

Konvergenz des größten Eigenwerts

Stefan Jung und Peter Schuhmacher

07.08.2012

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Abschätzung nach unten	2
2.1	Satz 1	2
2.2	Beweis von Satz 1	2
3	Abschätzung nach oben	2
3.1	Satz 2	2
3.2	Beweis von Satz 2	3
3.3	Lemma 1	6
3.4	Beweis von Lemma 1	7

1 Einleitung

Dieser Vortrag behandelt die Frage nach dem Grenzverhalten des größten Eigenwerts allgemeiner $(n \times n)$ -Wigner-Matrizen für $n \rightarrow \infty$. Geht man vom Wignerschen Halbkreisgesetz aus, so ist nämlich nicht klar, ob der größte Eigenwert überhaupt konvergiert. Prinzipiell würde das Wignersche Halbkreisgesetz z.B. nicht ausschließen, dass es im Grenzfalle eine nichtverschwindende Wahrscheinlichkeit dafür gibt, dass ein Eigenwert $\geq \sqrt{n}$ ist. Solch ein einzelner Wert würde die Konvergenz gegen den Wignerschen Halbkreis zwar nicht verletzen, aber der größte Eigenwert könnte dann nicht mehr konvergieren.

In diesem Beweis wird lediglich vorausgesetzt, dass die Momente der Einträge der Matrix hinreichend kontrolliert werden können (siehe dazu die Voraussetzungen in Satz 2). In diesem Falle konvergiert der größte Eigenwert in Wahrscheinlichkeit gegen 2.

Tatsächlich genügt jedoch bereits die Existenz des zweiten und vierten Moments der Nichtdiagonaleinträge der Wigner-Matrizen um die angegebene Konvergenz zu sichern.

Grundlage des Vortrags ist das Vorlesungsskript „Introduction to random matrix theory“ von Todd Kemp, UC San Diego, 2011.

2 Abschätzung nach unten

2.1 Satz 1

Es sei X_n eine Wigner-Matrix mit normierter Varianz der Nichtdiagonaleinträge. Es sei $\lambda_n(X_n)$ der größte Eigenwert von X_n . Dann gilt für jedes $\delta > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\lambda_n(X_n) < 2 - \delta) = 0$$

2.2 Beweis von Satz 1

Es sei $\delta > 0$ gegeben. Es sei $f \in C_c^\infty$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger auf $[2 - \delta, 2]$, sodass $\int f d\sigma_1 = 1$, wobei $d\sigma_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} dx$ ist.

Ist $\lambda_n(X_n) < 2 - \delta$, dann liegen alle Eigenwerte im Intervall $(-\infty, 2 - \delta)$, sodass $\int f d\mu_{X_n} =: \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\lambda_j(X_n)) = 0$. Da allerdings $\int f d\sigma_1 = 1 > \frac{1}{2}$ gilt, folgt

$$\mathbb{P}(\lambda_n(X_n) < 2 - \delta) \leq \mathbb{P}\left(\int f d\mu_{X_n} = 0\right) \leq \underbrace{\mathbb{P}\left(\left|\int f d\mu_{X_n} - \int f d\sigma_1\right| > \frac{1}{2}\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ nach Wigners Halbkreisgesetz}}$$

3 Abschätzung nach oben

3.1 Satz 2

Es sei $X_n = (x_{ij})_{i,j=1}^n$ eine Wigner-Matrix mit normierter Varianz der Nichtdiagonaleinträge. Wir fordern weiter, dass es ein $M > 0$ gibt, sodass $\mathbb{E}[x_{ij}^k] \leq M^k$ für $i \neq j$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes ϵ und $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\lambda_n(X_n) > 2 + \delta n^{-\frac{1}{6} + \epsilon}) = 0$$

3.2 Beweis von Satz 2

Die Beweisidee ist, die Momente abzuschätzen. Wir wollen eine Abschätzung für $\mathbb{P}(\lambda_n(X_n) > 2 + \delta n^{-\frac{1}{6}+\epsilon})$ für fest gewähltes $\epsilon, \delta > 0$ haben. Für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lambda_n(X_n) > 2 + \delta n^{-\frac{1}{6}+\epsilon} \Rightarrow \lambda_n^{2k}(X_n) > (2 + \delta n^{-\frac{1}{6}+\epsilon})^{2k} \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^n (\lambda_i^{2k}(X_n))}_{=\text{Tr}(X_n^{2k})} > (2 + \delta n^{-\frac{1}{6}+\epsilon})^{2k}$$

Damit gilt wegen der Markov-Ungleichung:

$$\mathbb{P}(\lambda_n(X_n) > 2 + \delta n^{-\frac{1}{6}+\epsilon}) \leq \mathbb{P}(\text{Tr}(X_n^{2k}) > (2 + \delta n^{-\frac{1}{6}+\epsilon})^{2k}) \leq \frac{\mathbb{E}[\text{Tr}(X_n^{2k})]}{(2 + \delta n^{-\frac{1}{6}+\epsilon})^{2k}} \quad (1)$$

Gleichung (1) gilt für beliebiges k . Uns bleibt also die Freiheit $k = k(n)$ in Abhängigkeit von n so zu wählen, dass k kontrolliert mit n anwächst. Nun gilt es eine Abschätzung für $\mathbb{E}[\text{Tr}(X_n^{2k})]$ zu finden. Es wurde gezeigt, dass

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}[\text{Tr}(X_n^{2k})] = \sum_{\substack{(G,w) \in \mathcal{G}_{2k} \\ w \geq 2}} \Pi(G,w) \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-|G|+1)}{n^{k+1}} \quad (2)$$

Hierbei beschreibt \mathcal{G}_{2k} die Menge der Paare (G,w) , wobei G ein zusammenhängender Graph mit höchstens $2k$ Knoten und w ein geschlossener Weg auf G der Länge $2k$ ist. Die Einschränkung $w \geq 2$ bedeutet, dass w jede Kante in G mindestens 2 Mal kreuzt. Die Koeffizienten $\Pi(G,w)$ sind gegeben durch:

$$\Pi(G,w) = \prod_{e_s \in E^s(G)} \mathbb{E}(Y_{11}^{w(e_s)}) \cdot \prod_{e_c \in E^c(G)} \mathbb{E}(Y_{12}^{w(e_c)})$$

wobei $E^s(G)$ die Menge der Schlingen $\{i,i\}$ in G und $E^c(G)$ die Menge verbindender Kanten $\{i,j\}$ mit $i \neq j$ in G sind. $w(e)$ ist die Anzahl, wie oft die Kante e durchlaufen wird. Es ist sinnvoll, die Summe in (3) in Abhängigkeit der Ecken in G zu schreiben. Sei dazu \mathcal{G}_{2k}^t die Teilmenge von \mathcal{G}_{2k} aus den Paaren (G,w) mit t Ecken in G , und $w(e) \geq 2$ an jeder Kante e in G . Solange die Länge von w gleich $2k$ ist, ist die Anzahl der Kanten in G immer $\leq k$. Damit ist \mathcal{G}_{2k}^t leer für $t > k+1$. Somit lässt sich Gleichung (2) wie folgt umformulieren:

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}[\text{Tr}(X_n^{2k})] = \sum_{t=1}^{k+1} \frac{n(n-1)\cdots(n-t+1)}{n^{k+1}} \sum_{(G,w) \in \mathcal{G}_{2k}^t} \Pi(G,w)$$

Dies können wir wie folgt abschätzen:

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}[\text{Tr}(X_n^{2k})] \leq \sum_{t=1}^{k+1} n^{t-(k+1)} \cdot \#\mathcal{G}_{2k}^t \cdot \sup_{(G,w) \in \mathcal{G}_{2k}^t} |\Pi(G,w)| \quad (3)$$

Nun steht noch aus, Ausdrücke für $\#\mathcal{G}_{2k}^t$ und $|\Pi(G,w)|$ zu finden. Beginnen wir mit $|\Pi(G,w)|$. Sei $M = \max\{\|Y_{11}\|_\infty, \|Y_{12}\|_\infty\}$. Für fixiertes (G,w) unterteile die Menge der Kanten E von G in $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2$, wobei E_0 die Schlingen sind und $E_2 = \{e \in E^c : w(e) = 2\}$ ist. Setze $l = |E_2|$. Damit ist

$$\sum_{e \in E_0 \cup E_1} w(e) = \sum_{e \in E} w(e) - 2l = 2k - 2l$$

Da $\|Y_{ij}\|_\infty \leq M$ gilt wegen $|\mathbb{E}[Y_{ij}^{w(e)}]| \leq M^{w(e)}$

$$|\Pi(G, w)| \leq \prod_{e_0 \in E_0} M^{w(e_0)} \prod_{e_1 \in E_1} M^{w(e_1)} \underbrace{\prod_{e_2 \in E_2} \mathbb{E}(Y_{12}^2)}_{=1 \text{ wegen Normierung}} = M^{2k-2l} \quad (4)$$

Um l zu bestimmen, wähle einen neuen Graph \tilde{G} mit denselben Ecken wie G , dessen Kanten aber die verbindenden Kanten $E_1 \cup E_2$ sind. Für $(G, w) \in \mathcal{G}_{2k}^t$, $t = |G| = |\tilde{G}|$ und die Anzahl der Kanten in $\tilde{G} \geq t-1$, d.h. $|E_1| + l \geq t-1$, gilt:

$$2k = \sum_{e \in E} w(e) \geq \sum_{e \in E_1} w(e) + \sum_{e \in E_2} w(e) \geq 3|E_1| + 2l \geq 3(t-l-1) + 2l$$

Also gilt $2k \geq 3t-3-l \Rightarrow 3k-3t+3 \geq k-l$. Damit folgt $2(k-l) \leq 6(k-t+1)$ und unter der Annahme dass $M \geq 1$ vereinfacht sich Gleichung (4) zu:

$$|\Pi(G, w)| \leq M^{6(k-t+1)}$$

Dies gilt für alle $(G, w) \in \mathcal{G}_{2k}^t$, sodass aus Ungleichung (3) folgt:

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}[\text{Tr}(X_n^{2k})] \leq \sum_{t=1}^{k+1} n^{t-(k+1)} \cdot M^{6(k-t+1)} \cdot \#\mathcal{G}_{2k}^t = \sum_{t=1}^{k+1} \left(\frac{M^6}{n}\right)^{k-t+1} \cdot \#\mathcal{G}_{2k}^t$$

Um die rechte Seite nun weiter abzuschätzen, müssen die Werte $\#\mathcal{G}_{2k}^t$ kontrolliert werden. Es wird sich zeigen, dass folgende Abschätzung gilt:

$$\#\mathcal{G}_{2k}^t \leq \binom{2k}{2t-2} C_{t-1} t^{4(k-t+1)} \quad \forall t \leq k+1$$

wobei $C_{t-1} = \frac{1}{t} \binom{2(t-1)}{t-1}$ die $(t-1)$ -te Catalan-Zahl ist. Den Beweis liefert Lemma 1, das diesem Satz folgt.

Mit diesem Wissen gilt dann weiter

$$\left| \frac{1}{n} \mathbb{E}(\text{Tr}(X_n^{2k})) \right| \leq \sum_{t=1}^{k+1} \left(\frac{M^6}{n}\right)^{(k-t+1)} \binom{2k}{2t-2} C_{t-1} t^{4(k-t+1)},$$

was mit der Indexverschiebung $r = (k-t+1) \Leftrightarrow t = (k-r+1)$ zu folgendem Ausdruck wird:

$$\left| \frac{1}{n} \mathbb{E}(\text{Tr}(X_n^{2k})) \right| \leq \sum_{r=0}^k \left(\frac{M^6(k-r+1)^4}{n}\right)^r \binom{2k}{2k-2r} C_{k-r} \leq \sum_{r=0}^k \left(\frac{M^6(k-r+1)^4}{n}\right)^r \binom{2k}{2r} C_{k-r}$$

Der Term $(k-r+1)^4$ kann durch k^4 abgeschätzt werden. Für $r=0$ verhindert nämlich der Exponent r , dass dadurch der betrachtete Summand kleiner wird.

Es gilt also nun

$$\left| \frac{1}{n} \mathbb{E}(\text{Tr}(X_n^{2k})) \right| \leq \sum_{r=0}^k \left(\frac{M^6 k^4}{n}\right)^r \binom{2k}{2r} C_{k-r} =: \sum_{r=0}^k S_r$$

abzuschätzen. Dies soll über eine geometrische Summe bzw. Reihe geschehen, d.h. man betrachtet den Quotienten aus aufeinander folgenden Summanden. Die Ungleichungen

$$\frac{\binom{2k}{2r}}{\binom{2k}{2r-2}} = \frac{\frac{(2k)!}{(2k)!}}{\frac{(2k-2r)!}{(2k-2r+2)!} \frac{(2r)!}{(2r-2)!}} = \frac{(2k-2r+1)(2k-2r+2)}{(2r)(2r-1)} \leq 2k^2 \quad \forall 0 \leq r \leq k$$

und

$$\frac{C_{l-1}}{C_l} = \frac{\frac{1}{l} \binom{2(l)-2}{l-1}}{\frac{1}{l+1} \binom{2l}{l}} = \frac{(l+1) \frac{1}{(2l)(2l-1)}}{l \frac{1}{l}} = \frac{l+1}{4l-2} \leq 1 \quad \forall l \geq 1$$

liefern dann

$$\frac{S_r}{S_{r-1}} \leq \frac{M^6 k^4}{n} 2k^2 = \frac{2(Mk)^6}{n}$$

d.h.:

$$S_r \leq \left(\frac{2(Mk)^6}{n} \right)^r \cdot S_0 = \left(\frac{2(Mk)^6}{n} \right)^r \cdot C_k$$

Wähle nun $k = k(n) \in \mathbb{N}$ so, dass gilt:

$$cn^{\frac{1}{6}} \leq k(n) \leq \frac{1}{M} \left(\frac{n}{4} \right)^{\frac{1}{6}}$$

für ein (genügend kleines) $c > 0$. Hierzu noch folgende Bemerkungen:

Wir sind am Grenzprozess $n \rightarrow \infty$ interessiert, d.h für $c < \frac{1}{M4^6}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass es für alle $n \geq N$ immer eine natürliche Zahl $k(n)$ gibt, die obige Ungleichungskette erfüllt. Dass dies evtl. für endlich viele n nicht möglich ist, ist also irrelevant für den Beweis.

Das erste Ungleichheitszeichen wird erst etwas später benötigt, die zweite Abschätzung liefert sofort eine weitere Vereinfachung von $\sum_{r=0}^k S_r$. Damit gilt nun nämlich (alle $S_r \geq 0$):

$$\sum_{r=0}^k S_r \leq C_k \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{2(Mk(n))^6}{n} \right)^r \leq C_k \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^r = 2C_k$$

Das Verhältnis aufeinander folgender Catalan-Zahlen wurde oben bereits bestimmt, d.h. es gilt:

$$\frac{C_l}{C_{l-1}} = \frac{2(2l-1)}{l+1} = 4 \frac{l - \frac{1}{4}}{l+1} \leq 4 \quad \forall l \geq 1$$

Es ist $C_0 = \frac{1}{1} \binom{0}{0} = 1$, sodass man nun insgesamt erhält:

$$\left| \frac{1}{n} \mathbb{E}(\text{Tr}(X_n^{2k})) \right| \leq \sum_{r=0}^k S_r \leq 2C_k \leq 2 \cdot 4^k C_0 = 2 \cdot 4^k$$

bzw.:

$$|\mathbb{E}(\text{Tr}(X_n^{2k}))| \leq n \cdot 2 \cdot 4^k$$

Einsetzen in Ungleichung (1) liefert dann

$$\mathbb{P}(\lambda_n(X_n) > 2 + \delta n^{-1/6+\epsilon}) \leq \frac{|\mathbb{E}(\text{Tr}(X_n^{2k}))|}{(2 + \delta n^{-1/6+\epsilon})^{2k(n)}} \leq n \frac{2 \cdot 4^{k(n)}}{(2 + \delta n^{-1/6+\epsilon})^{2k(n)}}$$

$$= 2n \left(1 + \frac{\delta}{2} n^{-1/6+\epsilon}\right)^{-2k(n)} \leq 2n \left(1 + \frac{\delta}{2} n^{-1/6+\epsilon}\right)^{-cn^{1/6}} = 2n \underbrace{\left(1 + \frac{\frac{\delta}{2}}{n^{1/6+\epsilon}}\right)^{n^{1/6+\epsilon}}}_{\xrightarrow{\infty} \exp\left(\frac{\delta}{2}\right)}^{-2cn^\epsilon}$$

Hierbei wurde $-2k(n)$ durch $-2cn^{1/6} \geq -k(n)$ ersetzt. Da $(1 + \frac{\delta}{2} n^{-1/6+\epsilon}) \geq 1$ gilt, ist dies eine gültige Abschätzung.

Für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ und geeignetes $a \in (1, \exp(\frac{\delta}{2}))$ gilt damit:

$$1 < a < \left(1 + \frac{\frac{\delta}{2}}{n^{1/6+\epsilon}}\right)^{n^{1/6+\epsilon}} < \exp\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad , \quad \forall n \geq N$$

Damit gilt (negativer Exponent!)

$$\mathbb{P}(\lambda_n(X_n) > 2 + \delta n^{-1/6+\epsilon}) \leq \frac{2n}{(a^{2c})^{n^\epsilon}}$$

Da $a^{2c} > 1$ ist, ist $\ln(a^{2c}) > 0$ und es gibt ein $M_1 \in \mathbb{N}$ mit $M_1 \ln(a^{2c}) > 2$. Ebenso gibt es ein $M_2 \in \mathbb{N}$ sodass $n^\epsilon > M_1 \ln(n)$ für alle $n \geq M_2$. Für diese $n \geq M_2$ gilt also:

$$\frac{2n}{(a^{2c})^{n^\epsilon}} \leq \frac{2n}{(a^{2c})^{M_1 \ln(n)}} = \frac{2n}{\exp(M_1 \ln(a^{2c}) \ln(n))} = \frac{2n}{n^{M_1 \ln(a^{2c})}} \leq \frac{2n}{n^2} \xrightarrow{\infty} 0$$

Damit ist auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{P}(\lambda_n(X_n) > 2 + \delta n^{-1/6+\epsilon})] = 0$$

gezeigt und der Beweis ist abgeschlossen. □

Es verbleibt nun noch die in der Abschätzung benutzte Ungleichung bzgl. der $\#\mathcal{G}_{2k}^t$ zu beweisen, was das folgende Lemma 1 tut.

3.3 Lemma 1

Seien $t, k \in \mathbb{N}$ mit $t \leq (k+1)$. Dann gilt für \mathcal{G}_{2k}^t aus dem vorherigen Beweis:

$$\#\mathcal{G}_{2k}^t \leq \binom{2k}{2t-2} C_{t-1} t^{4(k-t+1)}$$

mit den Catalan-Zahlen $C_{t-1} = \frac{1}{t} \binom{2(t-1)}{t-1} \quad \forall t \in \mathbb{N}$.

3.4 Beweis von Lemma 1

Wie bereits erwähnt bezeichnet \mathcal{G}_{2k}^t die Menge derjenigen zusammenhängenden Graphen, die durch einen geschlossenen Kantenzug w definiert werden und bei welchen jede Kante mindestens zweimal im Kantenzug enthalten ist. t ist dabei die Anzahl der vorkommenden Knoten (ohne Vielfachheiten) und $2k$ die Zahl der (mit Vielfachheiten gezählten) vorkommenden Kanten. Die Idee ist nun, die möglichen Kantenzüge in einer Art und Weise zu codieren, dass ersichtlich wird, wie viele Elemente \mathcal{G}_{2k}^t hat. Durch den folgenden Beweis führt ein veranschaulichendes Beispiel, nämlich der Graph, der durch das Tupel (bzw. den Kantenzug)

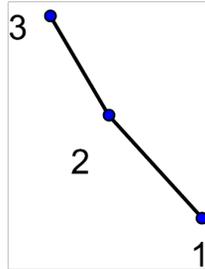
$$w = (1231454636718146367123)$$

gegeben ist. Es ist offensichtlich $t=8$ und da das Tupel 22 Elemente hat entspricht dies der Kantenzuglänge $2k = 22$, d.h. w beschreibt in diesem Fall ein Element in $\mathcal{G}_{2,11}^8 = \mathcal{G}_{22}^8$.

Die Betrachtung des ganzen Graphen ohne weitere Modifikationen ist an dieser Stelle ungünstig. Daher soll nun aus dem gegebenen Kantenzug ein neuer Graph, genauer gesagt, ein Baum konstruiert werden. Gleichzeitig mit dem Graphen soll auch eine alternative Beschreibung in Form eines Tupels $\in \{+, -, 1, \dots, 8\}^{22}$ entstehen. Dieses Tupel wird als vorläufiger Code bezeichnet. Dies geschieht folgendermaßen. Die erste Zahl in w definiert nur einen Knoten. Der vorläufige Code wird die Kanten des Graphen beschreiben, daher bleibt das beschreibende Tupel noch leer:



Folgt in der Sequenz, die w beschreibt, an einer Stelle eine Zahl, die zum ersten Mal auftaucht (also ein neuer Knoten), so definiert dies ein Kante-Knoten-Paar im modifizierten Graph (und im beschreibenden Tupel ein „+“). Im Beispiel entstehen also in den nächsten 2 Schritten zwei neue Knoten und Kanten, die jeweils im Code ein „+“ erzeugen:

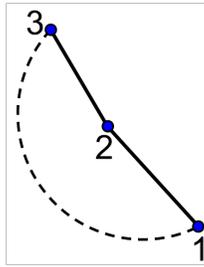


vorläufiger Code: (++)...

Kommt in w eine Zahl nicht zum ersten Mal vor, so gibt es zwei Möglichkeiten:

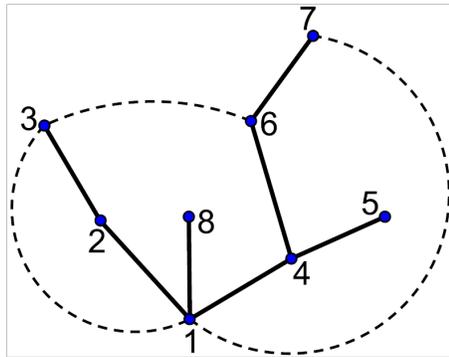
Taucht die Kante zum zweiten Mal auf und wurde die vorangegangene durch ein „+“ charakterisiert, so entsteht im Graphen keine neue Kante und im beschreibenden Code wird ein „-“ ergänzt. Bis hierhin entspricht dies komplett dem Vorgehen beim Beweis zur Konvergenz von Wigner-Matrizen gegen den Wigner'schen Halbkreis.

Ist die Kante neu (d.h. die Kante erzeugt im Graphen einen Kreis der Länge ≥ 3), so soll diese Kante im modifizierten Graphen nicht ergänzt werden. Im vorläufigen Code wird nun die Zahl erfasst, zu der die Kante geführt hätte. Solche Kanten seien als „neutrale Kanten“ bezeichnet. Im Beispielkantenzug kommt dieser Fall vor, nachdem die Kante (2,3) erzeugt wurde:



vorläufiger Code (+ + 1...)

Durch die Konstruktionsvorschrift entsteht als modifizierter Graph zwangsweise ein Baum, da immer dann, wenn der nächste Schritt der Baumeigenschaft widersprechen würde (nämlich dann, wenn eigentlich ein Kreis der Länge ≥ 3 entstehen würde), dieser Konstruktionsschritt ausgelassen wird. Als modifizierter Graph ergibt sich schließlich:



Der zugehörige vorläufige Code ist damit

$$(+ + 1 + + - + 36 + 1 + - - - 36 - 1 - - 1)$$

Die letzte 1 kommt daher, dass der Kantenzug immer zu einem geschlossenen ergänzt wird, d.h. nach dem letzten Knoten in w kehrt der Kantenzug zum ersten konstruierten Punkt zurück (, sonst wären es insgesamt ja auch keine 22 Kanten). Es sollte klar sein, dass es absolut willkürlich ist (wenn auch zur Veranschaulichung sinnvoll), dass w mit der Zahl 1 startet und damit die Konstruktion des modifizierten Graphen mit dieser Zahl beginnt.

Soll $\#\mathcal{G}_{2k}^t$ bestimmt werden, liegt es auf den ersten Blick nahe, bei gegebenem (k, t) die möglichen vorläufigen Codewörter zu zählen. Ein entscheidendes Hindernis ist an dieser Stelle jedoch, dass man den Kantenzug w nicht wieder aus dem vorläufigen Code rekonstruieren kann, es also mehrere Realisierungen zum gleichen Code gibt. Die Bestimmung aller erlaubten Codewörter würde also nicht $\#\mathcal{G}_{2k}^t$ entsprechen. Im Beispielkantenzug erkennt man dieses Problem nach Erreichen des 14. Knotens. Der Kantenzug kehrt vom Knoten 8 zum Knoten 1 zurück (im vorläufigen Codewort die Sequenz $\dots + - \dots$). In der codierten Beschreibung folgt ein „-“. Es führen jedoch zwei Kanten vom Knoten 1 weg, die erst einmal überschritten wurden: Kante (14) und Kante (12). Damit ist die eindeutige Zuordnung eines Kantenzuges zu gegebenem vorläufigen Code nicht mehr möglich.

Es ist klar, dass diese Probleme im vorläufigen Code nur bei einem „-“ auftreten können. Ein „+“ erzeugt eine neue Kante und einen neuen Knoten, dessen Bezeichnung eigentlich irrelevant ist. Eine neutrale Kante hat im vorläufigen Code natürlich einen Endknoten als Charakterisierung. Auch hier ist also klar, zu welchem Knoten der Kantenzug an dieser Stelle führt. Eine Lösung wäre

nun, jedes „-“ mit einem Index, der auf den Zielknoten verweist, zu versehen. dabei würden jedoch redundante Informationen im Code auftauchen, wodurch im Endeffekt nur noch schwieriger wäre, die tatsächlich möglichen Pfade abzuzählen bzw. abzuschätzen.

Der folgende Abschnitt spezifiziert die Situationen, in genau denen der Code verändert werden muss. Dazu zwei Begriffsklärungen:

Definition 1: Als **reduzierter Code** wird das Tupel bezeichnet, das aus dem vorläufigen Code entsteht, wenn man sukzessive alle Paare der Form „+-“ entfernt.

Diese Definition hat folgenden Sinn: Eine Sequenz „+-“ kann immer entschlüsselt werden, da ein „+“ einen neuen Ast im entstehenden Baum darstellt und damit für das anschließende „-“ nur die Kante zurück zum vorangegangenen Knoten übrig bleibt. Eine solche Sequenz beschreibt also beim Durchlaufen des Kantenzuges immer einen Teilbaum, zu dessen Wurzel man zwangsweise am Ende der Sequenz zurückkehrt. Bei der Konstruktion eines eindeutigen Codes, kann man also diese Teilstücke außer Acht lassen und muss nur dafür sorgen, dass vor und hinter diesem Abschnitt Eindeutigkeit gewährleistet ist. Aus diesem Grunde bildet man hier das reduzierte Codewort und untersucht dieses statt des den vorläufigen Code.

Das obige Beispiel für w hätte also das reduzierte Codewort $(+ + 1 + + 36 + 1 - - 36 - 1 - - 1)$

Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge man den vorläufigen Code reduziert. Dies sieht man folgendermaßen ein:

Betrachtet man im vorläufigen Code die größtmöglichen verschwundenen Abschnitte, dann besteht jede solche Sequenz $w_i \dots w_{i+j}$ nur aus den Zeichen „+“ und „-“ und zwar taucht jedes Zeichen gleich oft auf und jede Sequenz $w_i \dots w_{i+j'}$ enthält für alle $0 \leq j' \leq j$ höchstens gleich viele „-“-Zeichen wie „+“-Zeichen. Ursache dafür ist die Art und Weise, wie das Codewort entsteht, dass nämlich, bevor eine Kante ein zweites Mal durchlaufen wird (-), sie natürlich zuvor zum ersten Mal erschienen sein muss (+).

Gäbe es nun eine Reihenfolge der Reduzierung, die nicht den kompletten Abschnitt verschwinden lässt, so müsste, da immer „+-“-Paare verschwinden, am Ende eine Sequenz der Form „-... +...+“ übrig bleiben, da sonst noch weiter reduziert werden könnte. Entspricht das letzte „-“ der Komponente w_j im Kantenzug w , so hätte der Abschnitt „ $w_i \dots w_j$ “ ursprünglich mehr „-“-Zeichen als „+“-Zeichen gehabt ($\hat{!}$).

Definition 1: Als **kritischen Knoten** bezeichnet man eine Komponente w_i im Tupel $w = (w_1 \dots w_{2k})$, wobei gelten muss:

- (1) (w_{i-1}, w_i) ist eine neutrale Kante.
- (2) Es gibt zwei verschiedene Kanten (w_i, w_j) und (w_i, w_l) , die keine neutralen Kanten sind und jeweils genau einmal vom Kantenzugstück $(w_1 \dots w_i)$ durchlaufen werden.
- (3) Im reduzierten Codewort folgt auf w_i ein „-“

Kritische Knoten sind also diejenigen, die beim Durchlaufen des Kantenzuges w vormals durch eine neutrale Kante erreicht wurden, zu denen man im Anschluss ohne Überschreiten neutraler Kanten gelangt und ein „-“ im vorläufigen Code nun nicht eindeutig interpretiert werden kann. Im reduzierten Code folgt diese Uneindeutigkeit direkt auf den „Sprung“ zum kritischen Knoten. Betrachtet man den gesamten Kantenzug, so kann es sein, dass vor der Uneindeutigkeit noch Teilbäume vom kritischen Knoten aus konstruiert werden. Genau diese fallen jedoch beim reduzierten

Codewort gerade heraus.

Im Beispielkantenzug wäre dementsprechend nur die 14. Komponente, die dem Knoten 1 entspricht, kritisch.

Die folgendende Definition eines Codewortes liefert nun tatsächlich eine geeignete (d.h insbesondere eindeutige) Umschreibung des Kantenzuges w :

Definition 2: Das **Füredi-Komlós-Codewort** zum Kantenzug w ist ein Tupel, dass aus dem vorläufigen Codewort zu w folgendermaßen hervorgeht:

Betrachtet man einen kritischen Knoten, so folgt ihm im reduzierten Code eine Sequenz von Minussen. Das letzte solche „-“, das im Kantenzug w der Kante (w_j, w_j) entspreche, benenne man im vorläufigen Code in „ $-w_j$ “ um und erhalte so das zugehörige Füredi-Komlós-Codewort. Die mit „ $-w_j$ “ identifizierten Knoten seien als **Schlüsselknoten** bezeichnet,

Dem Kantenzug $w = (+ + 1 + + - + 3 6 + 1 + - - - 3 6 - 1 - - 1)$ würde demnach der Füredi-Komlós-Code $(+ + 1 + + - + 3 6 + 1 + - - - 6 3 6 - 1 - - 1)$ entsprechen.

Dass aus einem Füredi-Komlós-Code der Kantenzug eindeutig rekonstruierbar ist, sieht man folgendermaßen:

Die bisherigen Überlegungen haben gezeigt, dass das vorläufige Codewort dann eindeutig interpretiert werden könnte, wenn man nach Erreichen eines kritischen Knotens w_i wüsste, welche Kanten mit den nachfolgenden „-“ Zeichen im Code gemeint sind. (Wir betrachten an dieser Stelle nur das reduzierte Codewort, d.h. uninteressante „Abzweigungen“ im Kantenzug werden für einen Moment ignoriert.) Der Füredi-Komlós-Code liefert aber genau diese Information.

Die Sequenz „ $- \dots - w_j$ “ entspricht einem Weg auf dem bereits konstruierten Baum, da hier keine neutralen Kanten vorkommen. Vom Knoten w_i führt jedoch nur ein einziger Weg direkt zu w_j . Da nämlich nur Minusse vorkommen, kann kein Ast des Baumes zweimal überschritten werden und wenn es zwei alternative Wege zu w_j gäbe, dann hätte der modifizierte Graph einen Kreis der Länge ≥ 3 , wäre also kein Baum ($\not\perp$).

Der Beweis unserer Abschätzung hat sich also darauf reduziert, die Anzahl möglicher Füredi-Komlós-Codewörter zu gegebenen $k, t \in \mathbb{N}$ zu bestimmen, da diese Größe gleichzeitig auch $\#\mathcal{G}_{2k}^t$ nach oben beschränkt.

Es sei dazu mit $\mathcal{G}_{2k}^{t,i}$ die Menge der Paare aus Graphen und Kantenzügen mit genau i vielen Schlüsselknoten bezeichnet.

Im Folgenden soll nun $\#\mathcal{G}_{2k}^{t,i}$ abgeschätzt werden, was in der Summe dann auch $\#\mathcal{G}_{2k}^t$ abschätzt:

Aus einem vorläufigen Code mit i vielen Schlüsselknoten gehen höchstens t^i Füredi-Komlós-Codes hervor, da es nur t viele verschiedene Indizes v für ein „ $-v$ “ geben kann.

Nun genügt es, die vorläufigen Codes mit genau i vielen Schlüsselknoten abzählen:

- (1) Der konstruierte Baum hat t viele Knoten und damit $t - 1$ viele Kanten. Da im vorläufigen Codewort jeder solchen Kante einmal ein „+“ und einmal ein „-“ entspricht, gibt es $\binom{2k}{2(t-1)}$

Möglichkeiten, wo Elemente aus $\{+, -\}$ stehen können. Alternativ hätte man natürlich auch die Stellen für die neutralen Kanten festlegen können.

- (2) Stehen diese Komponenten im Code fest, muss man die Stellen festlegen, wo ein „+“ stehen soll. Da jedem „-“ ein entsprechendes „+“ vorangehen muss, führt dies auf dasselbe Problem wie im Beweis der Konvergenz von Wigner-Matrizen gegen den Wigner’schen Halbkreis. Diese Größe ist also die $(t-1)$ -te Catalan-Zahl C_{t-1} .
- (3) Die verbleibenden $2k - 2(t-1) = 2(k-t+1)$ Stellen im Code sind Zahlen aus $\{1, \dots, t\}$. Es ergeben sich hierdurch also maximal $t^{2(k-t+1)}$ weitere Möglichkeiten für das vorläufige Codewort.

Damit gilt also:

$$\#\mathcal{G}_{2k}^{t,i} \leq t^i \binom{2k}{2t-2} t^{2(k-t+1)} C_{t-1}$$

Es ist noch unklar, wie viele Schlüsselknoten es bei gegebenen k, t geben kann. Es wird nun gezeigt, dass es bei m vielen neutralen Kanten höchstens $m-1$ viele Schlüsselknoten geben kann.

- (i) Vor dem ersten Schlüsselknoten muss im vorläufigen Code ein kritischer Knoten kommen und damit eine neutrale Kante.
 - Das ist klar nach Definition eines Schlüsselknotens.
- (ii) Nach dem letzten Schlüsselknoten muss noch eine neutraler Kante folgen.
 - Das ist auch klar, da ein Schlüsselknoten nur dann nötig ist, wenn im konstruierten Baum von einem kritischen Knoten noch zwei Äste fortführen, die erst einmal durchlaufen wurden. Der nächste Schlüsselknoten legt fest, welcher Kante der Kantenzug zunächst folgt. Würden jetzt nur noch im Code Elemente aus $\{+, -\}$ folgen, so könnte der Kantenzug vom letzten Schlüsselknoten nicht wieder zurück zum kritischen Knoten führen. Der „Rückweg“ entlang der „-“-Kette ist nicht möglich, da diese Äste bereits zweimal vom Kantenzug durchlaufen wurden und ein anderer Kantenzug zum kritischen Knoten würde bedeuten, dass der modifizierte Graph kein Baum ist (♣).
- (iii) Auch zwischen zwei Schlüsselknoten muss ein neutraler Knoten liegen.

Um das zu sehen, nehme man das Gegenteil an und es lägen im vorläufigen Code zwischen zwei solchen Schlüsselknoten „- u “ und „- v “ nur Elemente aus $\{+, -\}$. Betrachtet man nun das (vollständig) reduzierte Codewort, dann entsprechen dort die Schlüsselknoten per definitionem genau den Enden von „-“-Ketten nach kritischen Knoten. Kämen im reduzierten Code nach „- u “ nur Minusse, so dürfte „- u “ gar keinen Index nach Konstruktionsvorschrift des Füredi-Komlós-Codes haben. Sind hingegen noch Plusse zwischen den Schlüsselknoten, dann ist mindestens noch eine „ $\dots + \dots$ “-Sequenz zwischen den Schlüsselknoten, im Zweifelsfall „+ $-v$ “ (♣).

Da es $2(k-t+1)$ neutrale Kanten gibt, ist also i durch $2(k-t+1)-1$ beschränkt, also

$$\#\mathcal{G}_{2k}^t = \sum_{i=0}^{2(k-t+1)-1} \#\mathcal{G}_{2k}^{t,i} \leq \binom{2k}{2t-2} t^{2(k-t+1)} C_{t-1} \sum_{i=0}^{2(k-t+1)-1} t^i$$

Um die Summe abzuschätzen, betrachte man zunächst $t > 1$. Dann gilt mit der geometrischen Summenformel:

$$\sum_{i=0}^{2(k-t+1)-1} t^i = \left| \sum_{i=0}^{2(k-t+1)+1} t^i \right| = \frac{|t^{2(k-t+1)+1} - 1|}{|t - 1|} \leq |t^{2(k-t+1)+1} - 1| \leq t^{2(k-t+1)+1}$$

Im Falle $t = 1$, das heißt es kommt nur ein Knoten im Kantenzug vor, stimmt dies zwar nicht, dennoch erhält man durch Einsetzen von $t^{2(k-t+1)}$ eine gültige Abschätzung für $\#\mathcal{G}_{2k}^t$. Die rechte Seite ist in diesem Fall nämlich $1^{2k} = 1$. Andererseits gibt es aber auch nur einen Kantenzug mit einem Knoten und $2k$ Kanten, nämlich denjenigen, der aus $2k$ -mal derselben Schlinge besteht. Mit dieser letzten Abschätzung gilt also insgesamt

$$\#\mathcal{G}_{2k}^t \leq \binom{2k}{2t-2} t^{2(k-t+1)} C_{t-1} t^{2(k-t+1)} = \binom{2k}{2t-2} C_{t-1} t^{4(k-t+1)}$$

und das Lemma ist damit bewiesen. □