparrow \quad \downarrow \\ \bullet \end{array}$

L

oder Cuntz-Pimsner-Algebren $\mathcal{O}_E$, E rechter HHK A -Modul.

($A = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C}^n \rightarrow \mathcal{O}_n$)

(c) Gilt $\mathcal{O}_n \cong \mathcal{O}_m$ für $n \neq m$? Antwort: nein, es gilt $n \neq m \Rightarrow \mathcal{O}_n \not\cong \mathcal{O}_m$. z.B. mit K -Theorie (oder mit Ext -Theorie).