

Beweis des Wigner'schen Halbkreisgesetzes für
allgemeine Wigner–Matrizen

Florian Badt
Patrick Kern

11. August 2012

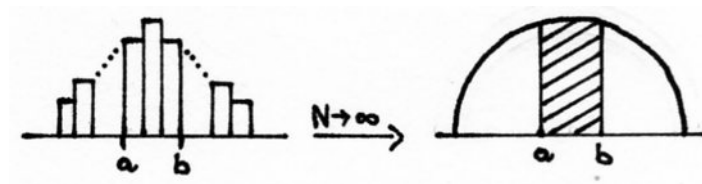
Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Wigner'sches Halbkreisgesetz für allgemeine Wigner-Matrizen	2
2.1	Definition (Wigner-Matrix)	2
2.2	Proposition	4
2.3	Definition (Empirisches Gesetz der Eigenwerte)	4
2.4	Wigner'sches Halbkreisgesetz für allgemeine Wigner-Matrizen	5
3	Beweis des Wigner'schen Halbkreisgesetzes für allgemeine Wigner-Matrizen	7
	Literatur	14

1 Einführung

Zu Beginn wollen wir zunächst einige Aussagen aus der Vorlesung kurz wiederholen. Dazu betrachten wir folgende Situation:

Sei $A_N = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$ eine Gauß'sche Zufallsmatrix mit $A_N = A_N^*$. Falls man mit $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ die Eigenwerte von A_N bezeichnet, so gilt mit $f = \chi_{[a,b]}$ für die Eigenwertverteilung von A_N :



$$\text{d.h. } \underbrace{\frac{\#\{\text{EW in } [a, b]\}}{N}}_{= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \underbrace{\int_a^b d\sigma_1(x)}_{= \int f(x) d\sigma_1(x)} = \int_a^b \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} dx \quad (\text{I})$$

Da dies ohne explizite Kenntnis der Eigenwerte von A_N schwierig zu berechnen ist, betrachten wir zunächst den Fall $f(x) = x^k$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int x^k d\sigma_1(x) \\ & = \frac{1}{N} \text{Tr}(A_N^k) =: \text{tr}(A_N^k) \end{aligned}$$

Weiter können wir durch Reskalierung der Einträge mit $\frac{1}{\sqrt{N}}$, d.h. $a_{i,j} = \{\pm \frac{1}{\sqrt{N}}\}$ die Konvergenz von $\text{tr}(A_N^k)$ garantieren.

Dann war für $k \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$ die Behauptung des Wigner'schen Halbkreisgesetzes:

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} P(|\text{tr}(A_N^k) - \int x^k d\sigma_1(x)| > \epsilon) = \\ & = \begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} P(|\text{tr}(A_N^k)| > \epsilon) = 0 & , \text{ falls } k \text{ ungerade} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} P(|\text{tr}(A_N^k) - c_k| > \epsilon) = 0 & , \text{ falls } k \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $c_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ die Catalan'schen Zahlen beschreibt.

2 Wigner'sches Halbkreisgesetz für allgemeine Wigner-Matrizen

Motivation:

Behält das Wigner'sche Halbkreisgesetz seine Gültigkeit, falls wir an der Eigenwertverteilung allgemeinerer Matrizen interessiert sind? - Ja!

Wir werden sehen, dass die betrachteten Fälle aus der Vorlesung Spezialfälle einer allgemeineren Formulierung sind.

Hierzu wollen wir Wigner-Matrizen betrachten.

2.1 Definition (Wigner-Matrix)

Man definiert *Wigner-Matrizen* durch $W_N := \frac{1}{\sqrt{N}}\{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$, wobei für die Einträge von $W_N = W_N^*$ gelten soll:

- $\{a_{ij}\}_{1 \leq i \leq j}$ sind unabhängig
- die Diagonaleinträge $\{a_{ii}\}_{i \geq 1}$ und die Nicht-Diagonaleinträge $\{a_{ij}\}_{1 \leq i < j}$ sind jeweils identisch verteilt
- $E[a_{ij}^2] < \infty$ für alle $i, j = 1, \dots, N$ (d.h. $r_2 := \max\{E[a_{11}^2], E[a_{12}^2]\} < \infty$)
- $E[a_{12}^2] > 0$

Bemerkung 1:

Der Skalar $\alpha_N := \frac{1}{\sqrt{N}}$ und $E[a_{12}^2] > 0$ garantieren uns, dass

$$\frac{1}{N} \text{Tr}(W_N^2) = \frac{1}{N} (\lambda_1^2(W_N) + \dots + \lambda_N^2(W_N))$$

konvergiert, denn mit Hilfe der Hilbert-Schmidt Norm

$$\|W_N\|_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2(W_N) = \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N W_{ij}^2$$

gilt für $W_N = \alpha_N A_N$:

$$\begin{aligned} E \|W_N\|_2^2 &= \frac{1}{N} \alpha_N^2 \sum_{i,j=1}^N E[a_{ij}^2] \\ &= \frac{1}{N} \alpha_N^2 \sum_{i=1}^N E[a_{ii}^2] + \frac{2}{N} \alpha_N^2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} E[a_{ij}^2] \\ &= \alpha_N^2 E[a_{11}^2] + (N-1) \alpha_N^2 E[a_{12}^2] \end{aligned}$$

d.h. damit $E \|W_N\|_2^2$ konvergiert (nicht gegen Null) muss also $\alpha_N = \frac{1}{\sqrt{N}}$, $E[a_{12}^2] > 0$ gewählt werden.

Hierbei haben wir die Linearität des Erwartungswertes sowie die identische Verteilung der Einträge von W_N ausgenutzt.

Beispiel

Jetzt sind wir an der Eigenwertverteilung von Wigner–Matrizen interessiert.

Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

Sei W_N eine Wigner–Matrix, deren Einträge standardnormalverteilt sind, d.h. $a_{ij} \sim N(0, 1)$.

Abbildung 1 zeigt uns das Histogramm aller 1000 Eigenwerte einer Gauß’schen Wigner–Matrix W_{1000} :

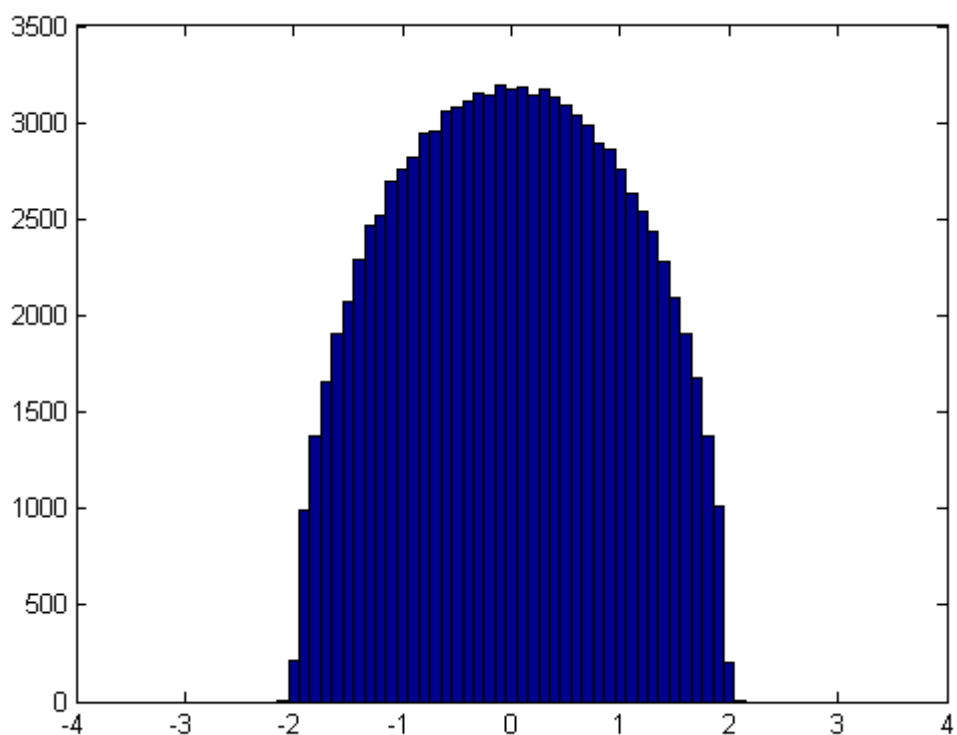


Abbildung 1.

Hierbei kann man erkennen, dass das Histogramm bzw. die Dichte der Eigenwerte gegen den sogenannten Wigner’schen Halbkreis konvergiert. Dies motiviert zu folgender Aussage:

2.2 Proposition

Sei W_N eine Wigner-Matrix mit $E[a_{ij}] = 0$ für alle i, j und $E[a_{12}^2] = t \in (0, \infty)$. Für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definieren wir uns die Zufallsvariable

$$Z_N(I) := \frac{\#\{\lambda_1(W_N), \dots, \lambda_N(W_N)\} \cap I}{N}$$

Dann gilt:

$$Z_N(I) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_I d\sigma_t(x), \text{ wobei } d\sigma_t(x) = \frac{1}{2\pi t} \sqrt{4t - x^2} dx \quad (1)$$

Bemerkung 2

Für $a_{ij} \sim N(0, 1)$ und $I = [a, b]$ ist die Behauptung aus (I) mit (1) identisch.

Die Zufallsvariable $Z_N(I)$ lässt sich auch ohne explizite Kenntnis der Eigenwerte von W_N mit Hilfe folgender Definition vereinfachen:

2.3 Definition (Empirisches Gesetz der Eigenwerte)

Für eine Wigner-Matrix W_N sei die Eigenwertverteilung von $\lambda_1(W_N), \dots, \lambda_N(W_N)$ gegeben durch das Wahrscheinlichkeits-Maß

$$\mu_{W_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i(W_N)}$$

Dann definiert uns μ_{W_N} für jede stetige Funktion $f \in C(\mathbb{R})$ die Zufallsvariable

$$\int f d\mu_{W_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i(W_N)) \quad (2)$$

Bemerkung 3

Die Zufallsvariable $Z_N(I)$ in (1) ist durch $Z_N(I) = \int \chi_I d\mu_{W_N}$ gegeben.

Da $W_N = W_N^*$ nach Voraussetzung, kann mit Benutzung der Invarianz der Spur unter Konjugation und mit Hilfe des Spektralsatzes (2) umgeformt werden zu:

$$\begin{aligned}
\int f d\mu_{W_N} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i(W_N)) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(D_N)_{ii} \quad , D_N = \text{Diag}(\lambda_1(W_N), \dots, \lambda_N(W_N)) \\
&= \frac{1}{N} \text{Tr}(f(D_N)) \\
&= \frac{1}{N} \text{Tr}(U_N f(D_N) U_N^*) \\
&= \frac{1}{N} \text{Tr}(f(W_N))
\end{aligned}$$

Demn für $f(x) = x^k$ gilt:

$$\begin{aligned}
U_N f(D_N) U_N^* &= U_N D_N \underbrace{U_N^* U_N}_{=1} \cdots U_N D_N U_N^* \\
&= (U_N D_N U_N^*)^k \\
&= W_N^k
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Aussage für Monome. Durch Linearkombinationen erhält man die Aussage für Polynome und mit Hilfe des Satzes von Stone–Weierstraß für alle stetigen Funktionen $f \in C(\mathbb{R})$. Somit lässt sich das Wigner’sche Halbkreisgesetz für allgemeine Wigner–Matrizen formulieren:

2.4 Wigner’sches Halbkreisgesetz für allgemeine Wigner–Matrizen

Sei W_N eine Wigner-Matrix mit $E[a_{ij}] = 0$ für alle i, j und $E[a_{12}^2] := t \in (0, \infty)$ und sei $f \in C(\mathbb{R})$ ein Polynom, so konvergiert die Zufallsvariable $\int f d\mu_{W_N}$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\int f d\sigma_t$ für $N \rightarrow \infty$.

Für $k \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$ ist dies durch die schwache Konvergenz des Wahrscheinlichkeitsmaßes äquivalent zu:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(|\frac{1}{N} \text{Tr}(W_N^k) - \int x^k d\sigma_t(x)| > \epsilon) = 0$$

Bemerkung 4

Mit Hilfe von

$$\int x^k d\sigma_t(x) = t^{k/2} \int x^k d\sigma_1(x) \quad \text{und}$$
$$\int x^k d\sigma_1(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } k \text{ ungerade} \\ c_{k/2} & , \text{ falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$

lässt sich die Behauptung aus 2.4 vereinfachen zu:

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} P(|\frac{1}{N} \text{Tr}(W_N^k) - \int x^k d\sigma_t(x)| > \epsilon) = \\ = & \begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} P(|\frac{1}{N} \text{Tr}(W_N^k)| > \epsilon) = 0 & , \text{ falls } k \text{ ungerade} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} P(|\frac{1}{N} \text{Tr}(W_N^k) - t^{k/2} c_{k/2}| > \epsilon) = 0 & , \text{ falls } k \text{ gerade} \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

3 Beweis des Wigner'schen Halbkreisgesetzes für allgemeine Wigner-Matrizen

Zeige die Konvergenzbehauptung (3) für $k \in \mathbb{N}$ in 2 Schritten :

Schritt 1: Zeige, dass:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{N} \text{Tr}(W_N^k)\right] = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } k \text{ ungerade} \\ t^{k/2} c_{k/2} & , \text{ falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Schritt 2: Zeige: $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}\left(\frac{1}{N} \text{Tr}(W_N^k)\right) = 0$

Wir zeigen lediglich *Schritt 1*. Bei *Schritt 2* handelt es sich um ein Konzentrationsphänomen, welches wir jedoch nicht näher behandeln werden.

Unter der Annahme, dass alle Momente von W_N existieren, d.h.

$r_k := \max\{E[a_{11}^k], E[a_{12}^k]\} < \infty$ beweisen wir im Folgenden *Schritt 1*:

Beweis von *Schritt 1*:

Sei eine Wigner Matrix $W_N = \frac{1}{\sqrt{N}} A_N$ gegeben. Weiter gelte für die Einträge von W_N , dass $E[a_{ij}] = 0$ für alle i, j und $E[a_{12}^2] = t \in (0, \infty)$. Dann gilt zunächst mit Hilfe der Linearität der Spur und des Erwartungswertes:

$$\frac{1}{N} E[\text{Tr}(W_N^k)] = \frac{1}{N} E[\text{Tr}((N^{-1/2} A_N)^k)] = N^{-k/2-1} E[\text{Tr}(A_N^k)]$$

Weiter lassen sich die Einträge von A_N^k durch das Matrizenprodukt wie folgt darstellen:

$$[A_N^k]_{ij} = \sum_{1 \leq i_2, \dots, i_k \leq N} a_{i i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k j}$$

Summiert man nun über die Diagonaleinträge und betrachtet den Erwartungswert der Spur so erhält man:

$$\begin{aligned} E[\text{Tr}(A_N^k)] &= \sum_{i_1=1}^N E[A_N^k]_{i_1 i_1} \\ &= \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq N} E(a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1}) \\ &\equiv \sum_{\mathbf{i} \in [N]^k} E[A_{\mathbf{i}}] \end{aligned} \tag{4}$$

Hierbei ist $[N] = \{1, \dots, N\}$ und für $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$ definieren wir $A_{\mathbf{i}}$ als $A_{\mathbf{i}} = a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_k i_1}$.

Im Folgenden sind wir daran interessiert, die Anzahl $A_{\mathbf{i}}$ zu zählen. Hierzu führen wir Graphen ein, wobei wir den Graph $G_{\mathbf{i}}$ bezüglich $\mathbf{i} \in [N]^k$ wie folgt auffassen:

Die Knoten $V_{\mathbf{i}}$ sind verschiedene Elemente von $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ und die Kanten $E_{\mathbf{i}}$ verschiedene Paarungen unter $\{i_1, i_2\}, \dots, \{i_{k-1}, i_k\}, \{i_k, i_1\}$, d.h. $G_{\mathbf{i}} = (V_{\mathbf{i}}, E_{\mathbf{i}})$.

Dann ist der *geschlossene* Weg $w_{\mathbf{i}} = (\{i_1, i_2\}, \dots, \{i_{k-1}, i_k\}, \{i_k, i_1\})$ durch die Folge von Kanten auf $G_{\mathbf{i}}$ definiert, d.h. der Graph ist somit zusammenhängend.

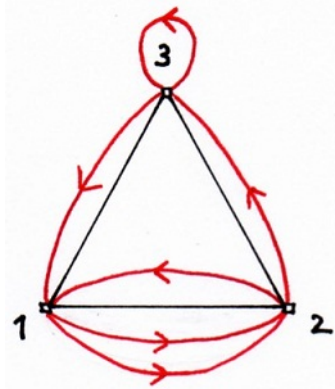
Beispiel

Sei $\mathbf{i} = (1, 2, 3, 3, 1, 2)$.

Dann ist $V_{\mathbf{i}} = \{1, 2, 3\}$ und $E_{\mathbf{i}} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 3\}\}$ gibt uns die Kanten in $G_{\mathbf{i}}$. Dadurch erhalten wir einen geschlossenen Weg

$w_{\mathbf{i}} = (\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 1\})$ auf $G_{\mathbf{i}}$,

d.h. $G_{\mathbf{i}}$ lässt sich folgendermaßen darstellen:



Dieser Graph stellt folgende Multiplikationen der Matrixeinträge dar:

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{i}} &= a_{12} a_{23} a_{33} \underbrace{a_{31}}_{= a_{13}} a_{12} \underbrace{a_{21}}_{= a_{12}} \\ &= a_{12}^3 a_{13}^1 a_{23}^1 a_{33}^1 \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung führen wir nun eine Gewichtung $w_{\mathbf{i}}(e)$ ein, welche folgendermaßen definiert ist:

$$w_{\mathbf{i}}(e) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \{i, j\} \notin E_{\mathbf{i}} \\ \#\{\{i, j\} \in w_{\mathbf{i}}\} & , \text{ falls } \{i, j\} \in E_{\mathbf{i}} \end{cases}$$

D.h. $w_{\mathbf{i}}(e)$ gibt an, wie oft der Weg $w_{\mathbf{i}}$ die Kante $e \in E_{\mathbf{i}}$ durchläuft.

Im obigen Beispiel ist $w_{\mathbf{i}}(\{1, 2\}) = 3$,
 $w_{\mathbf{i}}(\{1, 3\}) = w_{\mathbf{i}}(\{2, 3\}) = w_{\mathbf{i}}(\{3, 3\}) = 1$.

Somit lässt sich $A_{\mathbf{i}}$ wie folgt schreiben:

$$A_{\mathbf{i}} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq N} a_{ij}^{w_{\mathbf{i}}(\{i, j\})} \quad (5)$$

Falls man mit $E_{\mathbf{i}}^s = \{\{i, i\} \in E_{\mathbf{i}}\}$ und $E_{\mathbf{i}}^c = \{\{i, j\} \in E_{\mathbf{i}} : i \neq j\}$ die Menge aller Schleifen bzw. Kanten zwischen zwei verschiedenen Knoten bezeichnet, lässt sich $E[A_{\mathbf{i}}]$ wie folgt differenzieren:

$$\begin{aligned} E[A_{\mathbf{i}}] &= \prod_{1 \leq i \leq j \leq N} E[a_{ij}^{w_{\mathbf{i}}(\{i, j\})}] \\ &= \prod_{e_s \in E_{\mathbf{i}}^s} E[a_{11}^{w_{\mathbf{i}}(e_s)}] \cdot \prod_{e_c \in E_{\mathbf{i}}^c} E[a_{12}^{w_{\mathbf{i}}(e_c)}] \\ &=: \prod (G_{\mathbf{i}}, w_{\mathbf{i}}) \end{aligned} \quad (6)$$

Bemerkung 1

Die letzte Gleichheit in (6) bedeutet, dass der Wert von $E[A_{\mathbf{i}}]$ durch das Tupel $(G_{\mathbf{i}}, w_{\mathbf{i}})$ bestimmt ist.

Mit G_k bezeichnen wir die Menge aller Paare (G, w) , bei denen $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit höchstens k Knoten ist, auf dem ein geschlossener Weg w der Länge $|w| = k$ definiert ist.

Somit lässt sich (4) mit Hilfe von (6) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} E[\text{Tr}(W_N^k)] &= N^{-k/2-1} \sum_{(G, w) \in G_k} \sum_{\substack{\mathbf{i} \in [N]^k \\ (G_{\mathbf{i}}, w_{\mathbf{i}}) = (G, w)}} E[A_{\mathbf{i}}] \\ &= \sum_{(G, w) \in G_k} \prod (G, w) \cdot \frac{\#\{\mathbf{i} \in [N]^k : (G_{\mathbf{i}}, w_{\mathbf{i}}) = (G, w)\}}{N^{k/2+1}} \end{aligned} \quad (7)$$

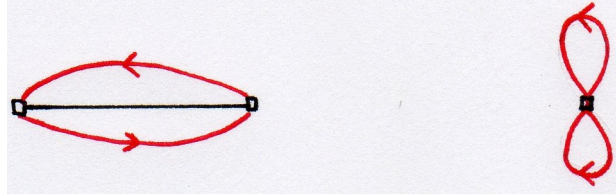
Im Folgenden sind wir daran interessiert

$$\#\{\mathbf{i} \in [N]^k : (G_{\mathbf{i}}, w_{\mathbf{i}}) = (G, w)\}$$

abzuzählen, wobei dieser Ausdruck eindeutig bestimmt ist durch die Anzahl der Möglichkeiten verschiedene Elemente von $[N]$ auf die Knotenpunkte eines gegebenen Graphen $G_{\mathbf{i}}$ zu verteilen.

Beispiel

Für $N = \{1, 2\}$ und $k = 2$ sei $\mathbf{i} \in [\{1, 2\}]^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$. Dann gibt es folgende Möglichkeiten für $(G, w) \in G_2$:



(G, w) bzgl. $\{1, 2\}, \{2, 1\}$

(G, w) bzgl. $\{1, 1\}, \{2, 2\}$

$$\implies \#\{\mathbf{i} \in [\{1, 2\}]^2 : (G_{\mathbf{i}}, w_{\mathbf{i}}) = (G, w)\} = 2$$

Dies kann man weiterführen, so dass mit der Anzahl der Knoten $|G|$ allgemein gilt:

$$\#\{\mathbf{i} \in [N]^k : (G_{\mathbf{i}}, w_{\mathbf{i}}) = (G, w)\} = N(N-1) \cdots (N-|G|+1)$$

Somit ergibt sich für (7):

$$\frac{1}{N} E[\text{Tr}(W_N^k)] = \sum_{(G,w) \in G_k} \prod(G, w) \cdot \frac{N(N-1) \cdots (N-|G|+1)}{N^{k/2+1}} \quad (8)$$

Weiter können wir die Summation aus (8) wie folgt einschränken:

Für ein Paar $(G, w) \in G_k$ durchlaufe der Weg w eine Kante $e = \{i, j\}$ genau einmal (d.h. $w(e) = 1$). Dann gibt es in $\prod(G_{\mathbf{i}}, w_{\mathbf{i}})$ einen Ausdruck $E[a_{ij}]$ der laut Voraussetzung Null ist. Also gilt $\prod(G_{\mathbf{i}}, w_{\mathbf{i}}) = 0$ für diesen Weg w mit $w(e) = 1$, d.h.:

$$\frac{1}{N} E[\text{Tr}(W_N^k)] = \sum_{\substack{(G,w) \in G_k \\ w(e) \geq 2 \\ \forall e \in E}} \underbrace{\prod(G, w) \cdot \frac{N(N-1) \cdots (N-|G|+1)}{N^{k/2+1}}}_{(*)} \quad (9)$$

Im nächsten Schritt unterscheiden wir, ob k gerade oder ungerade ist und werden sehen, dass sich dadurch die Anzahl der Graphen weiter verringern lässt.

Dazu nehmen wir zuerst an, dass k ungerade ist. Dann gilt:

Da $|G|$ ganzzahlig sein muss folgt aus $|G| \leq \#E + 1 \leq \frac{k}{2} + 1 \forall k$ (auch für gerades k), dass auch $|G| \leq \frac{k-1}{2} + 1 \forall k$ gilt.

Dann gilt für (*) mit $|G| = \frac{k-1}{2} + 1$:

$$\begin{aligned}
 (*) &= \prod (G, w) \cdot \frac{N(N-1) \cdots (N-|G|+1)}{\underbrace{N^{k/2+1}}_{= N^{|G|} \cdot N^{\frac{1}{2}}}} \\
 &= \prod (G, w) \cdot \underbrace{\frac{N(N-1) \cdots (N-|G|+1)}{N^{|G|}}}_{\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1} \cdot N^{-\frac{1}{2}} \in O(N^{-\frac{1}{2}})
 \end{aligned}$$

da $\prod (G, w)$ unabhängig von k ist.

$$\implies \lim_{N \rightarrow \infty} E[\text{Tr}(W_N^k)] = 0 \forall k \text{ ungerade}$$

Im Folgenden benutzen wir eine Proposition, die wir nicht beweisen werden.

Proposition 1

Für $(G, w) \in G_k$ mit $w(e) \geq 2 \forall e \in E$ gilt:

- falls $e \in E^s$ ist $|G| \leq \frac{k}{2}$
- falls $e \in E$ mit $w(e) \geq 3$ ist $|G| \leq \frac{k}{2}$

Sei nun k gerade.

Dann gilt für (*) mit $|G| = \frac{k}{2}$:

$$\begin{aligned}
(*) &= \prod (G, w) \cdot \frac{N(N-1) \cdots (N-|G|+1)}{\underbrace{N^{k/2+1}}_{= N^{|G|} \cdot N^1}} \\
&= \prod (G, w) \cdot \underbrace{\frac{N(N-1) \cdots (N-|G|+1)}{N^{|G|}}}_{\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1} \cdot N^{-1} \in O(N^{-1})
\end{aligned}$$

da $\prod (G, w)$ unabhängig von k ist.

Dies zeigt, dass lediglich diejenigen Graphen G mit $|G| = \frac{k}{2} + 1$ einen Beitrag leisten, wodurch wir dann die in Proposition 1 aufgeführten Fälle ausschließen können.

Es folgt für (9):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E[Tr(W_N^k)] = \sum_{(G, w) \in G_k^{k/2+1}} \prod (G, w)$$

mit $G_k^{k/2+1} = \{(G, w) \in G_k \mid |G| = \frac{k}{2} + 1, w(e) = 2, e \notin E^s \forall e \in E\}$

Für ein $(G, w) \in G_k^{k/2+1}$ ist $\#E = \frac{k}{2}$ die Anzahl der Kanten in G .

Somit lässt sich $\prod (G, w)$ wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\prod (G, w) &= \prod_{e_s \in E^s} E[a_{11}^{w(e_s)}] \cdot \prod_{e_c \in E^c} E[a_{12}^{w(e_c)}] \\
&= \prod_{e_c \in E^c} E[a_{12}^{w(e_c)}] \\
&= \prod_{e_c \in E^c} E[a_{12}^2] \\
&= t^{\#E} \\
&= t^{k/2}
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E[Tr(W_N^k)] = t^{k/2} \cdot \#G_k^{k/2+1} \quad (10)$$

Durch $|G| = \frac{k}{2} + 1 = \#E + 1$ wissen wir, dass alle Graphen aus $G_k^{k/2+1}$ Bäume sind, d.h. wir müssen nur noch Bäume zählen mit $|w| = k$ und $|G| = |V| = \frac{k}{2} + 1$.

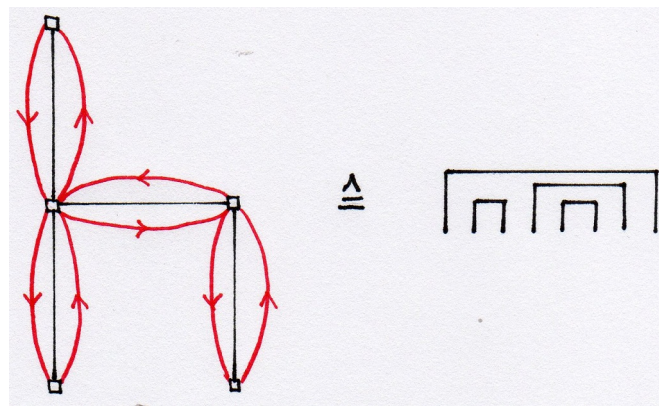
Hier sieht man die Verbindung zur Beweismethode in der Vorlesung, indem wir eine Bijektion

$$G_k^{k/2+1} \longrightarrow NC_2(k)$$

zwischen der Menge aller Bäume mit obigen Eigenschaften und der Menge aller nichtkreuzenden Paarungen betrachten.

Beispiel

Für $(G, w) \in G_8^5$ gilt:



$\in G_8^5$

$\in NC_2(8)$

In der Vorlesung hatten wir für gerades k gesehen, dass

$$\#NC_2(k) = c_{k/2} \tag{11}$$

gilt.

Mit (10) und (11) erhält man somit die Behauptung.

■

Literatur

- [1] Manuskript T. Kemp § 1 - 4
<http://www.math.ucsd.edu/~tkemp/247A/247A.Notes.pdf>