

Längste aufsteigende Teilfolge RSK-Algorithmus und Verbindung zur Tracy-Widom-Verteilung

Matthias Thiel und Steffen Meyer

Zufallsmatrizen
Prof. Dr. Speicher
SoSe 2012
Universität des Saarlandes
August 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Längste Aufsteigende Teilfolge	3
1.1	Einführung	3
1.2	Definition: Längste aufsteigende Teilfolge	3
1.3	Beispiel:	3
1.4	Geometrisches Modell	4
1.5	Beispiel	4
1.6	Asymptotisches Verhalten	5
1.7	Schwankungen	5
1.8	Einblick in den Beweis von Baik, Deift und Johansson	6
2	RSK-Algorithmus	7
2.1	Definition: Young-Diagramme und Young-Tableaus	7
2.2	Der RSK-Algorithmus	7
2.3	Beispiel	8
2.4	Inverse RSK-Algorithmus:	9
2.5	Beispiel	10
2.6	Folgerung	11
2.7	Plancherel-Maß	11
3	Zusammenhang mit der längsten aufsteigenden Teilfolge	13
3.1	Lemma	13
3.2	Definition: Kanonische Sequenzen	13
3.3	Beispiel	13
3.4	Beweis von Lemma 3.1	13
3.5	Folgerung	14
3.6	Beispiel	15

1 Längste Aufsteigende Teilfolge

1.1 Einführung

In der Informatik versucht man Verfahren zu entwickeln, um eine größtmögliche Teilfolge zu finden, deren Elemente der Größe nach geordnet sind (vom kleinsten zum größten Wert). Diese Teilfolge ist nicht notwendigerweise zusammenhängend, oder eindeutig. Die Theorie der längsten aufsteigenden Teilfolge steht im Zusammenhang mit vielen mathematischen Disziplinen wie z.B. der Darstellungstheorie, der Physik und der Theorie der Zufallsmatrizen.

1.2 Definition: Längste aufsteigende Teilfolge

Es sei S_n die Permutationsgruppe der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$. Für eine beliebige Permutation $\sigma \in S_n$ bezeichnen wir eine Folge $\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_k)$ als aufsteigende Teilfolge der Länge k , wenn gilt:

$$1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq n \text{ und}$$

$$1 \leq \sigma(x_1) < \sigma(x_2) < \dots < \sigma(x_k) \leq n$$

Wir bezeichnen eine aufsteigende Teilfolge $\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_k)$ als eine längste aufsteigende Teilfolge (engl. Longest increasing subsequence, LIS) von σ , wenn keine aufsteigende Teilfolge $\sigma(y_1), \dots, \sigma(y_l)$ existiert mit $l > k$. Die Länge k einer längsten aufsteigenden Teilfolge der Permutation σ bezeichnen wir mit $L_n(\sigma)$.

1.3 Beispiel:

Sei $n = 7$ und σ gegeben durch:

$$\sigma = \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 7 & 4 & 6 \end{array}$$

Dann ist eine aufsteigende Teilfolge von σ gegeben durch $\{\sigma(2), \sigma(4), \sigma(6), \sigma(7)\} = \{1, 2, 4, 6\}$ und hat die Länge $L_7(\sigma) = 4$. In diesem Fall ist sie eindeutig.

Folgendes Beispiel zeigt, dass die längste aufsteigende Teilfolge nicht immer eindeutig sein muss:

Sei $n = 4$ und σ gegeben durch

$$\sigma = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

Dann finden wir als aufsteigende Teilfolgen $\{2, 3, 4\}$ und $\{1, 3, 4\}$ welche beide die Länge 3 haben. Da wir keine aufsteigende Teilfolge finden, welche größer ist als 3 sind beide Sequenzen von oben eine LIS von σ .

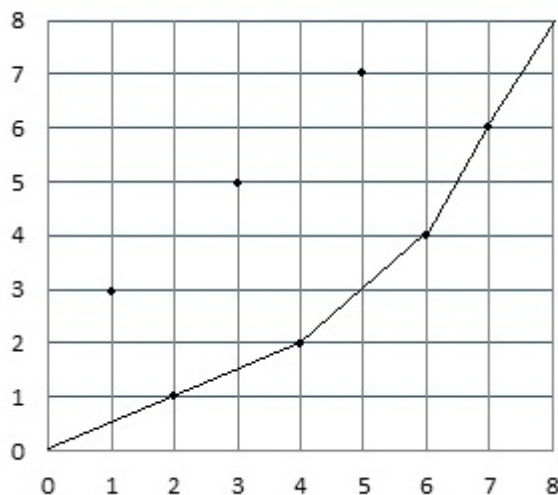
1.4 Geometrisches Modell

Sei $(x_n)_{n \in \{1, \dots, N\}}$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Ein etwas anschaulicherer Weg L_n darzustellen ist N Punkte $U_n = (x_n; \sigma(x_n)) \in \mathbb{N}^2, n \in \{1, \dots, N\}$ in ein Koordinatensystem einzutragen, wobei σ eine beliebige Permutation von x_n ist. Nun zeichnet man einen Graphen G , der die Punkte $(0;0)$ und $(x_n + 1, \max_n(\sigma(x_n) + 1))$ so verbindet, dass G stückweise linear und streng monoton steigend ist und die Menge $\{n \in \{1, \dots, N\} | U_n \in G\}$ maximiert. Die y-Koordinaten, der auf diese Weise verbundenen Punkte, entspricht einer längsten aufsteigenden Teilfolge der Permutation σ .

1.5 Beispiel

$$\sigma = \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 7 & 4 & 6 \end{array}$$

somit ist die LIS = $\{1, 2, 4, 6\}$



1.6 Asymptotisches Verhalten

Die Frage die sich nun über die LIS stellt, ist wie verhält sich ihre Länge, also L_n asymptotisch? Zu diesem Thema haben viele Mathematiker Ergebnisse beigetragen. In den frühen 70-er Jahren konnte von Hammersley gezeigt werden, dass

$$P(|n^{-\frac{1}{2}}L_n - c| \geq \epsilon) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

mit

$$P(\sigma) = \frac{1}{n!} \forall \sigma \in S_n \text{ und somit}$$
$$P(L_n = x) = \frac{\#\{\text{Permutationen } \sigma \in S_n | L_n(\sigma) = x\}}{n!}$$

für $n, x \in \mathbb{N}$ und für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $\frac{\pi}{2} \leq c \leq e$.

In den späten 70-er Jahren wurde dann durch Logan und Shepp gezeigt, dass $c \geq 2$ ist. Unabhängig von diesen Ergebnissen zeigten Vershik und Kerov, durch gruppentheoretische und kombinatorische Argumente, dass $c \leq 2$.

Durch Kombination dieser Ergebnisse, gilt für das asymptotische Verhalten von L_n :

$$P(|n^{-\frac{1}{2}}L_n - 2| \geq \epsilon) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Welches als Gesetz der großen Zahlen für L_n angesehen werden kann.

1.7 Schwankungen

In diesem Abschnitt wollen wir über Schwankungen von L_n um den Erwartungswert reden. Typischerweise würde man nach dem zentralen Grenzwertsatz davon ausgehen, dass diese Schwankungen für $n \rightarrow \infty$ gegen eine Normalverteilung konvergieren. Doch Anfang der 90-er Jahre wurde sowohl von Odlyzko und Rains, sowie von Kim vermutet, dass die Standardabweichung von L_n gegen $c \cdot n^{\frac{1}{6}}$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ konvergiert, und dass $\frac{L_n - 2\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{6}}}$ eine besondere Verteilung besitzt.

Im Jahr 1999 konnte diese Vermutung von Baik, Deift und Johansson gezeigt werden (30 Jahre nach den ersten Erfolgen zu diesem Thema). Sie zeigten, dass für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$P\left(\frac{L_n - 2\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{6}}} \leq \xi\right) \rightarrow F(\xi)$$

wobei $F(\cdot)$ die Verteilungsfunktion einer Tracy-Widom verteilten Zufallsvariable ist.

1.8 Einblick in den Beweis von Baik, Deift und Johansson

Wir werden in dieser Ausarbeitung versuchen einen kleinen Einblick in den Beweis von Baik, Deift und Johansson zu geben. Dabei werden wir unser Hauptaugenmerk auf eine wichtige Komponente des Beweises werfen, den RSK-Algorithmus. Zuerst wollen wir aber die wichtigen Argumente des Beweises der Reihe nach vorstellen:

1. Der RSK Algorithmus verbindet Permutationen mit Young-Diagrammen, wodurch gezeigt werden kann, dass die Länge der längsten aufsteigende Teilfolge gleich der Länge der ersten Zeile des Young-Diagramms ist.
2. Man definiert das Plancherel-Maß, welches die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass eine zufällige Permutation aus S_n durch den RSK-Algorithmus auf ein Paar von Young-Tableaus der Struktur λ abbildet (λ Partition von n).
3. Das Plancherel-Maß kann mit einem System von nicht-kreuzenden Pfaden auf einen gerichteten Graphen in Verbindung gebracht werden. Die Länge der 1. Reihe des Young-Diagramms ist gleich dem Wert des höchsten Punktes im obersten Pfad.
4. Durch Anwendung des LGV-Theorems (eine Verallgemeinerung des Satzes von Karlin-McGregor (Vorlesung)) erhält man eine Determinantenform für das Gewicht von nicht-kreuzenden Pfaden. Dadurch ergibt sich eine einfache Beziehung zwischen dem Plancherel-Maß und dem Schur-Maß.
5. Durch einige numerische Verfahren zeigt man, dass das Schur-Maß auch eine Determinantenform hat. Das impliziert ein ähnliches Ergebnis für die Höhe von nicht-kreuzenden Pfaden, auf einer fixierten vertikalen Linie. Der Wert des höchsten Punktes auf dieser Linie ist gleich der Länge der 1. Reihe des Young-Diagramms.
6. Der Kern dieser Determinantenform konvergiert nach Skalierung gegen den Airy-Kern. Daraus folgt, dass der Determinantenprozess gegen den Airy-Prozess konvergiert. D.h. der größte Punkt des Schur-Maßes konvergiert gegen die Tracy-Widom Verteilung.
(Quellen Kapitel 1: [1], [3])

2 RSK-Algorithmus

2.1 Definition: Young-Diagramme und Young-Tableaus

Ein Young Diagramm ist eine Anordnung von Kästchen in Zeilen, welche linksbündig untereinander geschrieben werden, so dass die Länge der Zeilen von oben nach unten monoton fallend ist.

Bezeichnet man mit λ_i die Länge der i -ten Zeile, so erhält man eine Partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ von n , wobei n die Anzahl der Kästchen in dem Diagramm ist, und wir sagen das Diagramm hat die Struktur λ .

Ein Young-Tableau ist ein Young Diagramm welches in den Kästchen die Einträge 1 bis n hat, so dass die Einträge in jeder Zeile von links nach rechts und in jeder Spalte von oben nach unten streng monoton wachsend sind.

2.2 Der RSK-Algorithmus

Der RSK(Robinson-Schensted-Knuth)-Algorithmus ist eine bijektive Abbildung zwischen Paaren von Young-Tableaus welche die selbe Struktur haben und Permutationen. Er wurde zuerst 1938 von Robinson und in einer anderen Form 1961 von Schensted für gewöhnliche Permutationen und Young-Tableaus entdeckt und 1970 von Knuth für Permutationen mit wiederholenden Elementen und einer allgemeineren Variante von Young-Tableaus.

Um zu zeigen, dass eine Bijektion zwischen der Permutationsgruppe S_n und Paaren von Young-Tableaus der selben Struktur und der Größe n besteht, führen wir zunächst den RSK-Algorithmus ein:

Sei P ein Young-Tableau und x eine Zahl, welche noch nicht in P enthalten ist. Dann kann x folgendermaßen in P eingefügt werden:

Schritt 1: Sei R die erste Zeile von P

Schritt 2: Ist x kleiner als ein beliebiger Eintrag in R mache folgendes:

Schritt 2a: Suche den kleinsten Eintrag y in R der größer als x ist und ersetze y durch x

Schritt 2b: R sei die nächste Zeile von P , dann wiederhole Schritt 2 für $x := y$

Schritt 3: Da x nun größer ist als alle Einträge in R , füge x am Ende der Zeile R ein.

Dieser Algorithmus ermöglicht es uns, eine beliebige Permutation $\sigma \in S_n$ eindeutig auf ein Paar von Young-Tableaus (P, Q) der selben Struktur abzubilden. Dazu konstruieren wir rekursiv eine Folge von Paaren von Young-Tableaus $(P_1, Q_1), \dots, (P_n, Q_n)$ wie folgt:

$$P_1 = \boxed{\sigma(1)}, \quad Q_1 = \boxed{1}$$

Gegeben P_i, Q_i erhalten wir P_{i+1} indem wir $\sigma(i+1)$ gemäß dem RSK-Algorithmus in P_i einfügen, und Q_{i+1} , indem wir Q_i an der Stelle an der P erweitert wurde um den Eintrag i erweitern.

2.3 Beispiel

Es sei $n=6$, und $\sigma \in S_6$ gegeben durch

$$\sigma = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 1 & 7 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\text{Es ist } P_1 = \boxed{4}, \quad Q_1 = \boxed{1}$$

$P_1 \rightarrow P_2$: $x = 6$, da $6 > 4$ füge x am Ende der 1. Zeile ein.

$$P_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 6 \\ \hline \end{array}, \quad Q_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$P_2 \rightarrow P_3$: $x = 2$, da $2 < 4$ ersetze 4 durch 2, setze $x := 4$ und versuche 4 in der 2. Zeile von P einzufügen. Da diese leer ist, schreibe 4 an die 2. Reihe von P .

$$P_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 6 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \quad Q_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

$P_3 \rightarrow P_4$: $x = 1$, $1 < 2$, also ersetze 2 durch 1 und versuche 2 in der 2. Zeile von P einzufügen. Da $2 < 4$ ersetze 4 durch 2 und schreibe 4 in die 3. Zeile von P .

$$P_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 6 \\ \hline 2 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \quad Q_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}$$

$P_4 \rightarrow P_5$: $x = 7$, $7 > 6 > 1$, also füge 7 am Ende der 1. Zeile ein.

$$P_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 7 \\ \hline 2 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array},$$

$$Q_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

$P_5 \rightarrow P_6 : x = 3, 3 < 6$ also ersetze 6 durch 3, dann versuche 6 in der 2. Zeile von P einzufügen. da $6 > 2$ schreibe 6 ans Ende der 2. Zeile von P.

$$P_6 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array},$$

$$Q_6 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

$P_6 \rightarrow P_7 : x = 5, da 5 < 7$ ersetze 7 durch 5. Da $7 > 6 > 2$ wird 7 am Ende der 2. Zeile von P eingefügt.

$$P_7 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & 7 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array},$$

$$Q_7 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

Also:

$$\sigma \xrightarrow{RSK-Alg.} (P_n, Q_n)$$

Hierbei wird P_n von σ durch den RSK-Algorithmus erzeugt, während Q_n die Information enthält, in welcher Reihenfolge P_n aufgebaut wird. Durch die Informationen in Q_n kann man σ bereits wieder eindeutig durch (P_n, Q_n) bestimmen, ohne die komplette Folge $(P_k), k = 1, \dots, n$ zu kennen. Wie dies funktioniert zeigt der Inverse RSK-Algorithmus.

2.4 Inverse RSK-Algorithmus:

Im folgenden zeigen wir, wie man ausgehend von einem beliebigen Paar Young-Tableaus (P_n, Q_n) der selben Struktur die Permutation $\sigma \in S_n$ erhält, welche durch den RSK-Algorithmus auf (P_n, Q_n) abgebildet wird. Dazu konstruieren wir rekursiv eine Folge von Paaren von Young-Tableaus $(P_n, Q_n), \dots, (P_1, Q_1)$, und die Permutation $\sigma(n), \dots, \sigma(1)$:
Ausgehend von einem Paar von Young-Tableaus (P_i, Q_i) wobei Q_i die Einträge $1, \dots, i$ hat, erhalten wir (P_{i-1}, Q_{i-1}) durch folgenden Algorithmus:

Schritt 1: Suche den Eintrag i in Q und den Eintrag x welcher in P an der selben Stelle steht und entferne die beiden Einträge.

Schritt 2a: Falls x in der ersten Zeile von P stand, definiere $\sigma(i) = x$.

Schritt 2b: Falls x nicht in der ersten Zeile stand, suche den kleinsten Eintrag y in der Zeile darüber, welcher kleiner als x ist und ersetze ihn durch x.

Dann wiederhole Schritt 2 mit y statt x bis y aus der ersten Zeile von P ist.

Beachte: Da man in Q jeweils den größten Eintrag weglässt, sind in jedem Q_i die Einträge $1, \dots, i$ sodass wir im 1. Schritt des Algorithmus immer den größten Eintrag von Q suchen. Erhält man schließlich (P_1, Q_1) , definieren wir $\sigma(1) = x$, wobei x der verbleibende Eintrag in P_1 ist.

Man sieht leicht, dass die so gefundene Permutation σ durch den RSK-Algorithmus wieder auf das Paar (P_n, Q_n) abgebildet wird. Erstaunlich ist, dass insbesondere die Rekursionsfolge (P_n, Q_n) mit der aus der Abbildung $\sigma \mapsto (P_n, Q_n)$ übereinstimmt.

2.5 Beispiel

Es sei folgendes Paar von Standard-Young-Tableaus gegeben:

$$P_7 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & 7 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \quad Q_7 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

$(P_7, Q_7) \rightarrow (P_6, Q_6) : i = 7, x = 7$, da x in der 2. Zeile steht, suchen wir zunächst die größte Zahl aus der ersten Zeile von P welche kleiner als x ist und ersetzen diese durch 7. In diesem Fall ist es die 5. Da die 5 in der ersten Zeile von P stand wird sie weggelassen. $\rightarrow \sigma(7) = 5$

$$P_6 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \quad Q_6 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

$(P_6, Q_6) \rightarrow (P_5, Q_5) : i = 6, x = 6$, Da x wieder in der 2. Zeile steht, ersetzen wir wieder die größte Zahl aus der ersten Zeile von P welche kleiner als x ist und ersetzen sie. Hier fällt also die 3 weg und 6 kommt an ihre Stelle.

$\rightarrow \sigma(6) = 3$

$$P_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 7 \\ \hline 2 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \quad Q_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

$(P_5, Q_5) \rightarrow (P_4, Q_4) : i = 5, x = 7$ Da 7 schon in der ersten Zeile von P steht, definiere $\sigma(5) = 7$ und streiche 7 aus P .

$$P_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 6 \\ \hline 2 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \quad Q_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}$$

$(P_4, Q_4) \rightarrow (P_3, Q_3) : i = 4, x = 4$, da x in der 3. Zeile von P steht, ersetze die größte Zahl aus der 2. Zeile von P welche kleiner als x ist. Hier wird also die 2 durch 7 ersetzt, dann suchen wir die größte Zahl aus der 1. Zeile von P welche kleiner als 2 ist und finden nur die 1. Die 1 wird also durch 2 ersetzt und wir definieren $\sigma(4) = 1$

$$P_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 6 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \quad Q_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

$(P_3, Q_3) \rightarrow (P_2, Q_2) : i = 3, x = 4$, wir finden als größte Zahl aus der ersten Zeile von P welche kleiner als x ist die 2. Wir ersetzen also die 2 durch 4 und halten fest: $\sigma(3) = 2$

$$P_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 6 \\ \hline \end{array}, \quad Q_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$(P_2, Q_2) \rightarrow (P_1, Q_1) : i = 2, x = 6$ da x in der ersten Zeile von P steht, streiche 6 in P und definiere $\sigma(2) = 6$

$$P_1 = \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}, \quad Q_1 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

Schließlich definieren wir $\sigma(1) = 4$. Somit liefert der Algorithmus die Permutation

$$\sigma = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 1 & 7 & 3 & 5 \end{array}$$

2.6 Folgerung

Wir haben gesehen, dass jede Permutation eindeutig auf ein Paar von Young-Tableaus abgebildet wird, und die Umkehrabbildung existiert. Dies zeigt, dass die Abbildung bijektiv ist. Da eine Bijektion zwischen S_n und allen Paaren von Young-Tableaus der selben Struktur und der Größe n besteht, gilt:

$$\#S_n = \#\{\text{Paare von Young-Tableaus der selben Struktur und Größe } n\}$$

2.7 Plancherel-Maß

Es sei $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ eine Partition von $n \in \mathbb{N}$. Mit d_λ bezeichnen wir die Anzahl Young-Tableaus mit Struktur λ . Dann gilt:

$\#S_n = n! = \#\{\text{Paare von Young-Tableaus der selben Struktur und Größe } n\}$

$$= \sum_{\lambda \text{ Partition von } n} d_{\lambda}^2$$

Dadurch lässt sich ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf Young-Diagrammen definieren, welches uns die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass eine zufällige Permutation aus S_n durch den RSK-Algorithmus auf ein Paar von Young-Tableaus der Struktur λ abgebildet wird (λ Partition von n):

$$P(\lambda) = \frac{d_{\lambda}^2}{n!}$$

Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß wird Plancharel-Maß genannt.
(Quellen Kapitel 2: [1], [2])

3 Zusammenhang mit der längsten aufsteigenden Teilfolge

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit dem Zusammenhang zwischen dem Plancherel-Maß und der längsten aufsteigenden Teilfolge einer zufälligen Permutation.

3.1 Lemma

Wendet man den RSK-Algorithmus auf eine beliebige Permutation $\sigma \in S_n$ an, so ist $L_n(\sigma) = \lambda_1$ (Also der Länge der 1. Zeile der Tableaus auf die σ abgebildet wird). Für den Beweis ist folgende Definition hilfreich:

3.2 Definition: Kanonische Sequenzen

Sei $\sigma \in S_n$ eine beliebige Permutation, welche durch den RSK-Algorithmus auf das Paar von Young-Tableaus (P_n, Q_n) abgebildet wird.

Die i -te kanonische Sequenz K_i von σ sei die Folge $\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_k)$, wobei $\sigma(i_j)$ der j -te Eintrag ist, welcher bei der rekursiven Konstruktion von P_n an der i -ten Stelle der 1. Zeile von P gestanden hat.

3.3 Beispiel

In dem Beispiel 2.3 waren die Kanonischen Sequenzen:

$$K_1 = \{\sigma(1), \sigma(3), \sigma(4)\} = \{4, 2, 1\}$$

$$K_2 = \{\sigma(2), \sigma(6)\} = \{6, 3\}$$

$$K_3 = \{\sigma(5), \sigma(7)\} = \{7, 5\}$$

3.4 Beweis von Lemma 3.1

Behauptung 1: Jede kanonische Sequenz ist eine absteigende Teilfolge.

Beweis: Wenn P in der 1. Zeile an der Stelle i einen Eintrag $\sigma(i_1)$ hat, kann dieser gemäß dem Algorithmus nur ersetzt werden, durch einen Eintrag $\sigma(i_2)$ welcher kleiner ist als $\sigma(i_1)$. Wenn also ein Eintrag $\sigma(i_2)$ existiert der nach $\sigma(i_1)$ an der i -ten Stelle der 1. Zeile von P steht, muss also gelten

$$\sigma(i_1) > \sigma(i_2)$$

Da wir der Zeile nach die Einträge $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ einfügen, ist ebenfalls klar, dass $i_1 < i_2$. Damit ist die Folge $\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)$ eine absteigende Teilfolge.

Behauptung 2: Zu jedem Element $\sigma(i_l)$ der i -ten kanonischen Sequenz existiert mindestens ein Eintrag $\sigma((i-1)_j)$ der $(i-1)$ -ten kanonischen Sequenz, für den gilt:

$$\sigma((i-1)_j) < \sigma(i_l) \text{ und}$$

$$(i-1)_j < i_l$$

Beweis:

Immer wenn ein Eintrag $\sigma(i_l)$ an der i -ten Stelle der 1. Zeile von P eingefügt wird steht bereits ein Eintrag $\sigma((i-1)_j)$ an der $(i-1)$ -ten Stelle. Es ist klar, da dieser bereits die Bedingung erfüllt, da er vor $\sigma(i_l)$ eingefügt wurde, also muss $(i-1)_j < i_l$ sein. Ebenso muss $\sigma(i_l) > \sigma((i-1)_j)$ sein, damit $\sigma(i_l)$ durch den Algorithmus hinter $\sigma((i-1)_j)$ geschrieben wird.

Behauptung 3: $L_n(\sigma)$ entspricht der Länge der 1. Zeile von P.

Beweis:

- (1) λ_i sei die Länge der 1. Zeile von P. Es existieren also j kanonische Sequenzen. Da jede kanonische Sequenz eine absteigende Teilfolge ist, kann also eine aufsteigende Teilfolge nur maximal 1 Element jeder kanonischen Sequenz enthalten $\rightarrow L_n(\sigma) \leq \lambda_1$.
- (2) Nach der Behauptung 2 finden wir aber für jedes Element der i -ten kanonischen Sequenz ein Element der $(i-1)$ -ten kanonischen Sequenz für das gilt:

$$\sigma((i-1)_j) < \sigma(i_l) \text{ und}$$

$$(i-1)_j < i_l$$

Dies sind genau die Bedingungen für eine aufsteigende Teilfolge. Also können wir von jedem Element der λ_1 -ten kanonischen Sequenz eine aufsteigende Teilfolge der Länge λ_1 finde $\rightarrow L_n(\sigma) \geq \lambda_1$

Aus (1) und (2) folgt dann die Behauptung.

3.5 Folgerung

Wir haben gesehen, dass für jedes Paar von Young-Tableaus mit Struktur λ ($\lambda := \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ eine Partition von n) eine Permutation $\sigma \in S_n$ existiert, welche auf das Paar von Young-Tableaus abgebildet wird. Zudem ist nach 3.1 $L_n(\sigma) = \lambda_1$.

Also lässt sich auch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällige Permutation $\sigma \in S_n$ eine längste aufsteigende Teilfolge einer bestimmten Länge besitzt unter dem Plancherel-Maß berechnen:

$$P(L_n = x) = \sum_{\substack{\lambda \text{ Partition von } n \\ \lambda_1 = x}} \frac{d_\lambda^2}{n!}$$

Folgendes Beispiel zeigt, dass dies genau die Wahrscheinlichkeiten liefert an denen wir interessiert sind:

3.6 Beispiel

Es sei $n = 3$. Die einzige Permutation in S_3 mit $L_n(\sigma) = 3$ ist $\sigma = id$. Ebenso findet man nur eine Permutation $\sigma \in S_3$ mit $L_n(\sigma) = 1$, nämlich

$$\sigma = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Da es $3! = 6$ Permutationen in S_3 gibt, haben die restlichen 4 Permutationen eine LIS der Länge 2. Mit

$$P(\sigma) = \frac{1}{3!} \text{ für alle } \sigma \in S_n \quad P(L_3 = x) = \frac{\#\{\text{Permutationen } \sigma \in S_3 \mid L_3(\sigma) = x\}}{3!}$$

erhalten wir also:

$$P(L_3 = 3) = \frac{1}{6}, \quad P(L_3 = 2) = \frac{4}{6}, \quad P(L_3 = 1) = \frac{1}{6}$$

Betrachten wir uns nun Young-Tableaus der Größe 3. Hierfür gibt es 3 Strukturen, nämlich $\lambda = (3) := \lambda_{(1)}$, $\lambda = (2, 1) := \lambda_{(2)}$ und $\lambda = (1, 1, 1) := \lambda_{(3)}$. Da die Einträge in jeder Reihe und in jeder Spalte monoton wachsend sein müssen, finden wir für $\lambda_{(1)}$ und $\lambda_{(3)}$ jeweils nur ein Young-Tableau, nämlich

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \text{ für } \lambda_{(1)} \text{ und } \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \text{ für } \lambda_{(3)}.$$

Für $\lambda_{(2)}$ finden wir 2 Young-Tableaus, nämlich

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

Damit erhalten wir unter dem Plancherelmaß:

$$P(L_3 = 3) = P(\lambda_{(1)}) = \frac{1}{6}$$

$$P(L_3 = 2) = P(\lambda_{(2)}) = \frac{4}{6}$$

$$P(L_3 = 1) = P(\lambda_{(3)}) = \frac{1}{6}$$

Das Plancherelmaß liefert also die gewünschten Wahrscheinlichkeiten ohne dass jede Permutation aus S_n auf aufsteigende Teilfolgen untersucht werden muss. Dies ermöglicht für gegebenes n die Wahrscheinlichkeiten für L_n effektiver zu berechnen.

Dieses Ergebnis liefert auch den ersten Schritt dafür, den Zusammenhang zur Tracy-Widom-Verteilung herzustellen, da weitere Überlegungen auf dem Plancherel-Maß aufbauen (vgl 1.8).

(Quellen Kapitel 3: [1])

Literatur

- [1] C. Schensted: Longest increasing and decreasing subsequence
- [2] Nothanaël Berestycki: Notes on Tracy-Widom Fluctuation Theory
- [3] A.M.Odlyzko, E.M.Rains: On longest increasing subsequence in random permutations