Kompaktheitskriterien für Kompositionsoperatoren auf Räumen vom Bergmantyp

Bachelorarbeit

angefertigt von

Tobias Mai

an der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I der Universität des Saarlandes, Fachrichtung 6.1 Mathematik

unter Betreuung von **Professor Dr. Ernst Albrecht**

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbst angefertigt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, den

Vorwort

Räume holomorpher Funktionen (wie etwa Räume vom Bergmantyp und Hardyräume) und die auf diesen definierten Operatoren (wie etwa Toeplitz-, Hankel- und Kompositionsoperatoren) sind seit vielen Jahren Ausgangspunkt mathematischer Forschungsarbeit an der Schnittstelle zwischen Funktionalanalysis und Funktionentheorie. Ziel ist es dabei, die funktionalanalytischen Eigenschaften der Operatoren, wie beispielsweise Beschränktheit, Kompaktheit und Zugehörigkeit zu den Schatten p-Klassen auf funktionentheoretische Eigenschaften der die Operatoren induzierenden Funktionen zurückzuführen.

Die vorliegende Arbeit behandelt speziell Kompositionsoperatoren auf Bergmanräumen über der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ mit Standardgewichten. Diese werden im Folgenden mit $A^p_\alpha(\mathbb{D})$ (oder kurz: A^p_α) bezeichnet. Bekannt ist, dass jede holomorphe Selbstabbildung der Einheitskreisscheibe einen kompakten Kompositionsoperator erzeugt. Dies stellt eine unmittelbare Folgerung aus dem Subordinationssatz von Littlewood dar (vgl. Theorem 11.1 und Theorem 11.6 in [**17**]).
Bereits 1986 charakterisierten MacCluer und Shapiro in [**10**] die kompakten Kompositionsoperatoren C_φ auf dem Bergmanraum $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ über die Bedingung

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} = 0 \tag{0.1}$$

an die den Kompositionsoperator induzierende holomorphe Funktion $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Dieses Kriterium wurde in der 2007 veröffentlichten Arbeit [**16**] von Zhu auf die Bergmanräume $A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$ über der Einheitskugel $\mathbb{B}_n$ im $\mathbb{C}^n$ mit $p > 0$ und $\alpha > -1$ verallgemeinert und liefert damit insbesondere die Kompaktheitsbedingung auf den Bergmanräumen $A^p_\alpha(\mathbb{D})$.
Im Gegensatz dazu gibt es auf die Frage nach der Zugehörigkeit zu den Schatten p-Klassen $S_p(A^2_\alpha)$ bisher keine allgemeine und zufriedenstellende Antwort. Lange wurde vermutet, dass C_φ genau dann in $S_p(A^2_\alpha)$ für $p \geq 2$ und $\alpha > -1$ liegt, wenn

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} d\lambda(z) < \infty \tag{0.2}$$

erfüllt ist, denn die Gültigkeit dieser Vermutung war im Fall $p = 2$ bereits bekannt und die Bedingung (0.2) stellte sich im Fall $p > 2$

als notwendig heraus. Darüber hinaus gelang Zhu in seiner 2001 erschienenen Arbeit [**19**] ein Beweis dieser Vermutung durch zusätzliche Forderungen an die Funktion φ. Zudem stünde diese Charakterisierung in völliger Analogie zur Theorie der Kompositionsoperatoren auf Hardyräumen. Dennoch gelang es Xia, hierzu das 2002 in [**15**] veröffentlichte Gegenbeispiel zu finden. Eine vollständige Charakterisierung steht aber weiterhin aus.

Im Folgenden möchte ich nach einer in Kapitel 1 zusammengestellten Einführung der notwendigen Begriffe und der damit verbundenen Theorie, in den ersten beiden Abschnitten von Kapitel 2 zunächst die oben erwähnten Ergebnisse detaillierter vorstellen. Die Beweisführung zu Satz 2.10 mit Hilfe des Schur-Tests hat mich im Hinblick auf die Arbeiten [**4**] und [**11**] veranlasst, zwei Alternativen zu der Integralbedingung (0.2) anzugeben. Auf diese möchte ich in den letzten beiden Abschnitten von Kapitel 2 eingehen (vgl. Satz 2.11 und Satz 2.13).
Da die Integralkriterien für die Zugehörigkeit von Kompositionsoperatoren zu den Schattenklassen im Wesentlichen das Konvergenzverhalten der Grenzwertbedingungen für die Kompaktheit der Kompositionsoperatoren betreffen, sollen in Kapitel 3 Kriterien auf Grundlage der Konvergenzgeschwindigkeit besprochen werden. Dabei möchte ich die Fälle betrachten, in denen Konvergenz von der Ordnung $O\big((1-|z|^2)^\omega\big)$ für $|z| \to 1^-$ mit $\omega > 0$ vorliegt. Hierbei wird unter anderem der Frage nachgegangen, ob sich in diesen Fällen genauere Aussagen machen lassen, wenn nicht der Zugang über die Integralbedingungen gewählt wird (vgl. Satz 3.3, Satz 3.4 und Satz 3.5). Ferner werde ich in Abschnitt 3.3 eine Möglichkeit angeben, mit der sich feststellen lässt, zu welchen Schattenklassen ein Kompositionsoperator nicht gehört.
In Kapitel 4 sollen anschließend Zusammenhänge zwischen der Zugehörigkeit von Kompositionsoperatoren zu den Schattenklassen und der Geometrie des Bildes der den Kompositionsoperator induzierenden Funktion gefunden werden. Hierfür erweisen sich die Kriterien aus Kapitel 3 als nützlich. In Satz 4.4 werde ich zeigen, dass Eigenschaften des Bildes unmittelbar das in Kapitel 3 behandelte Konvergenzverhalten bedingen.
Anhand von Beispielen soll in Kapitel 5 die Reichweite der gefundenen Kriterien erprobt werden. Dabei werde ich sowohl ein Beispiel für den geometrischen, als auch ein Beispiel für den direkten analytischen Zugang geben. Das zweite Beispiel wird darüber hinaus auch aufzeigen, dass das in Kapitel 3 untersuchte Konvergenzverhalten nicht ausreicht, um die Frage nach der Zugehörigkeit von Kompositionsoperatoren zu den Schattenklassen vollständig zu beantworten.

Güdesweiler, im Oktober 2008 Tobias Mai

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Einführung

1. Schattenklassen

Es sei T ein kompakter Operator auf einem separablen Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Bekanntlich existieren dann Orthonormalsysteme (u_n) und (v_n) in $\mathcal{H}$, sodass

$$\forall x \in \mathcal{H}: \quad Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, u_n\rangle v_n,$$

wobei λ_n der n-te Singulärwert von T ist.

Für $0 < p < \infty$ bezeichnet $S_p(\mathcal{H})$ die *Schatten p-Klasse von $\mathcal{H}$*, d.h. die Menge aller kompakten Operatoren auf $\mathcal{H}$, deren Singulärtwertfolge zu ℓ^p gehört.

Satz 1.1 (Theorem 1.34, **[17]**). *Sei T ein kompakter Operator auf $\mathcal{H}$ und $(\lambda_n)_n$ die Singulärwertfolge von T.*

(a) *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\lambda_{n+1} = \inf\{\|T - F\|;\ F \in \mathcal{F}_n\},$$

wobei

$$\mathcal{F}_n := \{F \in \mathcal{L}(\mathcal{H});\ \dim \operatorname{ran}(F) \leq n\}$$

die Menge aller stetigen linearen Operatoren auf $\mathcal{H}$ mit Rang $\leq n$ bezeichnet.

(b) *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\lambda_{n+1} = \min_{x_1,\ldots,x_n \in \mathcal{H}} \max\{\|Tx\|;\ \|x\| = 1,\ \langle x, x_j\rangle = 0,\ 1 \leq j \leq n\}.$$

Dies ermöglicht den Beweis des folgenden Satzes:

Satz 1.2 (Theorem 1.35, **[17]**). *Es seien T_1 und T_2 kompakte Operatoren auf $\mathcal{H}$ und es bezeichne $(\lambda_n(T))_n$ die Singulärwertfolge zu T. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$:*

$$\lambda_{n+m+1}(T_1 + T_2) \leq \lambda_{n+1}(T_1) + \lambda_{m+1}(T_2)$$

und

$$\lambda_{n+m+1}(T_1 T_2) \leq \lambda_{n+1}(T_1)\lambda_{m+1}(T_2).$$

Insbesondere stellen die Schatten p-Klassen Vektorräume dar. Ebenso ergibt sich, dass alle $S_p(\mathcal{H})$ zweiseitige Ideale in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ bilden. Darüber hinaus gehört ein kompakter Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ genau dann zu $S_p(\mathcal{H})$, wenn T^* zu $S_p(\mathcal{H})$ gehört.

Besondere Bedeutung erhält die sogenannte *Spurklasse* $S_1(\mathcal{H})$. Ist $(e_n)_n$ ein beliebiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$, so definiert man für $T \in S_1(\mathcal{H})$ durch

$$\mathrm{tr}(T) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, e_n \rangle$$

die *Spur von* T. Der Wert $\mathrm{tr}(T)$ ist dabei unabhängig von der speziellen Wahl des Orthonormalystems (vgl. Theorem 1.24, [**17**]).

Für die Zugehörigkeit zu den Schatten p-Klassen gelten die folgenden Vererbungseigenschaften:

Satz 1.3 (Theorem 1.26, [**17**]). *Sei* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *ein kompakter Operator auf* $\mathcal{H}$ *und sei* $p > 0$. *Dann sind äquivalent:*

(i) $T \in S_p(\mathcal{H})$
(ii) $|T|^p = (T^*T)^{\frac{p}{2}} \in S_1(\mathcal{H})$
(iii) $T^*T \in S_{\frac{p}{2}}(\mathcal{H})$

Darüber hinaus stellt für $p \geq 1$ die Schatten p-Klasse $S_p(\mathcal{H})$ einen Banachraum bezüglich der Norm $\|\cdot\|_p$ dar. Diese ist definiert durch

$$\|T\|_p := \left(\mathrm{tr}\left((T^*T)^{\frac{p}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_n \lambda_n^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

für alle $T \in S_p(\mathcal{H})$ mit Singulärwerten $(\lambda_n)_n$. Ferner ist $S_p(\mathcal{H})$ abgeschlossen in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

2. Bergmanräume

Es bezeichne $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ und A das normalisierte Lebesguemaß auf $\mathbb{D}$, d.h. $A(\mathbb{D}) = 1$.

Lemma 1.4 (Lemma 3.9, [**17**]). *Sei* $\alpha \in \mathbb{R}$ *beliebig. Dann gilt:*

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\alpha} dA(w) = \begin{cases} \infty, & \alpha \leq -1 \\ (\alpha+1)^{-1}, & \alpha > -1 \end{cases}$$

Beweis. Für $z = re^{i\theta}$ ist

$$dA(z) = \frac{r}{\pi}\, dr\, d\theta.$$

Damit rechnet man nach:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^\alpha dA(z) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)^\alpha r\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^1 (1-r^2)^\alpha 2r\ dr \\
&= \int_0^1 (1-r)^\alpha dr \\
&= \begin{cases} \infty, & \alpha \le -1 \\ (1+\alpha)^{-1}, & \alpha > -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Für $\alpha > -1$ lassen sich durch

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad dA_\alpha(z) = (1+\alpha)(1-|z|^2)^\alpha dA(z)$$

Maße A_α auf $\mathbb{D}$ definieren, die nach Lemma 1.4 ebenfalls normalisiert sind.
Darüber hinaus definiert man ein Maß λ auf $\mathbb{D}$ durch

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad d\lambda(z) = (1-|z|^2)^{-2} dA(z).$$

Man rechnet unter Verwendung des Transformationssatzes unmittelbar nach, dass für alle $f \in L^1(\mathbb{D}, d\lambda)$ und alle $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ gilt:

$$\int_{\mathbb{D}} f(\varphi(z)) d\lambda(z) = \int_{\mathbb{D}} f(z) d\lambda(z),$$

d.h. das Maß λ ist *möbiusinvariant*. Hierbei bezeichnet $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ die Automorphismengruppe von $\mathbb{D}$.

Definition 1.5 (Räume vom Bergmantyp). *Sei $\alpha > -1$ und $p > 0$ beliebig. Dann werden die Vektorräume*

$$A^p_\alpha := \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D});\ \|f\|_{p,\alpha} := \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

als Räume vom Bergmantyp (mit Standardgewichten) bezeichnet. Hierbei sei $\mathcal{O}(\mathbb{D})$ die Menge aller auf $\mathbb{D}$ holomorphen Funktionen.

Der Fall $p = 2$ liefert den Hilbertraum $(A^2_\alpha, \langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha)$ mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha :\ A^2_\alpha \times A^2_\alpha \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\forall f, g \in A^2_\alpha : \quad \langle f, g\rangle_\alpha := \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)} dA_\alpha(z).$$

Der Hilbertraum A^2_α besitzt die Orthonormalbasis $(e_n)_{n=0}^\infty$ wobei

$$e_n :\ \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ z \mapsto e_n(z) := \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!\Gamma(\alpha+2)}} z^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere stellt A^2_α einen separablen Hilbertraum dar.

Satz 1.6 (Reproduzierende Kerne). *Sei $\alpha > -1$. Durch*

$$\forall z, w \in \mathbb{D}: \quad K_\alpha(z,w) := \frac{1}{(1 - z\overline{w})^{\alpha+2}}$$

sind die reproduzierenden Kerne $K_\alpha : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ gegeben, d.h. es gilt:

$$\forall f \in A^2_\alpha,\ z \in \mathbb{D}: \quad f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z,w) f(w) dA_\alpha$$

Definiert man für $z \in \mathbb{D}$ die Funktion $K^{(\alpha)}_z \in A^2_\alpha$ durch

$$K^{(\alpha)}_z(w) := \overline{K_\alpha(z,w)}$$

für alle $w \in \mathbb{D}$, so gilt:

$$\forall f \in A^2_\alpha: \quad f(z) = \langle f, K^{(\alpha)}_z \rangle_\alpha$$

Beweis. Die im Satz zusammengestellten Eigenschaften der reproduzierenden Kerne lassen sich etwa im Abschnitt 4.4 von **[17]** nachlesen. Man beachte dabei speziell Korollar 4.20. □

Aus der reproduzierenden Eigenschaft der Funktionen $K^{(\alpha)}_z$ erhält man ferner:

$$\|K^{(\alpha)}_z\|^2_{2,\alpha} = \langle K^{(\alpha)}_z, K^{(\alpha)}_z \rangle_\alpha = K^{(\alpha)}_z(z) = \overline{K_\alpha(z,z)} = \frac{1}{(1 - |z|^2)^{\alpha+2}}$$

bzw.

$$\|K^{(\alpha)}_z\|_{2,\alpha} = \frac{1}{(1 - |z|^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}}.$$

Die normierten Reproduktionskerne $k^{(\alpha)}_z \in A^2_\alpha$ sind daher gegeben durch

$$k^{(\alpha)}_z(w) := \frac{K^{(\alpha)}_z(w)}{\|K^{(\alpha)}_z\|_{2,\alpha}} = \frac{(1 - |z|^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}}{(1 - \overline{z}w)^{\alpha+2}}$$

für alle $w \in \mathbb{D}$.

Für $p > 0$ und $\alpha > -1$ stellt der Bergmanraum A^p_α einen abgeschlossenen Unterraum von $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ dar. Im Hilbertraumfall $p = 2$ existiert daher eine orthogonale Projektion $P_\alpha : L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha) \to A^2_\alpha$. Unter Verwendung der reproduzierenden Kerne erhält man darüber hinaus eine Darstellung der *Bergmanprojektionen* P_α als Integraloperatoren:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha),\ z \in \mathbb{D}: \quad P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z,w) f(w) dA_\alpha(w)$$

Die reproduzierenden Kerne werden ferner zur Definition der Berenzintransformation verwendet.

3. Berenzintransformation

Es sei $T \in \mathcal{L}(A^2_\alpha)$ beliebig. Man definiert nun die *Berenzintransformierte* $\widetilde{T} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ von T durch

$$\widetilde{T}(z) := \langle T k_z^{(\alpha)}, k_z^{(\alpha)} \rangle_\alpha$$

für alle $z \in \mathbb{D}$.

Die folgenden Sätze zeigen, dass sich die Zugehörigkeit von Operatoren zu den Schatten p-Klassen $S_p(A^2_\alpha)$ über die Integrierbarkeit der Berenzintransformierten bezüglich des möbiusinvarianten Maßes λ charakterisieren lässt.

Satz 1.7 (Theorem 6.4, [**17**]). *Sei $T \in \mathcal{L}(A^2_\alpha)$ ein positiver Operator. Dann gehört T genau dann zur Spurklasse, wenn $\widetilde{T} \in L^1(\mathbb{D}, d\lambda)$. Genauer gilt die folgende Spurformel:*

$$\operatorname{tr}(T) = (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} \widetilde{T}(z) d\lambda(z)$$

Korollar 1.8 (Corollary 6.5, [**17**]). *Ist $T \in \mathcal{L}(A^2_\alpha)$ ein beliebiger Operator in der Spurklasse, dann gilt $\widetilde{T} \in L^1(\mathbb{D}, d\lambda)$ und die Spurformel ist erfüllt.*

Satz 1.9 (Theorem 6.6, [**17**]). *Sei $T \in \mathcal{L}(A^2_\alpha)$ ein positiver Operator.*

(a) *Ist $1 \leq p < \infty$ und $T \in S_p(A^2_\alpha)$, dann gilt $\widetilde{T} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$.*
(b) *Ist $0 < p \leq 1$ und $\widetilde{T} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$, dann gilt $T \in S_p(A^2_\alpha)$.*

Korollar 1.10 (Theorem 6.7, [**17**]). *Ist $1 \leq p < \infty$ und $T \in S_p(A^2_\alpha)$, dann gilt $\widetilde{T} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$.*

Diese Aussagen sind speziell für Toeplitzoperatoren von Bedeutung.

4. Toeplitzoperatoren

Zu einer beliebigen Funktion $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$ lässt sich der zugehörige *Toeplitzoperator*

$$T_\varphi : \ A^2_\alpha \to A^2_\alpha, \ f \mapsto P_\alpha(\varphi f)$$

definieren. Für ein $f \in A^2_\alpha$ und $z \in \mathbb{D}$ gilt also:

$$T_\varphi f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z, w) f(w) \varphi(w) dA_\alpha(w)$$

Allgemeiner lässt sich zu einem endlichen komplexen Borelmaß μ auf $\mathbb{D}$ der Operator

$$T_\mu : \ H^\infty \to \mathcal{O}(\mathbb{D})$$

definieren durch

$$\forall f \in H^\infty, \ z \in \mathbb{D} : \quad T_\mu f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z, w) f(w) d\mu(w),$$

wobei H^∞ die Menge aller auf $\mathbb{D}$ beschränkten holomorphen Funktionen bezeichnet. Der Operator T_μ zu einem endlichen komplexen Borelmaß heißt *beschränkt auf* A^2_α, falls ein $C > 0$ existiert mit

$$\forall f \in H^\infty : \quad \|T_\mu f\|_{2,\alpha} \leq C\|f\|_{2,\alpha}$$

Der folgende Satz liefert hierzu ein Kriterium.

Satz 1.11 (Theorem 7.5, [**17**]). *Sei μ ein endliches positives Borelmaß auf $\mathbb{D}$. Dann sind äquivalent:*

(a) *T_μ ist beschränkt auf A^2_α.*
(b) *μ ist ein Carleson-Maß für A^2_α, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$, sodass*

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\mu(z) \leq C \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA_\alpha(z)$$

für alle $f \in A^2_\alpha$.

Ist nun T_μ auf A^2_α beschränkt, dann ist die Berenzintransformierte (welche dann auch kurz mit $\widetilde{\mu}$ bezeichnet wird) gegeben durch

$$\widetilde{T_\mu}(z) = \langle T_\mu k_z^{(\alpha)}, k_z^{(\alpha)} \rangle_\alpha = \int_{\mathbb{D}} |k_z^{(\alpha)}(w)|^2 d\mu(w)$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Speziell für das Borelmaß μ definiert durch

$$d\mu(z) = \varphi(z) dA_\alpha(z)$$

mit $\varphi \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ schreibt man auch $T_\mu = T_\varphi$. Ist φ auf $\mathbb{D}$ beschränkt, so stimmt dies mit der einfachen Definition des Toeplitzoperators überein.

Die folgenden Sätze liefern nun die gewünschten Bedingungen für die Zugehörigkeit zu $S_p(A^2_\alpha)$.

Satz 1.12 (Lemma 7.10, [**17**]). *Sei μ ein positives Borelmaß auf $\mathbb{D}$, sodass T_μ auf A^2_α beschränkt ist. Dann gilt*

$$\operatorname{tr}(T_\mu) = \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z,z) d\mu(z),$$

mit der Vereinbarung, dass beide Seiten unendlich sein können. Speziell gilt für jede nichtnegative Funktion φ auf $\mathbb{D}$, für die T_φ beschränkt ist:

$$\operatorname{tr}(T_\varphi) = (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} \varphi(z) d\lambda(z)$$

Satz 1.13 (Theorem 7.18, [**17**]). *Seien $\alpha > -1$ und $\frac{1}{2+\alpha} < p < \infty$ beliebig. Ferner sei μ ein positives Borelmaß auf $\mathbb{D}$. Dann sind äquivalent:*

(a) *Der Operator T_μ gehört zu $S_p(A^2_\alpha)$.*
(b) *Die Funktion $\widetilde{\mu}$ ist in $L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$.*

5. Kompositionsoperatoren auf Bergmanräumen

Für eine beliebige holomorphe Funktion $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ist durch

$$C_\varphi : \mathcal{O}(\mathbb{D}) \to \mathcal{O}(\mathbb{D}), \; f \mapsto f \circ \varphi$$

eine wohldefinierte lineare Abbildung gegeben.

Satz 1.14 (Theorem 11.6, [**17**]). *Seien $p > 0$, $\alpha > -1$ und $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Dann gilt für alle $f \in A^p_\alpha$:*

$$\int_{\mathbb{D}} |f(\varphi(z))|^p dA_\alpha(z) \leq \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}\right)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z)$$

Insbesondere gehört zu einer holomorphen Funktion $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine lineare Abbildung

$$C_\varphi : \; A^p_\alpha \to A^p_\alpha, \; f \mapsto f \circ \varphi,$$

die aufgrund des vorangegangenen Satzes 1.14 einen wohldefinierten, stetigen und linearen Operator darstellt, den sogenannten *Kompositionsoperator auf dem Bergmanraum* $(A^p_\alpha, \|\cdot\|_{p,\alpha})$. Genauer gilt:

$$\|C_\varphi\|_{p,\alpha} \leq \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}\right)^{\frac{2+\alpha}{p}}$$

Bemerkenswert ist, dass im eindimensionalen Fall Kompositionsoperatoren automatisch stetig sind. Behandelt man hingegen Bergmanräume über Einheitskugeln $\mathbb{B}_n$ im $\mathbb{C}^n$, so ist dies im Allgemeinen nicht mehr richtig. Man vergleiche hierzu etwa [**16**].

Es stellt sich nun die Frage nach der Kompaktheit der Kompositionsoperatoren. Der nachfolgende Satz gibt hierzu eine Charakterisierung an.

Satz 1.15 (Theorem 11.8, [**17**]). *Sei $p > 0$, $\alpha > -1$ und $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ beliebig. Dann ist der Kompositionsoperator $C_\varphi : A^p_\alpha \to A^p_\alpha$ genau dann kompakt, wenn*

$$\lim_{|z| \to 1^-} \frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} = 0.$$

Diese Aussage lässt sich ebenfalls auf Bergmanräume über der Einheitskugel $\mathbb{B}_n$ im $\mathbb{C}^n$ verallgemeinern. Hierbei muss die Beschränktheit der Kompositionsoperatoren vorausgesetzt werden:

Satz 1.16 (Theorem 4.1, [**16**]). *Sei $p > 0$ und $\alpha > -1$. Ist C_φ auf $A^q_\beta(\mathbb{B}_n)$ beschränkt für ein $q > 0$ und ein $-1 < \beta < \alpha$, dann ist C_φ genau dann kompakt auf $A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$, wenn*

$$\lim_{|z| \to 1^-} \frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} = 0.$$

Dieses Ergebnis wurde für den eindimensionalen Fall bereits 1986 von MacCluer und Shapiro in [**10**] vorgestellt. Es ergab sich damit die Frage, ob und wie dieses Kriterium auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden kann. Der obige Satz 1.16 wurde 2007 von Kehe Zhu in [**16**] veröffentlicht und löst dieses Problem auf eine erfreuliche Weise. Der dortige Beweis findet sich im eindimensionalen Spezialfall auch in [**17**]. Auf dem Weg zu dieser vollständigen Lösung wurde 2001 von Dana D. Clahane in [**4**] das folgende Kriterium bewiesen:

Satz 1.17 (Theorem 1.1, [**4**]). *Seien $p > 0$ und $\alpha \geq 0$. Sei $\varphi : \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$ eine holomorphe Funktion, sodass C_φ auf $A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$ beschränkt ist und*

$$\lim_{|z|\to 1^-} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{2+\alpha} \|\varphi'(z)\|^2 = 0.$$

Dann ist C_φ kompakt auf $A^p_\beta(\mathbb{B}_n)$ für alle $\beta \geq \alpha$.

Hierbei bezeichnet φ' die Fréchet-Ableitung von φ und $\|\cdot\|$ die Operatornorm auf $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

Definition 1.18 (Fréchet-Ableitung). *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume und $T : \Omega \to F$ ein (nicht notwendig linearer) Operator auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq E$. T heißt Fréchet-differenzierbar in einem Punkt $x \in \Omega$, wenn ein Operator $L \in \mathcal{L}(E, F)$ existiert, sodass*

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|T(x+h) - T(x) - Lh\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$

Man nennt dann L die Fréchet-Ableitung von T im Punkt x und schreibt hierfür $T'(x)$.

In dieser Arbeit werden darüber hinaus folgende Hilfssätze benötigt:

Lemma 1.19 (Forelli-Rudin-Lemma). *Seien $\alpha > -1$ und $t > 0$ beliebig. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, sodass*

$$\forall z \in \mathbb{D} : \quad \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha+t}} dA(w) \leq \frac{C}{(1-|z|^2)^t}$$

Beweis. Den Beweis einer allgemeineren Aussage findet man etwa in [**17**] unter Lemma 3.10. □

Als Anwendung ergibt sich der folgende Satz, der in einer Verallgemeinerung auf den mehrdimensionalen Fall eine Charakterisierung der Beschränktheit von Kompositionsoperatoren liefert. Man vergleiche hierzu Satz 3.1 in [**16**].

Satz 1.20. *Seien $p > 0$, $\alpha > -1$ und $t > 0$. Für jede holomorphe Funktion $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ existiert eine Konstante $C > 0$ mit*

$$\forall z \in \mathbb{D} : \quad \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2+\alpha+t}} dA_\alpha(z) \leq \frac{C}{(1-|z|^2)^t}.$$

Beweis. Für festes $z \in \mathbb{D}$ sei die Funktion

$$f_z : \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ w \mapsto f_z(w) := \frac{1}{(1-\overline{z}w)^{2+\alpha+t}}$$

definiert. Diese ist offensichtlich holomorph und wegen

$$\forall w \in \mathbb{D} : \quad |f_z(w)| = \frac{1}{|1-\overline{z}w|^{2+\alpha+t}} \leq \frac{1}{(1-|z|)^{2+\alpha+t}}$$

in A^1_α enthalten. Ist nun $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine beliebige holomorphe Funktion, dann ist der zugehörige Kompositionsoperator C_φ auf A^1_α beschränkt. Es gilt also

$$\|C_\varphi f_z\|_{1,\alpha} \leq \|C_\varphi\|_{1,\alpha} \|f_z\|_{1,\alpha}.$$

Nach Satz 1.19 existiert daher ein $C_0 > 0$, sodass

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2+\alpha+t}} dA_\alpha(z) &\leq \|C_\varphi\|_{1,\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha+t}} dA_\alpha(w) \\
&= (1+\alpha)\|C_\varphi\|_{1,\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha+t}} dA(w) \\
&\leq \frac{C}{(1-|z|^2)^t}
\end{aligned}$$

mit einer Konstanten

$$C := (1+\alpha)\|C_\varphi\|_{1,\alpha} C_0 > 0.$$

□

Lemma 1.21 (Proposition 11.7, [**17**]). *Sei $\alpha > -1$ beliebig. Für den zu $C_\varphi : A^2_\alpha \to A^2_\alpha$ adjungierten Operator C^*_φ gilt:*

$$\|C^*_\varphi k^{(\alpha)}_z\|_{2,\alpha} = \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{2+\alpha}{2}}$$

Beweis. Sei also $\alpha > -1$ beliebig. Für alle $z, w \in \mathbb{D}$ rechnet man zunächst nach:

$$\begin{aligned}
C^*_\varphi K^{(\alpha)}_z(w) &= \langle C^*_\varphi K^{(\alpha)}_z, K^{(\alpha)}_w \rangle_\alpha = \langle K^{(\alpha)}_z, C_\varphi K^{(\alpha)}_w \rangle_\alpha \\
&= \overline{\langle C_\varphi K^{(\alpha)}_w, K^{(\alpha)}_z \rangle_\alpha} = \overline{(C_\varphi K^{(\alpha)}_w)(z)} \\
&= \overline{K^{(\alpha)}_w(\varphi(z))} = K^{(\alpha)}_{\varphi(z)}(w),
\end{aligned}$$

d.h. es gilt für alle $z \in \mathbb{D}$

$$C^*_\varphi K^{(\alpha)}_z = K^{(\alpha)}_{\varphi(z)}.$$

Nach den Eigenschaften der reproduzierenden Kerne ergibt sich weiter

$$\|C^*_\varphi K^{(\alpha)}_z\|_{2,\alpha} = \|K^{(\alpha)}_{\varphi(z)}\|_{2,\alpha} = \frac{1}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\frac{2+\alpha}{2}}}$$

und damit wie gewünscht:

$$\|C_\varphi^* k_z^{(\alpha)}\|_{2,\alpha} = \frac{\|C_\varphi^* K_z^{(\alpha)}\|_{2,\alpha}}{\|K_z^{(\alpha)}\|_{2,\alpha}} = \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{2+\alpha}{2}}$$

□

KOROLLAR 1.22. *Sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{D}$:*

$$\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \leq \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}$$

Beweis. Sei also $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ gegeben. Nach Satz 1.14 stellt $C_\varphi : A_0^2 \to A_0^2$ einen stetigen Operator dar, mit der Norm

$$\|C_\varphi\|_{2,0} \leq \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}.$$

Nach Lemma 1.21 erhält man wegen $\|k_z^{(0)}\|_{2,0} = 1$ die Behauptung:

$$\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} = \|C_\varphi^* k_z^{(0)}\|_{2,0} \leq \|C_\varphi^*\|_{2,0} = \|C_\varphi\|_{2,0} \leq \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}$$

□

6. Kompositionsoperatoren auf Blochräumen

Man definiert den *Blochraum* $\mathcal{B}$ durch

$$\mathcal{B} := \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D});\ \|f\|_{\mathcal{B}} := \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)|f'(z)| < \infty \right\}$$

und den *kleinen Blochraum* $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ durch

$$\mathcal{B}_0 := \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D});\ \lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)|f'(z)| = 0 \right\}.$$

Wird der Blochraum $\mathcal{B}$ mit der Norm $\|\cdot\|$ versehen, welche durch

$$\forall f \in \mathcal{B}: \quad \|f\| := |f(0)| + \|f\|_{\mathcal{B}}$$

gegeben ist, so erhält man den Banachraum $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$. Dann stellt $\mathcal{B}_0$ einen abgeschlossenen Untervektorraum von $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ dar.

Im vorangegangenen Abschnitt wurde der allgemeine Kompositionsoperator

$$C_\varphi :\ \mathcal{O}(\mathbb{D}) \to \mathcal{O}(\mathbb{D}),\ f \mapsto f \circ \varphi$$

zu einer Funktion $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ auf die Bergmanräume A_α^p mit $p > 0$ und $\alpha > -1$ eingeschränkt, wodurch ein stetiger linearer Operator $C_\varphi : A_\alpha^p \to A_\alpha^p$ entstanden ist. Eine Anwendung des Schwarz-Pick-Lemmas zeigt, dass dies auch für die Blochräume möglich ist (vgl. [**11**]).

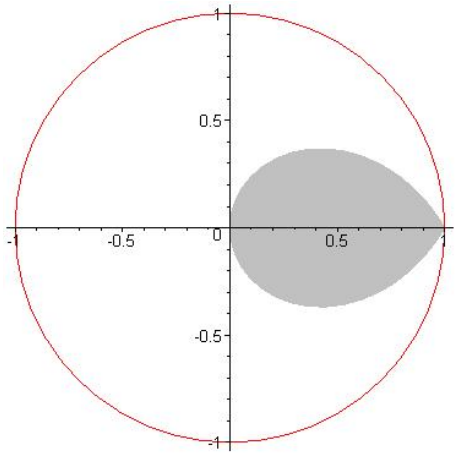

ABBILDUNG 1. Stolz-Winkelbereich Γ_M für $M = 1$.

SATZ 1.23. *Für alle holomorphen Funktionen* $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *und alle* $f \in \mathcal{B}$ *gilt:*

$$\|f \circ \varphi\|_{\mathcal{B}} \leq \|f\|_{\mathcal{B}}$$

Insbesondere sind $C_\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ *und* $C_\varphi : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_0$ *wohldefinierte und stetige Operatoren.*

Es stellt sich nun die Frage, wie die Kompaktheit dieser Kompositionsoperatoren charakterisiert werden kann. Für $C_\varphi : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_0$ gibt der folgende Satz eine Antwort.

SATZ 1.24 (Theorem 1, [**11**]). *Sei* $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *holomorph. Dann ist der Kompositionsoperator* $C_\varphi : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_0$ *genau dann kompakt, wenn*

$$\lim_{|z| \to 1^-} \frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} |\varphi'(z)| = 0.$$

Theorem 2 des gleichen Artikels liefert eine ähnliche Aussage für die Kompaktheit von $C_\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$.

Bemerkenswert ist, dass die Kompaktheit von $C_\varphi : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_0$ über geometrische Eigenschaften von $\varphi(\mathbb{D})$ beschrieben werden kann:

DEFINITION 1.25. *Für* $M > 0$ *nennt man*

$$\Gamma_M := \{w \in \mathbb{D};\ |1 - w| \leq M(1 - |w|^2)\}$$

einen Stolz-Winkelbereich bei 1.

Im Folgenden bezeichne $D_r(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ die offene Kreisscheibe in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt z und Radius r, d.h.

$$D_r(z) := \{w \in \mathbb{C};\ |w - z| < r\}.$$

DEFINITION 1.26. *Sei* $G \subset \mathbb{D}$ *offen, sodass* $\overline{G} \cap \partial\mathbb{D} = \{1\}$ *erfüllt ist.*

(a) *Gilt*

$$\operatorname{dist}(w, \partial G) = o(|1-w|) \quad \textit{für} \quad w \to 1,$$

so sagt man „G hat eine Spitze bei 1*".*

(b) *Die Spitze bei* 1 *heißt „nichttangential", falls Zahlen* $M, r > 0$ *existieren, sodass*

$$G \cap D_r(1) \subseteq \Gamma_M.$$

Es gilt nun der angekündigte Satz:

Satz 1.27 (Theorem 5, [**11**]). *Sei* $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *eine holomorphe und injektive Funktion, für die* $G := \varphi(\mathbb{D})$ *bei* 1 *eine nichttangentiale Spitze besitzt und* $\overline{G} \cap \partial\mathbb{D} = \{1\}$ *erfüllt, dann ist* $C_\varphi : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_0$ *kompakt.*

KAPITEL 2

Integralkriterien für die Zugehörigkeit zu $S_p(A^2_\alpha)$

1. Allgemeines Kriterium

Ist eine holomorphe Funktion $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ gegeben, dann stellt sich die Frage, ob und wie die funktionentheoretischen Eigenschaften von φ die funktionalanalytischen Eigenschaften von C_φ bestimmen. Nachdem dies im Fall der Beschränktheit (vgl. Satz 1.14) und Kompaktheit (vgl. Satz 1.15) geschehen ist, sucht man nun nach Eigenschaften von φ, die die Zugehörigkeit von C_φ zu den Schatten p-Klassen $S_p(A^2_\alpha)$ bedingen. Ein erstes Kriterium liefert das folgende Lemma:

Lemma 2.1 (Theorem 11.9, [**17**]). *Sei $p > \frac{2}{2+\alpha}$. Dann gehört der Kompositionsoperator*

$$C_\varphi : \ A^2_\alpha \to A^2_\alpha$$

genau dann zu $S_p(A^2_\alpha)$, wenn die Funktion

$$\Phi : \ \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \ z \mapsto (1 - |z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1 - z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)}} dA_\alpha(w)$$

in $L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$ liegt.

Beweis. Zunächst stellt man fest, dass für alle $f \in A^2_\alpha$ und alle $z \in \mathbb{D}$ gilt

$$C^*_\varphi f(z) = \langle C^*_\varphi f, K^{(\alpha)}_z \rangle = \langle f, C_\varphi K^{(\alpha)}_z \rangle$$

bzw. in Integralform

$$C^*_\varphi f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{\varphi(w)})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w).$$

Insbesondere erhält man für alle $f \in A^2_\alpha$ und alle $z \in \mathbb{D}$:

$$C^*_\varphi C_\varphi f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\varphi(w))}{(1 - z\overline{\varphi(w)})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w)$$

Man definiert nun das Pullback-Maß $\mu_{\varphi,\alpha}$ zu A_α unter der Abbildung φ, d.h. für für jede Borelmenge E in $\mathbb{D}$ ist

$$\mu_{\varphi,\alpha}(E) = A_\alpha(\varphi^{-1}(E)).$$

Damit ergibt sich für alle $f \in A^2_\alpha$ und $z \in \mathbb{D}$ weiter

$$C^*_\varphi C_\varphi f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} d\mu_{\varphi,\alpha}(w) = T_{\mu_{\varphi,\alpha}} f(z),$$

d.h. $C_\varphi^* C_\varphi = T_{\mu_{\varphi,\alpha}}$ ist der Toeplitzoperator zum Maß $\mu_{\varphi,\alpha}$. Dessen Berenzintransformierte ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu_{\varphi,\alpha}}(z) &= \int_{\mathbb{D}} |k_z^{(\alpha)}(w)|^2 d\mu_{\varphi,\alpha}(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |k_z^{(\alpha)}(\varphi(w))|^2 dA_\alpha(w) \\
&= (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)}} dA_\alpha(w) \\
&= \Phi(z)
\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Nach Satz 1.13 ist die Bedingung $\Phi \in L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$ äquivalent zu $C_\varphi^* C_\varphi = T_{\mu_{\varphi,\alpha}} \in S_{p/2}(A^2_\alpha)$. Dies ist nach Satz 1.3 aber genau dann der Fall, wenn $C_\varphi \in S_p(A^2_\alpha)$ erfüllt ist. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Je nach Situation erweist sich auch die folgende Charakterisierung als nützlich, die etwa im Beweis zu Lemma 11.11 in [**17**] und im Beweis zu Lemma 3.3 in [**19**] verwendet wird:

LEMMA 2.2. *Sei $p > \frac{2}{2+\alpha}$. Liegt die Funktion*

$$F: \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ z \mapsto (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2 (1-|w|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{2(3+\alpha)}} dA(w)$$

in $L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$, dann gehört auch die Funktion

$$\Phi: \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ z \mapsto (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)}} dA_\alpha(w)$$

zu $L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$ und der Kompositionsoperator

$$C_\varphi: A^2_\alpha \to A^2_\alpha$$

ist in $S_p(A^2_\alpha)$ enthalten.

Beweis. Seien also $p > \frac{2}{2+\alpha}$ und $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ gegeben, sodass die Funktion

$$F: \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ z \mapsto (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2 (1-|w|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{2(3+\alpha)}} dA(w)$$

in $L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$ liegt. Nach Lemma 2.1 genügt es für $C_\varphi \in S_p(A^2_\alpha)$ zu zeigen, dass die Funktion

$$\Phi: \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ z \mapsto (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)}} dA_\alpha(w)$$

zu $L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$ gehört. Gemäß Satz 4.28 in [**17**] existiert nun eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ gilt:

$$\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^2 (1-|w|^2)^\alpha dA(w) \leq C \left(|f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 (1-|w|^2)^{2+\alpha} dA(w) \right)$$

Wendet man diese Abschätzung bei festem $z \in \mathbb{D}$ auf die Funktion $f_z \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ an, welche durch

$$f_z(w) := \frac{(1-|z|^2)^{\frac{2+\alpha}{2}}}{\big(1-\overline{z}\varphi(w)\big)^{2+\alpha}}$$

für alle $w \in \mathbb{D}$ definiert ist, so ergibt sich

$$\Phi(z) \leq C(\alpha+1)\left(\frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{z}\varphi(0)|^{2(2+\alpha)}} + F(z)\right)$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Aufgrund der Voraussetzung $p > \frac{2}{2+\alpha}$ ist die Funktion

$$z \mapsto \frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{z}\varphi(0)|^{2(2+\alpha)}}$$

wegen

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{z}\varphi(0)|^{2(2+\alpha)}} \leq \frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{(1-|\varphi(0)|)^{2(2+\alpha)}}$$

nach Lemma 1.4 in $L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$ enthalten. Wegen $F \in L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$ folgt wie gewünscht $\Phi \in L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$. □

Da man die Zugehörigkeit des Kompositionsoperators C_φ zu den Schatten p-Klassen $S_p(A^2_\alpha)$ über die Eigenschaften von φ charakterisieren möchte, sind diese Aussagen alleine nicht zufriedenstellend, denn φ ist an den Integralbedingungen nur indirekt (d.h. nach einigen Transformationen) beteiligt. Daher interessiert man sich für Kriterien, die die Eigenschaften von φ direkt betreffen.

2. Funktionen mit beschränkter Valenz

Orientiert man sich an der entsprechenden Theorie im Fall der Hardyräume (vgl. Theorem 11.17 in **[17]**), so lässt sich im Hinblick auf die Kompaktheitsbedingung

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} = 0$$

ein Zusammenhang zwischen der Integrierbarkeit der Funktion

$$z \mapsto \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}$$

über $\mathbb{D}$ bezüglich des möbiusinvarianten Maßes λ und der Zugehörigkeit von C_φ zu den Schatten p-Klassen vermuten. Diese Vermutung wird durch das folgende Lemma unterstützt, dessen Beweis etwa in **[19]** (unmittelbar nach Lemma 3.2) und in **[17]** (im Beweis zu Theorem 11.10) zu finden ist.

LEMMA 2.3. *Seien $p \geq 2$, $\alpha > -1$. Ist $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion, für die der zugehörige Kompositionsoperator C_φ in $S_p(A^2_\alpha)$ liegt, dann ist*

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} d\lambda(z) < \infty.$$

Beweis. Sei also $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $C_\varphi \in S_p(A^2_\alpha)$. Man definiert nun den Operator $T := C_\varphi C_\varphi^*$ und bestimmt dessen Berenzintransformierte:

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{D}: \quad \widetilde{T}(z) &= \langle T k_z^{(\alpha)}, k_z^{(\alpha)} \rangle_\alpha = \langle C_\varphi C_\varphi^* k_z^{(\alpha)}, k_z^{(\alpha)} \rangle_\alpha \\ &= \langle C_\varphi^* k_z^{(\alpha)}, C_\varphi^* k_z^{(\alpha)} \rangle_\alpha = \| C_\varphi^* k_z^{(\alpha)} \|_{2,\alpha}^2 \end{aligned}$$

Ferner gilt nach Lemma 1.21:

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \| C_\varphi^* k_z^{(\alpha)} \|_{2,\alpha} = \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{\frac{2+\alpha}{2}}$$

Da mit C_φ auch C_φ^* in $S_p(A^2_\alpha)$ enthalten ist, gilt $T \in S_{p/2}(A^2_\alpha)$, sodass man nach Satz 1.9 bereits $\widetilde{T} \in L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$ erhält. Es folgt wie behauptet

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} d\lambda(z) &= \int_{\mathbb{D}} \| C_\varphi^* k_z^{(\alpha)} \|_{2,\alpha}^p d\lambda(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |\widetilde{T}(z)|^{\frac{p}{2}} d\lambda(z) < \infty. \end{aligned}$$

□

Man könnte nun erwarten, dass auch die Umkehrung dieser Aussage gilt, d.h. dass die Bedingung

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} d\lambda(z) < \infty$$

bereits $C_\varphi \in S_p(A^2_\alpha)$ impliziert. In der 2002 veröffentlichten Arbeit [**15**] wird aber anhand eines Gegenbeispiels gezeigt, dass dies im Allgemeinen nicht richtig ist.
In [**17**] und [**19**] wird allerdings durch eine zusätzliche Forderung an die den Kompositionsoperator induzierende Funktion $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ die Gültigkeit dieser Behauptung bewiesen:

SATZ 2.4. *Seien $p \geq 2$, $\alpha > -1$ und sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion, für die die Funktion*

$$\Psi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \ z \mapsto (1-|z|^2)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^4} dA(w)$$

auf $\mathbb{D}$ beschränkt ist. Dann liegt der zugehörige Kompositionsoperator C_φ genau dann in $S_p(A^2_\alpha)$, wenn

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} d\lambda(z) < \infty.$$

Während der in [**19**] dargestellte Beweis im Wesentlichen auf der komplexen Interpolationsmethode beruht, wird in [**17**] ein Zugang über den Schur-Test gewählt:

Satz 2.5 (Theorem 3.6, [**17**]). *Sei (X,μ) ein Maßraum, K eine nichtnegative messbare Funktion auf $X \times X$ und $1 < p < \infty$. Existieren $C_1, C_2 > 0$ und eine positive messbare Funktion h auf X, sodass*

$$\int_X K(x,y)h(y)^q d\mu(y) \le C_1 h(x)^q$$

für μ-fast alle $x \in X$ und

$$\int_X K(x,y)h(x)^p d\mu(x) \le C_2 h(y)^p$$

für μ-fast alle $y \in X$, wobei $1 < q < \infty$ durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ bestimmt ist, dann stellt $T: \; L^p(X,d\mu) \to L^p(X,d\mu)$ definiert durch

$$Tf(x) := \int_X K(x,y)f(y)d\mu(y) \quad (f \in L^p(X,d\mu), x \in X)$$

einen wohldefinierten, stetigen, linearen Operator mit Norm $\|T\| \le C_1^{1/q} C_2^{1/p}$ dar.

Damit lässt sich Satz 2.4 beweisen. Die Hinrichtung ist mit Lemma 2.3 bereits gezeigt, die Rückrichtung ergibt sich aus folgendem Lemma:

Lemma 2.6 (Lemma 11.11, [**17**]). *Ist $1 \le p < \infty$ und $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion mit*

(i) *Es gilt:*

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{p(2+\alpha)} d\lambda(z) < \infty$$

(ii) *Die Funktion*

$$\Psi: \; \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \; z \mapsto (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{4+\alpha}} dA(w)$$

ist auf $\mathbb{D}$ beschränkt.

dann gehört die Funktion

$$\Phi: \; \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \; z \mapsto (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)}} dA_\alpha(w)$$

zu $L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$.

Beweis. Man behandelt zunächst den Fall $p = 1$. Unter Verwendung des Satzes von Fubini und dem Forelli-Rudin-Lemma 1.19 erhält man

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \Phi(z)d\lambda(z) &= \int_{\mathbb{D}} \left((1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)}} dA_\alpha(w) \right) d\lambda(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-\varphi(w)\overline{z}|^{2(2+\alpha)}} \; dA_\alpha(w) \; dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-\varphi(w)\overline{z}|^{2(2+\alpha)}} \; dA(z) \; dA_\alpha(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-\varphi(w)\overline{z}|^{2+\alpha+(2+\alpha)}} \; dA(z) \right) dA_\alpha(w) \\
&\leq C \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{(1-|\varphi(w)|^2)^{2+\alpha}} dA_\alpha(w) \\
&= C(\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|w|^2}{1-|\varphi(w)|^2} \right)^{2+\alpha} d\lambda(w) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

mit einer Konstanten $C > 0$. Man bemerkt insbesondere, dass dieser Spezialfall ohne die Voraussetzung der beschränkten Valenz auskommt. Sei nun $1 < p < \infty$ beliebig vorgegeben. Um $\Phi \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$ zu zeigen, genügt nach Lemma 2.2 der Nachweis von $F \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$. Hierfür betrachtet man den Integraloperator T, welcher definiert wird durch

$$Tf(z) := \int_{\mathbb{D}} H(z,w) f(w) d\lambda(w),$$

wobei H den durch

$$H(z,w) := \frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}(1-|w|^2)^2(1-|\varphi(w)|^2)^{2+\alpha}|\varphi'(w)|^2}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(3+\alpha)}}$$

für alle $z, w \in \mathbb{D}$ gegebenen Integralkern bezeichnet. Nach Voraussetzung (i) ist die Funktion

$$f: \; \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \; z \mapsto \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{2+\alpha}$$

in $L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$ enthalten und offensichtlich gilt $F = Tf$. Zu zeigen bleibt also, dass T auf $L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$ beschränkt ist.
Verwendet man hierzu den Schur-Test 2.5 mit der einfachen Testfunktion $h \equiv 1$, so genügt es zu zeigen, dass die beiden Funktionen

$$I_1(z) := \int_{\mathbb{D}} H(z,w) d\lambda(w) \quad (z \in \mathbb{D})$$

und

$$I_2(w) := \int_{\mathbb{D}} H(z,w) d\lambda(z) \quad (w \in \mathbb{D})$$

beschränkt sind. Zunächst rechnet man für alle $z \in \mathbb{D}$ nach

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \int_{\mathbb{D}} H(z,w)d\lambda(w) \\ &= (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\varphi(w)|^2)^{2+\alpha}|\varphi'(w)|^2}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(3+\alpha)}} dA(w) \\ &\leq 2^{2+\alpha}(1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{4+\alpha}} dA(w) \\ &= 2^{2+\alpha}\Psi(z) \end{aligned}$$

und erhält die Beschränktheit (durch eine Konstante $C_1 > 0$) von I_1 nach (ii).
Nach Satz 1.20 existiert eine weitere Konstante $C_2 > 0$, sodass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(3+\alpha)}} dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-\varphi(w)\overline{z}|^{2+\alpha+(4+\alpha)}} dA(z) \\ &\leq \frac{C_2}{(1-|\varphi(w)|^2)^{4+\alpha}} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} I_2(w) &= \int_{\mathbb{D}} H(z,w)d\lambda(z) \\ &= (1-|w|^2)^2(1-|\varphi(w)|^2)^{2+\alpha}|\varphi'(w)|^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(3+\alpha)}} dA(z) \\ &\leq C_2 \frac{(1-|w|^2)^2|\varphi'(w)|^2}{(1-|\varphi(w)|^2)^2} \end{aligned}$$

für alle $w \in \mathbb{D}$. Nach dem Lemma von Schwarz-Pick gilt nun

$$\frac{(1-|w|^2)^2|\varphi'(w)|^2}{(1-|\varphi(w)|^2)^2} \leq 1$$

für alle $w \in \mathbb{D}$, sodass I_2 durch C_2 beschränkt ist. Zusammenfassend folgt die Behauptung. □

Die zusätzliche Forderung der Beschränktheit von Ψ sichert damit zwar die Gültigkeit der Vermutung, man würde sich aber eine mehr anschauliche Bedingung für die Funktion φ wünschen. Sowohl in **[17]** als auch in **[19]** wird dies mit Hilfe der „bounded valence“-Bedingung erreicht:

DEFINITION 2.7. *Eine holomorphe Funktion $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ heißt von beschränkter Valenz, falls eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass*

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad n_\varphi(z) := |\varphi^{-1}(\{z\})| < N.$$

Es zeigt sich nun, dass Funktionen von beschränkter Valenz bereits die Voraussetzung (ii) zu Satz 2.4 erfüllen. Hierzu benötigt man den folgenden Transformationssatz, der in einer allgemeineren Form etwa in **[6]** zu finden ist.

SATZ 2.8 (Transformationssatz). *Sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph und bezeichne*

$$C := \{z \in \mathbb{D};\ \varphi'(z) = 0\}$$

die Menge der kritischen Punkte von φ. Dann ist

$$\widetilde{n_\varphi}:\ \mathbb{D} \to [0,\infty],\ z \mapsto \widetilde{n_\varphi}(z) := |\varphi^{-1}(\{z\})\backslash C|$$

eine Borel-messbare Funktion. Ist $f : \mathbb{D} \to [0,\infty)$ eine weitere Borel-messbare Funktion, dann ist die Funktion $z \mapsto \widetilde{n_\varphi}(z)f(z)$ genau dann in $L^1(\mathbb{D}, dA)$ enthalten, wenn die Funktion $z \mapsto f(\varphi(z))|\varphi'(z)|^2$ in $L^1(\mathbb{D}, dA)$ liegt. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{D}} f(\varphi(z))|\varphi'(z)|^2 dA(z) = \int_{\mathbb{D}} \widetilde{n_\varphi}(z) f(z) dA(z).$$

Damit erhält man wie angekündigt:

LEMMA 2.9. *Sei $\alpha > -1$ und $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion von beschränkter Valenz. Dann ist die Funktion*

$$\Psi:\ \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ z \mapsto (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{4+\alpha}} dA(w)$$

auf $\mathbb{D}$ beschränkt.

Beweis. Da φ von beschränkter Valenz ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass:

$$\forall w \in \mathbb{D}: \quad n_\varphi(w) < N$$

Beachtet man, dass $\widetilde{n_\varphi}(w) \le n_\varphi(w) < N$ für alle $w \in \mathbb{D}$ gilt, so folgt damit für alle $z \in \mathbb{D}$ unter Verwendung des Forelli-Rudin-Lemmas 1.19 und des Transformationssatzes 2.8

$$\begin{aligned}
\Psi(z) &= (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{4+\alpha}} dA(w) \\
&= (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{\widetilde{n_\varphi}(w)}{|1-\overline{z}w|^{4+\alpha}} dA(w) \\
&\le N \underbrace{(1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-\overline{z}w|^{2+0+(2+\alpha)}} dA(w)}_{\le C} \\
&\le NC
\end{aligned}$$

mit einer von z unabhängigen Konstanten $C > 0$, d.h. Ψ ist auf $\mathbb{D}$ beschränkt. □

Nach Satz 2.4 ergibt sich also:

KOROLLAR 2.10 (Theorem 11.10, [**17**]). *Seien $p \ge 2$, $\alpha > -1$ und sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion von beschränkter Valenz. Dann* *liegt der zugehörige Kompositionsoperator C_φ genau dann in $S_p(A^2_\alpha)$, wenn*

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} d\lambda(z) < \infty. \tag{2.1}$$

3. Strenge Kompaktheit

Im vorangegangenen Abschnitt bildete die Grenzwertbedingung

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} = 0$$

für die Kompaktheit des Kompositionsoperators C_φ auf A^2_α den Ausgangspunkt für die Suche nach einem geeigneten Kriterium für die Zugehörigkeit zu $S_p(A^2_\alpha)$. Hierbei wurde die Integrierbarkeit der Funktion

$$z \mapsto \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}$$

über $\mathbb{D}$ bezüglich des möbiusinvarianten Maßes λ als Bedingung herangezogen. Obwohl die entsprechende Vermutung durch Satz 2.3 gestützt wird, lässt sich ein Beweis nur mit der zusätzlichen Forderung aus Definition 2.7 erbringen. Es bietet sich daher an, nach Alternativen zu suchen.

Nach Satz 1.17 ist C_φ auf A^2_α für $\alpha \geq 0$ kompakt, wenn

$$\lim_{|z|\to 1^-} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{2+\alpha} |\varphi'(z)|^2 = 0$$

erfüllt ist. Im Folgenden wird ein solcher Kompositionsoperator C_φ als *streng kompakt* bezeichnet. Es drängt sich daher die Frage auf, ob die Integrierbarkeit der Funktion

$$z \mapsto \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{2+\alpha} |\varphi'(z)|^2$$

in Zusammenhang mit der Zugehörigkeit von C_φ zu $S_p(A^2_\alpha)$ steht. Eine Antwort möchte ich mit dem folgenden Satz geben, dessen Beweis analog zu dem von Satz 2.6 erbracht werden kann:

SATZ 2.11. *Sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion, für die*

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{2+\alpha} |\varphi'(z)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\lambda(z) < \infty \tag{2.2}$$

mit $\alpha \geq 0$ und $p \geq 2$ erfüllt ist. Dann gehört der Kompositionsoperator C_φ zu $S_p(A^2_\alpha)$.

Beweis. Nach Lemma 2.2 genügt es zu zeigen, dass die Funktion

$$F:\ \mathbb{D}\to\mathbb{R},\ z\mapsto (1-|z|^2)^{2+\alpha}\int_{\mathbb{D}}\frac{|\varphi'(w)|^2(1-|w|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{2(3+\alpha)}}dA(w)$$

in $L^{p/2}(\mathbb{D},d\lambda)$ liegt. Definiert man ferner die Funktionen $f:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ durch

$$f(w):=\left(\frac{1-|w|^2}{1-|\varphi(w)|^2}\right)^{2+\alpha}|\varphi'(w)|^2$$

für alle $w\in\mathbb{D}$ und $H:\mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ durch

$$H(z,w):=\frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}(1-|w|^2)^2(1-|\varphi(w)|^2)^{2+\alpha}}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(3+\alpha)}}$$

für alle $z,w\in\mathbb{D}$, so ist offensichtlich

$$\forall z\in\mathbb{D}:\quad F(z)=\int_{\mathbb{D}}H(z,w)f(w)d\lambda(w).$$

Da nach Voraussetzung $f\in L^{p/2}(\mathbb{D},d\lambda)$ gilt, genügt es also zu zeigen, dass der Integraloperator mit Integralkern H auf $L^{p/2}(\mathbb{D},d\lambda)$ beschränkt ist. Nach dem Schur-Test 2.5 mit der konstanten Funktion $h\equiv 1$ ist dies erfüllt, falls die durch

$$I_1(z):=\int_{\mathbb{D}}H(z,w)d\lambda(w)\quad(z\in\mathbb{D})$$

und

$$I_2(w):=\int_{\mathbb{D}}H(z,w)d\lambda(z)\quad(w\in\mathbb{D})$$

definierten Funktionen $I_1,I_2:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ auf $\mathbb{D}$ beschränkt sind. Man rechnet für alle $z\in\mathbb{D}$ unter Verwendung von 1.20 nach

$$\begin{aligned}
I_1(z) &= \int_{\mathbb{D}}H(z,w)d\lambda(w)\\
&= (1-|z|^2)^{2+\alpha}\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|\varphi(w)|^2)^{2+\alpha}}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(3+\alpha)}}dA(z)\\
&\le C_1'(1-|z|^2)^{2+\alpha}\int_{\mathbb{D}}\frac{1}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{4+\alpha}}dA(z)\\
&= C_1'\underbrace{(1-|z|^2)^{2+\alpha}\int_{\mathbb{D}}\frac{1}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2+0+(2+\alpha)}}dA(z)}_{\le C_1''}\\
&\le C_1'C_1''=:C_1
\end{aligned}$$

Beachtet man, dass nach Korollar 1.22 eine Konstante $C_2''>0$ existiert, sodass

$$\forall z\in\mathbb{D}:\quad\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^2\le C_2''$$

erfüllt ist, dann erhält man für alle $w \in \mathbb{D}$ weiter

$$\begin{aligned}
I_2(w) &= \int_{\mathbb{D}} H(z,w)d\lambda(z) \\
&= (1-|w|^2)^2(1-|\varphi(w)|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(3+\alpha)}} dA(z) \\
&= (1-|w|^2)^2(1-|\varphi(w)|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-\varphi(w)\overline{z}|^{2+\alpha+(4+\alpha)}} dA(z) \\
&\leq (1-|w|^2)^2(1-|\varphi(w)|^2)^{2+\alpha} \frac{C_2'}{(1-|\varphi(w)|^2)^{4+\alpha}} \\
&= C_2' \underbrace{\left(\frac{1-|w|^2}{1-|\varphi(w)|^2}\right)^2}_{\leq C_2''} \\
&\leq C_2'C_2'' =: C_2
\end{aligned}$$

Zusammenfassend folgt also die Behauptung. $\square$

Erfreulich ist, dass man in dieser Situation ohne weitere Einschränkungen für φ auskommt. Darüber hinaus lässt sich die Bedingung 2.2 auf die Bedingung 2.1 zurückführen, d.h. man erhält eine Variante von Satz 2.10, die zwar ohne die „bounded valence“-Bedingung auskommt, dafür aber eine stärkere Integralbedingung fordert.

SATZ 2.12. *Sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph, sodass*

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{p\alpha}{2}} d\lambda(z) < \infty$$

für $\alpha > 0$ und $p \geq 2$ erfüllt ist. Dann gilt auch

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{2+\alpha} |\varphi'(z)|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\lambda(z) < \infty.$$

Insbesondere gehört C_φ zu $S_p(A^2_\alpha)$.

Beweis. Sei also $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ beliebig vorgegeben mit

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{p\alpha}{2}} d\lambda(z) < \infty$$

für $\alpha > 0$ und $p \geq 2$. Dann rechnet man für alle $z \in \mathbb{D}$ unter Verwendung des Lemmas von Schwarz-Pick nach:

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{2+\alpha} |\varphi'(z)|^2\right)^{\frac{p}{2}} \\
= &\underbrace{\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}|\varphi'(z)|\right)^p}_{\leq 1} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{p\alpha}{2}} \leq \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{p\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

Also gilt wie behauptet

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}}\left(\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{2+\alpha}|\varphi'(z)|^2\right)^{\frac{p}{2}}d\lambda(z)\\ \le\ &\int_{\mathbb{D}}\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{p\alpha}{2}}d\lambda(z)<\infty.\end{aligned}$$

Nach Satz 2.11 folgt dann $C_\varphi \in S_p(A^2_\alpha)$. □

4. Kompaktheit auf dem kleinen Blochraum

Ist $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ gegeben, sodass C_φ einen auf $\mathcal{B}_0$ kompakten Kompositionsoperator darstellt, dann ist nach Satz 1.24 die Grenzwertbedingung

$$\lim_{|z|\to 1^-}\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}|\varphi'(z)|=0$$

und damit die Voraussetzung zu Satz 1.17 im Fall $\alpha = 0$ erfüllt, d.h. C_φ ist auf A^2_0 und daher nach Satz 1.15 bereits auf allen Bergmanräumen A^2_α mit $\alpha > -1$ kompakt. Es lässt sich also ein Zusammenhang zwischen der Integrierbarkeit der Funktion

$$z\mapsto \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}|\varphi'(z)|$$

über $\mathbb{D}$ bezüglich des möbiusinvarianten Maßes λ und der Zugehörigkeit von C_φ zu $S_p(A^2_\alpha)$ vermuten.

Satz 2.13. *Sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph, sodass für ein $p \ge 2$ die Bedingung*

$$\int_{\mathbb{D}}\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}|\varphi'(z)|\right)^{p}d\lambda(z)<\infty \tag{2.3}$$

erfüllt ist. Dann liegt der Kompositionsoperator C_φ in $S_p(A^2_\alpha)$ für alle $\alpha > -1$.

Beweis. Nach Lemma 2.2 genügt es zu zeigen, dass die Funktion

$$F:\ \mathbb{D}\to\mathbb{R},\ z\mapsto (1-|z|^2)^{2+\alpha}\int_{\mathbb{D}}\frac{|\varphi'(w)|^2(1-|w|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{2(3+\alpha)}}dA(w)$$

in $L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$ liegt. Definiert man ferner die Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(w):=\left(\frac{1-|w|^2}{1-|\varphi(w)|^2}|\varphi'(w)|\right)^2$$

für alle $w \in \mathbb{D}$ und $H : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ durch

$$H(z,w):=\frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}(1-|w|^2)^{2+\alpha}(1-|\varphi(w)|^2)^2}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(3+\alpha)}}$$

für alle $z, w \in \mathbb{D}$, so gilt offensichtlich

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad F(z) = \int_{\mathbb{D}} H(z,w) f(w) d\lambda(w).$$

Aufgrund der Voraussetzung $f^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$ bzw. $f \in L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$ genügt es also zu zeigen, dass der Integraloperator zum Integralkern H auf $L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$ beschränkt ist. Nach dem Schur-Test 2.5 mit der konstanten Funktion $h \equiv 1$ ist dies erfüllt, falls die durch

$$I_1(z) := \int_{\mathbb{D}} H(z,w) d\lambda(w) \quad (z \in \mathbb{D})$$

und

$$I_2(w) := \int_{\mathbb{D}} H(z,w) d\lambda(z) \quad (w \in \mathbb{D})$$

definierten Funktionen $I_1, I_2 : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{D}$ beschränkt sind. Man rechnet für alle $z \in \mathbb{D}$ unter Verwendung von 1.20 nach

$$\begin{aligned}
I_1(z) &= \int_{\mathbb{D}} H(z,w) d\lambda(w) \\
&= (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha (1-|\varphi(w)|^2)^2}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(3+\alpha)}} dA(w) \\
&\leq C_1' \underbrace{(1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2+\alpha+(2+\alpha)}} dA(w)}_{\leq C_1''} \\
&\leq C_1' C_1'' =: C_1
\end{aligned}$$

Ebenso rechnet man für $w \in \mathbb{D}$ unter Verwendung des Forelli-Rudin-Lemmas 1.19 nach:

$$\begin{aligned}
I_2(w) &= \int_{\mathbb{D}} H(z,w) d\lambda(z) \\
&= (1-|w|^2)^{2+\alpha}(1-|\varphi(w)|^2)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(3+\alpha)}} dA(z) \\
&= (1-|w|^2)^{2+\alpha}(1-|\varphi(w)|^2)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-\varphi(w)\overline{z}|^{2+\alpha+(4+\alpha)}} dA(z) \\
&\leq (1-|w|^2)^{2+\alpha}(1-|\varphi(w)|^2)^2 \frac{C_2'}{(1-|\varphi(w)|^2)^{4+\alpha}} \\
&\leq C_2' \underbrace{\left(\frac{1-|w|^2}{1-|\varphi(w)|^2}\right)^{2+\alpha}}_{\leq C_2''} \\
&\leq C_2' C_2'' =: C_2,
\end{aligned}$$

wobei sich die Existenz der Konstanten $C_2'' > 0$ aus Korollar 1.22 ergibt. Zusammenfassend folgt damit die Behauptung. $\square$

Man stellt fest, dass die Integralbedingungen aus den Sätzen 2.11 (im Fall $\alpha = 0$) und 2.13 übereinstimmen. Während aber Satz 2.11 in diesem Fall nur die Zugehörigkeit des Kompositionsoperators zu $S_p(A^2_0)$ liefert, garantiert Satz 2.13 bereits die Zugehörigkeit zu $S_p(A^2_\alpha)$ für alle $\alpha > -1$.

Bemerkenswert ist darüber hinaus die Möbiusinvarianz der Forderung (2.3), d.h. ist (2.3) für eine Funktion $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ erfüllt, so ist (2.3) auch für $\varphi \circ \sigma$ und $\sigma \circ \varphi$ mit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ erfüllt:

Definition 2.14. *Für eine holomorphe Funktion $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ sei*

$$\widehat{\varphi} : \ \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \ z \mapsto \frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} |\varphi'(z)|.$$

Lemma 2.15. *Sei $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ gegeben, sodass $\widehat{\varphi} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$ für $p > 0$. Dann gehören für alle $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ auch die Funktionen $\widehat{\varphi \circ \sigma}$ und $\widehat{\sigma \circ \varphi}$ zu $L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$.*

Beweis. Sei also $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ gegeben, sodass $\widehat{\varphi} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$ erfüllt ist. Ist $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, so rechnet man für alle $z \in \mathbb{D}$ nach:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi \circ \sigma}(z) &= \frac{1 - |z|^2}{1 - |(\varphi \circ \sigma)(z)|^2} |(\varphi \circ \sigma)'(z)| \\
&= \underbrace{\left(\frac{1 - |\sigma(z)|^2}{1 - |\varphi(\sigma(z))|^2} |\varphi'(\sigma(z))| \right)}_{=\widehat{\varphi}(\sigma(z))} \underbrace{\left(\frac{1 - |z|^2}{1 - |\sigma(z)|^2} |\sigma'(z)| \right)}_{=1} \\
&= \widehat{\varphi}(\sigma(z))
\end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma \circ \varphi}(z) &= \frac{1 - |z|^2}{1 - |(\sigma \circ \varphi)(z)|^2} |(\sigma \circ \varphi)'(z)| \\
&= \underbrace{\left(\frac{1 - |\varphi(z)|^2}{1 - |\sigma(\varphi(z))|^2} |\sigma'(\varphi(z))| \right)}_{=1} \underbrace{\left(\frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} |\varphi'(z)| \right)}_{=\widehat{\varphi}(z)} \\
&= \widehat{\varphi}(z)
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\widehat{\varphi} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$ erfüllt. Die Eigenschaften des Maßes λ liefern damit

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\widehat{\varphi \circ \sigma}(z)\right)^p d\lambda(z) = \int_{\mathbb{D}} \left(\widehat{\varphi}(\sigma(z))\right)^p d\lambda(z) = \int_{\mathbb{D}} \left(\widehat{\varphi}(z)\right)^p d\lambda(z).$$

Ferner gilt

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\widehat{\sigma \circ \varphi}(z)\right)^p d\lambda(z) = \int_{\mathbb{D}} \left(\widehat{\varphi}(z)\right)^p d\lambda(z).$$

Es folgt daher wie gewünscht $\widehat{\varphi \circ \sigma}, \widehat{\sigma \circ \varphi} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$. $\square$

Für die induzierten Operatoren bedeutet dies: Ist C_φ ein Kompositionsoperator für den $\widehat{\varphi} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$ mit $p \geq 2$ erfüllt ist, der also nach Satz 2.13 zu $S_p(A^2_\alpha)$ für alle $\alpha > -1$ gehört, dann liegen für alle $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ auch die Operatoren $C_{\varphi\circ\sigma}$ und $C_{\sigma\circ\varphi}$ in $S_p(A^2_\alpha)$ für $\alpha > -1$.
Beachtet man, dass $S_p(A^2_\alpha)$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{L}(A^2_\alpha)$ darstellt, so ist diese Eigenschaft wegen

$$C_{\varphi\circ\sigma} = \underbrace{C_\sigma}_{\in\mathcal{L}(A^2_\alpha)} C_\varphi \qquad \text{und} \qquad C_{\sigma\circ\varphi} = C_\varphi \underbrace{C_\sigma}_{\in\mathcal{L}(A^2_\alpha)} .$$

wenig verwunderlich. Da jede holomorphe Abbildung einen stetigen Kompositionsoperator auf A^2_α induziert, würde man sogar erwarten, dass dies für alle $\sigma \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ gilt, d.h. man würde die Einschränkung $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ in obigem Lemma gerne fallen lassen. Dem Beweis lässt sich unter Verwendung des Lemmas von Schwarz-Pick

$$\forall z \in \mathbb{D} : \quad \widehat{\varphi \circ \sigma}(z) \leq \widehat{\varphi}(\sigma(z))$$

und

$$\forall z \in \mathbb{D} : \quad \widehat{\sigma \circ \varphi}(z) \leq \widehat{\varphi}(z)$$

entnehmen. Man erhält damit zumindest das folgende Lemma:

Lemma 2.16. *Sei $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ gegeben, sodass $\widehat{\varphi} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$ für $p > 0$. Ist $\sigma \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, dann gilt auch $\widehat{\sigma \circ \varphi} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$.*

Beweis. Sei also $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ mit $\widehat{\varphi} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$ für $p > 0$ gegeben. Ist $\sigma \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ beliebig, so folgt wegen $\widehat{\sigma \circ \varphi} \leq \widehat{\varphi}$

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\widehat{\sigma \circ \varphi}(z)\right)^p d\lambda(z) \leq \int_{\mathbb{D}} \left(\widehat{\varphi}(z)\right)^p d\lambda(z) < \infty$$

und damit die Behauptung. □

Ein weiterer Vorteil dieses Kriteriums ist, dass sich die Funktionen φ, die auf $\mathcal{B}_0$ kompakte Kompositionsoperatoren C_φ induzieren, auch durch geometrische Bedingungen an $\varphi(\mathbb{D})$ beschreiben lassen (vgl. Theorem 5 in [**11**]). Dies lässt hoffen, dass ähnliche Charakterisierungen auch für die Integrierbarkeit der Funktionen $\widehat{\varphi}$ möglich sind. Ein erster Ansatz wird in Kapitel 4 erarbeitet.

KAPITEL 3

Kriterien für die Konvergenzgeschwindigkeit

Im vorangegangenen Kapitel wurde versucht, die Zugehörigkeit von Kompositionsoperatoren zu den Schatten p-Klassen durch die Integrierbarkeit gewisser Funktionen bezüglich des möbiusinvarianten Maßes zu charakterisieren. Die Anwendbarkeit dieser Kriterien hängt also davon ab, wie sich die Integrandenfunktionen „am Rand“ des Einheitskreises verhalten.

Dementsprechend soll es in diesem Kapitel darum gehen, wie die Konvergenzgeschwindigkeit in den Kompaktheitskriterien für Kompositionsoperatoren auf Bergmanräumen

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} = 0 \tag{3.1}$$

bzw.

$$\lim_{|z|\to 1^-} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{2+\alpha} |\varphi'(z)|^2 = 0 \tag{3.2}$$

die Zugehörigkeit zu $S_p(A^2_\alpha)$ bedingt. Ist der entsprechende Kompositionsoperator nicht nur auf einem Bergmanraum, sondern auch auf dem kleinen Blochraum kompakt, so lässt sich analog der Einfluss der Konvergenzgeschwindigkeit in

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}|\varphi'(z)| = 0 \tag{3.3}$$

auf die Zugehörigkeit zu $S_p(A^2_\alpha)$ studieren. Genauer sollen die von Funktionen $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ induzierten Kompositionsoperatoren auf Zugehörigkeit zu $S_p(A^2_\alpha)$ untersucht werden, für die eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass eine der Abschätzungen

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \le C(1-|z|^2)^\omega \tag{3.4}$$

oder

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{2+\alpha} |\varphi'(z)|^2 \le C(1-|z|^2)^\omega \tag{3.5}$$

oder

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}|\varphi'(z)| \le C(1-|z|^2)^\omega \tag{3.6}$$

mit einem $\omega > 0$ erfüllt ist. Man definiert:

Definition 3.1. *Sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine beliebige holomorphe Funktion.*

(a) *Ist (3.4) mit einem $\omega > 0$ und einem $C > 0$ erfüllt, so nennt man C_φ ω-kompakt auf A^2_α.*
(b) *Ist (3.5) mit einem $\omega > 0$ und einem $C > 0$ erfüllt, so nennt man C_φ streng ω-kompakt auf A^2_α.*
(c) *Ist (3.6) mit einem $\omega > 0$ und einem $C > 0$ erfüllt, so nennt man C_φ ω-kompakt auf $\mathcal{B}_0$.*

1. Anwendung der Integralkriterien

Zunächst stellt man fest, dass sich die in den Sätzen 2.10, 2.11 und 2.13 angegebenen Integralbedingungen unter Ausnutzung von Lemma 1.4 auf Funktionen anwenden lassen, die die Bedingungen (3.4), (3.5) bzw. (3.6) erfüllen. Genauer ergibt sich der folgende Satz:

Satz 3.2. *Sei $p \geq 2$ gegeben und $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Dann gilt:*

(a) *Sei $\alpha > -1$ und φ zusätzlich von beschränkter Valenz. Induziert φ einen ω-kompakten Kompositionsoperator auf A^2_α, dann liegt dieser in $S_p(A^2_\alpha)$, falls*
$$\omega > \frac{2}{p(2+\alpha)}.$$
(b) *Sei $\alpha \geq 0$. Induziert φ einen streng ω-kompakten Kompositionsoperator auf A^2_α, dann liegt dieser in $S_p(A^2_\alpha)$, falls*
$$\omega > \frac{2}{p}.$$
(c) *Induziert φ einen ω-kompakten Kompositionsoperator auf $\mathcal{B}_0$, dann gehört dieser für alle $\alpha > -1$ zu $S_p(A^2_\alpha)$, falls*
$$\omega > \frac{1}{p}.$$

Beweis. Sei $p \geq 2$ gegeben und $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph.

(a) Ist φ zusätzlich von beschränkter Valenz, dann liegt für $\alpha > -1$ der Kompositionsoperator C_φ genau dann in $S_p(A^2_\alpha)$, wenn
$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} d\lambda(z) < \infty.$$
Sei nun $\omega > \frac{2}{p(2+\alpha)}$ beliebig vorgegeben. Ist C_φ ω-kompakt auf A^2_α, so existiert definitionsgemäß eine Konstante $C > 0$ mit
$$\forall z \in \mathbb{D} : \quad \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \leq C(1-|z|^2)^\omega.$$

Man rechnet nun unter Verwendung von Lemma 1.4 nach:

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} d\lambda(z) \le C^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\omega \frac{p(2+\alpha)}{2} - 2} dA(z) < \infty,$$

da nach Voraussetzung

$$\omega \frac{p(2+\alpha)}{2} - 2 > -1$$

erfüllt ist.

(b) Ist $\alpha \ge 0$ gegeben und induziert φ einen streng ω-kompakten Kompositionsoperator C_φ auf A^2_α für $\omega > \frac{2}{p}$, dann erhält man nach Definition eine Konstante $C > 0$ mit

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{2+\alpha} |\varphi'(z)|^2 \le C(1-|z|^2)^{\omega}.$$

Es ergibt sich also

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{2+\alpha} |\varphi'(z)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\lambda(z) \le C^{\frac{p}{2}} \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\omega \frac{p}{2} - 2} dA(z).$$

Da nach Voraussetzung

$$\omega \frac{p}{2} - 2 > -1$$

erfüllt ist, gilt nach Lemma 1.4:

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{2+\alpha} |\varphi'(z)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\lambda(z) < \infty$$

Gemäß Satz 2.11 folgt nun wie gewünscht $C_\varphi \in S_p(A^2_\alpha)$.

(c) Induziert φ einen ω-kompakten Kompositionsoperator auf $\mathcal{B}_0$ mit $\omega > \frac{1}{p}$, dann existiert definitionsgemäß eine Konstante $C > 0$, sodass

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} |\varphi'(z)| \le C(1-|z|^2)^{\omega}.$$

Es ergibt sich also

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} |\varphi'(z)| \right)^{p} d\lambda(z) \le C^p \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\omega p - 2} dA(z)$$

Wegen $\omega > \frac{1}{p}$ gilt

$$\omega p - 2 > -1$$

und somit nach Lemma 1.4:

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} |\varphi'(z)| \right)^{p} d\lambda(z) < \infty$$

Nach Satz 2.13 erhält man nun $C_\varphi \in S_p(A^2_\alpha)$ für alle $\alpha > -1$. □

Es stellt sich nun die Frage, ob diese Aussagen noch weiter verschärft werden können, wenn nicht der Umweg über die Integralkriterien gegangen wird, sondern wenn direkt (d.h. in 2.1 und 2.2) die zur Verfügung stehenden Abschätzungen genutzt werden.

2. Hinreichende Kriterien

Zunächst untersucht man den Fall, dass die den Kompositionsoperator induzierende Funktion φ einer Abschätzung (3.4) genügt. Hierzu verwendet man Lemma 2.1.

SATZ 3.3. *Seien* $\alpha > -1$ *und* $p > \frac{2}{2+\alpha}$ *gegeben und sei* $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *eine holomorphe Funktion, die der Abschätzung* (3.4) *mit einer Konstanten* $C > 0$ *und*

$$\frac{1}{1+\frac{p(1+\alpha)}{2}} < \omega < 1 \tag{3.7}$$

genügt, dann gehört C_φ *zu* $S_p(A^2_\alpha)$.

Beweis. Da nach Voraussetzung $p > \frac{2}{2+\alpha}$ erfüllt ist, gilt $C_\varphi \in S_p(A^2_\alpha)$ nach Satz 2.1 genau dann, wenn $\Phi \in L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$, wobei die Funktion Φ definiert ist durch

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \Phi(z) := (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)}} dA_\alpha(w).$$

Wegen (3.7) und $p > \frac{2}{2+\alpha}$ gilt insbesondere

$$\frac{1}{p} < \min\left\{\frac{1}{2}(1+\alpha)\frac{\omega}{1-\omega},\ \frac{1}{2}(2+\alpha)\right\},$$

sodass ferner ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\frac{1}{p} < \frac{1}{2}\varepsilon\omega < \min\left\{\frac{1}{2}(1+\alpha)\frac{\omega}{1-\omega},\ \frac{1}{2}(2+\alpha)\right\}$$

existiert. Unter Verwendung der Voraussetzung (3.4) erhält man für alle $z, w \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned}
\frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)}} &= \frac{1}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^\varepsilon} \cdot \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)-\varepsilon}} \\
&\le \frac{2^\varepsilon}{(1-|\varphi(w)|^2)^\varepsilon} \cdot \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)-\varepsilon}} \\
&= 2^\varepsilon \cdot \left(\frac{1-|w|^2}{1-|\varphi(w)|^2}\right)^\varepsilon \cdot \frac{(1-|w|^2)^{\alpha-\varepsilon}}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)-\varepsilon}} \\
&\le (2C)^\varepsilon \cdot (1-|w|^2)^{\varepsilon\omega} \cdot \frac{(1-|w|^2)^{\alpha-\varepsilon}}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)-\varepsilon}} \\
&= (2C)^\varepsilon \cdot \frac{(1-|w|^2)^{\alpha-\varepsilon(1-\omega)}}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)-\varepsilon}}
\end{aligned}$$

Es folgt also für alle $z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)}} dA_\alpha(w) \\
&= (\alpha+1)(1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)}} dA(w) \\
&\leq (\alpha+1)(2C)^\varepsilon (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\alpha-\varepsilon(1-\omega)}}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)-\varepsilon}} dA(w)
\end{aligned}$$

Man definiert nun $\alpha' \in \mathbb{R}$ durch

$$\alpha' := \alpha - \varepsilon(1-\omega)$$

und $t \in \mathbb{R}$ durch

$$2 + \alpha' + t := 2(2+\alpha) - \varepsilon,$$

d.h. es gilt

$$t = 2(2+\alpha) - \varepsilon - 2 - \alpha' = 2 + \alpha - \varepsilon\omega.$$

Nach Wahl von ε gilt dann

$$\alpha' = \alpha - \varepsilon(1-\omega) > \alpha - (1+\alpha) = -1$$

und

$$t = 2 + \alpha - \varepsilon\omega > 2 + \alpha - (2+\alpha) = 0.$$

Damit ergibt sich aus Lemma 1.20 die Existenz einer Konstanten $C' > 0$ (welche von α' und t also von ε abhängt) mit

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\alpha'}}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{1+\alpha'+t}} dA(w) \leq \frac{C'}{(1-|z|^2)^t}.$$

Zusammenfassend folgt:

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &\leq (\alpha+1)(2C)^\varepsilon (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\alpha-\varepsilon(1-\omega)}}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2(2+\alpha)-\varepsilon}} dA(w) \\
&= (\alpha+1)(2C)^\varepsilon (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\alpha'}}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2+\alpha'+t}} dA(w) \\
&\leq (\alpha+1)(2C)^\varepsilon C' (1-|z|^2)^{2+\alpha-t} \\
&\leq C''(1-|z|^2)^{\varepsilon\omega}
\end{aligned}$$

Da nach Wahl von ε insbesondere

$$\frac{p}{2}\varepsilon\omega - 2 > -1$$

erfüllt ist, ist die Funktion $z \mapsto C''(1-|z|^2)^{\varepsilon\omega}$ und damit auch Φ in $L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$ enthalten. Wie zu Beginn festgestellt, folgt hiermit $C_\varphi \in S_p(A^2_\alpha)$. $\square$

Ebenso lässt sich durch Anwendung von Lemma 2.2 ein direktes Kriterium für Funktionen φ finden, die einer Abschätzung (3.5) genügen. Dadurch ergibt sich allerdings nur eine geringe Verbesserung gegenüber Satz 3.2 (b).

Satz 3.4. *Seien* $\alpha > -1$ *und* $p > \frac{2}{2+\alpha}$ *gegeben und sei* $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *eine holomorphe Funktion, die der Abschätzung* (3.5) *mit einer Konstanten* $C > 0$ *und*

$$\frac{2}{p} < \omega < 2 + \alpha \tag{3.8}$$

genügt, dann gehört C_φ *zu* $S_p(A^2_\alpha)$.

Beweis. Seien also $\alpha > -1$ und $p > \frac{2}{2+\alpha}$ gegeben und sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion, die der Abschätzung (3.5) mit einer Konstanten $C > 0$ und einem $\frac{2}{p} < \omega < 2 + \alpha$ genügt, d.h. es gilt:

$$\forall z \in \mathbb{D} : \quad \left(\frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \right)^{2+\alpha} |\varphi'(z)|^2 \leq C(1 - |z|^2)^\omega$$

Für den Nachweis der Behauptung, dass C_φ in $S_p(A^2_\alpha)$ liegt, genügt es nach Lemma 2.2 zu zeigen, dass die Funktion

$$F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \; z \mapsto (1 - |z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2 (1 - |w|^2)^{2+\alpha}}{|1 - \overline{z}\varphi(w)|^{2(3+\alpha)}} dA(w)$$

in $L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$ enthalten ist. Man rechnet zunächst für alle $z, w \in \mathbb{D}$ nach

$$\begin{aligned} & \frac{|\varphi'(w)|^2 (1 - |w|^2)^{2+\alpha}}{|1 - \overline{z}\varphi(w)|^{2(3+\alpha)}} \\ \leq \; & 2^{2+\alpha} \left(\left(\frac{1 - |w|^2}{1 - |\varphi(w)|^2} \right)^{2+\alpha} |\varphi'(w)|^2 \right) \frac{1}{|1 - \overline{z}\varphi(w)|^{4+\alpha}} \\ \leq \; & 2^{2+\alpha} C \frac{(1 - |w|^2)^\omega}{|1 - \overline{z}\varphi(w)|^{4+\alpha}} \end{aligned}$$

und erhält damit für alle $z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} F(z) &= (1 - |z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2 (1 - |w|^2)^{2+\alpha}}{|1 - \overline{z}\varphi(w)|^{2(3+\alpha)}} dA(w) \\ &\leq 2^{2+\alpha} C (1 - |z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^\omega}{|1 - \overline{z}\varphi(w)|^{4+\alpha}} dA(w) \\ &= 2^{2+\alpha} C (1 - |z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^\omega}{|1 - z\overline{\varphi(w)}|^{2+\omega+(2+\alpha-\omega)}} dA(w) \\ &\leq 2^{2+\alpha} C (1 - |z|^2)^{2+\alpha} \cdot \frac{C'}{(1 - |z|^2)^{2+\alpha-\omega}} \\ &= \underbrace{2^{2+\alpha} C C'}_{=:C''} (1 - |z|^2)^\omega, \end{aligned}$$

wobei sich die Existenz der Konstanten $C' > 0$ aus Lemma 1.20 ergibt. (Hierzu beachtet man, dass nach Voraussetzung $2 + \alpha - \omega > 0$ bzw.

$\omega > -1$ erfüllt ist.) Es folgt also

$$\int_{\mathbb{D}} \big(F(z)\big)^{\frac{p}{2}} d\lambda(z) \le (C'')^{p/2} \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\omega\frac{p}{2}-2} dA(z).$$

Nach Voraussetzung gilt nun $\omega\frac{p}{2} - 2 > -1$, sodass nach Lemma 1.4 wie gewünscht $F \in L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$ folgt. $\square$

Mit einem dazu analogen Beweis zeigt weiter:

Satz 3.5. *Seien $\alpha > -1$ und $p > \frac{2}{2+\alpha}$ gegeben und sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion, die der Abschätzung* (3.6) *mit einer Konstanten $C > 0$ und*

$$\frac{1}{p} < \omega < \frac{1}{2}(2+\alpha) \tag{3.9}$$

genügt, dann gehört C_φ zu $S_p(A^2_\alpha)$.

Beweis. Seien also $\alpha > -1$ und $p > \frac{2}{2+\alpha}$ gegeben und sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion, die der Abschätzung (3.6) mit einer Konstanten $C > 0$ und einem $\frac{1}{p} < \omega < \frac{1}{2}(2+\alpha)$ genügt, d.h. es gilt:

$$\forall z \in \mathbb{D} : \quad \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} |\varphi'(z)| \le C(1-|z|^2)^\omega$$

Um die Behauptung, dass C_φ in $S_p(A^2_\alpha)$ liegt, zu beweisen, genügt es nach Lemma 2.2 zu zeigen, dass die Funktion

$$F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \; z \mapsto (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2(1-|w|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{2(3+\alpha)}} dA(w)$$

in $L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$ enthalten ist. Man rechnet zunächst für alle $z, w \in \mathbb{D}$ nach

$$\begin{aligned} \frac{|\varphi'(w)|^2(1-|w|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{2(3+\alpha)}} &\le 4\left(\frac{1-|w|^2}{1-|\varphi(w)|^2}|\varphi'(w)|\right)^2 \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{2(2+\alpha)}} \\ &\le 4C^2 \frac{(1-|w|^2)^{\alpha+2\omega}}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{2(2+\alpha)}} \end{aligned}$$

und erhält damit für alle $z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} F(z) &= (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2(1-|w|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{2(3+\alpha)}} dA(w) \\ &\le 4C^2(1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\alpha+2\omega}}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{2(2+\alpha)}} dA(w) \\ &= 4C^2(1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\alpha+2\omega}}{|1-z\overline{\varphi(w)}|^{2+(\alpha+2\omega)+(2+\alpha-2\omega)}} dA(w) \\ &\le 4C^2(1-|z|^2)^{2+\alpha} \cdot \frac{C'}{(1-|z|^2)^{2+\alpha-2\omega}} \\ &\le \underbrace{4C^2C'}_{=:C''}(1-|z|^2)^{2\omega} \end{aligned}$$

wobei sich die Existenz der Konstanten $C' > 0$ aus Lemma 1.20 ergibt. (Hierzu beachtet man, dass $2+\alpha-2\omega > 0$ und $\alpha+2\omega > -1$ erfüllt ist.) Es folgt also

$$\int_{\mathbb{D}} \big(F(z)\big)^p d\lambda(z) \leq (C'')^p \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\omega p-2} dA(z).$$

Nach Voraussetzung gilt nun $\omega p - 2 > -1$, sodass nach Lemma 1.4 wie gewünscht $F \in L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$ folgt. □

Funktionen, die (3.5) genügen, besitzen eine weitere, bemerkenswerte Eigenschaft:

SATZ 3.6. *Sei $\alpha > -1$ gegeben und sei weiter $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion, die der Bedingung* (3.5) *mit Konstanten $C > 0$ und $\omega > 0$ genügt, wobei*

$$1+\alpha < \omega < 2+\alpha. \tag{3.10}$$

Dann ist die Funktion

$$\Psi:\ \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ z \mapsto (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{4+\alpha}} dA(w)$$

auf $\mathbb{D}$ beschränkt.

Beweis. Sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, so gilt insbesondere

$$\omega - (2+\alpha) > -1 \quad \text{und} \quad (2+\alpha) - \omega > 0.$$

Daher existiert nach Lemma 1.20 ein $C' > 0$ mit

$$\begin{aligned}
\Psi(z) &= (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{4+\alpha}} dA(w) \\
&\leq C(1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\varphi(w)|^2)^{2+\alpha}(1-|w|^2)^{\omega-(2+\alpha)}}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{4+\alpha}} dA(w) \\
&\leq 2^{2+\alpha} C(1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\omega-(2+\alpha)}}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{2}} dA(w) \\
&= 2^{2+\alpha} C(1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\omega-(2+\alpha)}}{|1-\overline{z}\varphi(w)|^{2+(\omega-(2+\alpha))+((2+\alpha)-\omega)}} dA(w) \\
&\leq 2^{2+\alpha} C(1-|z|^2)^{2+\alpha} \cdot \frac{C'}{(1-|z|^2)^{(2+\alpha)-\omega}} \\
&= 2^{2+\alpha} CC' \underbrace{(1-|z|^2)^{\omega}}_{\leq 2^{\omega}} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Damit folgt die Behauptung. □

3. Notwendige Kriterien

Nach Lemma 2.3 erfüllt jede Funktion $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, für die der zugehörige Kompositionsoperator C_φ in $S_p(A^2_\alpha)$ für $p \geq 2$ und $\alpha > -1$ enthalten ist, die Bedingung

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \right)^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} d\lambda(z) < \infty.$$

Dies bietet die Möglichkeit, notwendige Kriterien für die Zugehörigkeit von Kompositionsoperatoren zu Schatten p-Klassen auf Grundlage der Konvergenzgeschwindigkeit in (3.1) zu finden. Dafür würde man Abschätzungen der Form

$$\forall z \in \mathbb{D} : \ \frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \geq C(1 - |z|^2)^\omega$$

mit $\omega \in (0, 1)$ und $C > 0$ ansetzen. Erfüllt aber eine Funktion φ eine solche Abschätzung, dann gilt insbesondere

$$\forall z \in \mathbb{D} : \quad 1 - |\varphi(z)|^2 \leq \frac{1}{C}(1 - |z|^2)^{1-\omega},$$

sodass $|\varphi(z)| \to 1$ für $|z| \to 1$ gelten muss. Da dies offensichtlich eine (zu) starke Forderung darstellt, bietet sich folgende Vereinfachung an: Man betrachtet holomorphe Funktionen $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ für die ein $\omega \in (0, 1)$, ein $C > 0$ und eine offene Menge $\Gamma \subseteq \mathbb{D}$ existieren, sodass

$$\forall z \in \Gamma : \quad \frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \geq C(1 - |z|^2)^\omega.$$

Dabei hängt für eine gegebene Funktion φ die Existenz einer solchen Abschätzung natürlich von der geometrischen Gestalt der Menge Γ ab. In dieser Situation erhält man für das zu untersuchende Integral den folgenden Zusammenhang:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \right)^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} d\lambda(z) \\ \geq \ & \int_{\Gamma} \left(\frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \right)^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} d\lambda(z) \\ \geq \ & C^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} \cdot \int_{\Gamma} (1 - |z|^2)^{\omega \frac{p(2+\alpha)}{2} - 2} dA(z) \end{aligned}$$

Dies führt unmittelbar zu der Frage, für welche Werte von $\gamma \in \mathbb{R}$ bei vorgegebener Menge Γ die Integrale

$$\int_{\Gamma} (1 - |z|^2)^\gamma dA(z)$$

einen endlichen Wert besitzen.

DEFINITION 3.7. *Sei $\kappa \in \mathbb{R}$ beliebig. Eine offene Menge Γ heißt κ-Menge, wenn gilt:*

$$\int_\Gamma (1-|z|^2)^\gamma dA(z) < \infty \quad \iff \quad \gamma > \kappa$$

Man erhält damit das folgende Kriterium:

SATZ 3.8. *Sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine beliebige holomorphe Funktion, die einer Abschätzung*

$$\forall z \in \Gamma : \ \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \geq C(1-|z|^2)^\omega \tag{3.11}$$

für $C > 0$, $\omega \in (0,1)$ und eine κ-Menge $\Gamma \subseteq \mathbb{D}$ genügt. Gilt $C_\varphi \in S_p(A^2_\alpha)$ für $p \geq 2$ und $\alpha > -1$, dann ist

$$\omega > \frac{2(2+\kappa)}{p(2+\alpha)}.$$

Beweis. Sei also $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ gegeben, sodass die Abschätzung (3.11) mit $C > 0$, $\omega \in (0,1)$ und einer κ-Menge $\Gamma \subseteq \mathbb{D}$ erfüllt ist. Es gelte nun $C_\varphi \in S_p(A^2_\alpha)$ für $p \geq 2$ und $\alpha > -1$. Man definiert

$$\gamma := \omega \frac{p(2+\alpha)}{2} - 2,$$

sodass nach obiger Rechnung

$$\int_\Gamma (1-|z|^2)^\gamma dA(z) < \infty$$

und damit nach Definition einer κ-Menge $\gamma > \kappa$ gelten muss. Es folgt die Behauptung. $\square$

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich:

KOROLLAR 3.9. *Sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine beliebige holomorphe Funktion, die der Abschätzung (3.11) für $C > 0$, $\omega \in (0,1)$ und eine κ-Menge $\Gamma \subseteq \mathbb{D}$ genügt. Gilt*

$$\omega \leq \frac{2(2+\kappa)}{p(2+\alpha)},$$

für $p \geq 2$ und $\alpha > -1$, so ist $C_\varphi \notin S_p(A^2_\alpha)$.

Nach Lemma 1.4 ist die Menge $\mathbb{D}$ eine (-1)-Menge. Im Hinblick auf die eingangs beschriebene Problemstellung ist man natürlich besonders an κ-Mengen interessiert, die die Einheitskreislinie nur an einem Punkt (etwa bei 1) berühren. Als erste Möglichkeit bietet sich daher ein Winkelbereich an.

LEMMA 3.10. *Seien $\theta \in (0, \pi/2)$ und $\rho \in (0, 2\cos(\theta))$ gegeben. Dann ist durch*

$$\Gamma_{\rho,\theta} := \{1 - re^{it};\ 0 < r < \rho,\ -\theta < t < \theta\}$$

eine (-2)-Menge in $\mathbb{D}$ definiert, die die Einheitskreislinie nur bei 1 berührt.

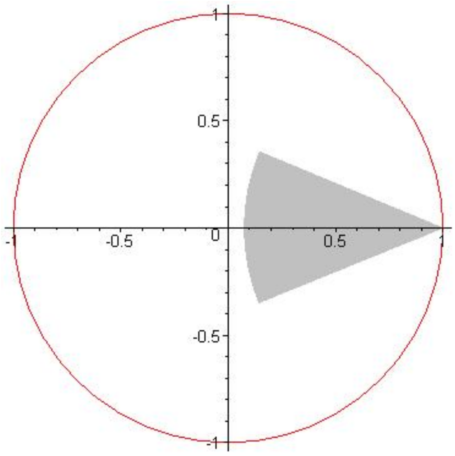

ABBILDUNG 1. Winkelbereich $\Gamma_{\rho,\theta}$ für $\theta = \frac{\pi}{8}$ und $\rho = \frac{3}{2}\cos(\theta)$.

Beweis. Seien also $\theta \in (0, \pi/2)$ und $\rho \in (0, 2\cos(\theta))$ beliebig vorgegeben. Für alle $z = 1 - re^{it} \in \Gamma_{\rho,\theta}$ überprüft man zunächst

$$1 - |z|^2 = r(2\cos(t) - r) \geq r(2\cos(\theta) - \rho) > 0,$$

sodass $\Gamma_{\rho,\theta} \subseteq \mathbb{D}$ erfüllt ist. Für $\gamma \in \mathbb{R}$ und $z = 1 - re^{it} \in \Gamma_{\rho,\theta}$ rechnet man ferner nach:

$$(2\cos(t) - r)^\gamma \leq \begin{cases} 2^\gamma, & \gamma \geq 0 \\ (2\cos(\theta) - \rho)^\gamma, & \gamma < 0 \end{cases}$$

und

$$(2\cos(t) - r)^\gamma \geq \begin{cases} (2\cos(\theta) - \rho)^\gamma, & \gamma \geq 0 \\ 2^\gamma, & \gamma < 0 \end{cases}$$

Daher existiert das Integral

$$\int_{\Gamma_{\rho,\theta}} (1 - |z|^2)^\gamma dA(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\rho \int_{-\theta}^\theta r^\gamma (2\cos(t) - r)^\gamma r \; dt \; dr$$

genau dann, wenn

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\rho \int_{-\theta}^\theta r^{1+\gamma} \; dt \; dr = \begin{cases} \frac{2\theta\rho^{2+\gamma}}{(2+\gamma)\pi}, & \gamma > -2 \\ \infty, & \gamma \leq 2 \end{cases}$$

endlich ist. Also gilt

$$\int_{\Gamma_{\rho,\theta}} (1 - |z|^2)^\gamma dA(z) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma > -2,$$

sodass $\Gamma_{\rho,\theta}$ wie behauptet eine (-2)-Menge darstellt. Nach Konstruktion gilt offensichtlich $\overline{\Gamma_{\rho,\theta}} \cap \partial\mathbb{D} = \{1\}$. $\square$

Da also in diesem Fall $\kappa = -2$ gilt, ermöglicht Satz 3.9 keine negative Aussage. Das folgende Lemma zeigt nun aber, wie $\kappa = -1$ erreicht werden kann.

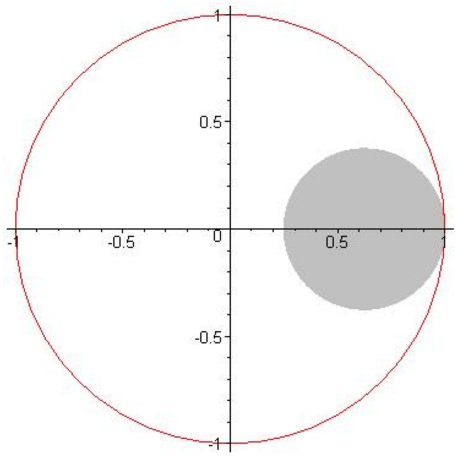

ABBILDUNG 2. Winkelbereich Γ_ρ für $\rho = \frac{3}{8}$.

LEMMA 3.11. *Sei $\rho \in (0,1)$ beliebig vorgegeben. Dann ist die Menge*

$$\Gamma_\rho := D_\rho(1-\rho)$$

eine (-1)-Menge und berührt die Einheitskreislinie nur bei 1.

Beweis. Sei also $\rho \in (0,1)$ beliebig aber fest vorgegeben. Für $\gamma > -1$ rechnet man unter Verwendung von Lemma 1.4 nach:

$$\int_{\Gamma_\rho} (1-|z|^2)^\gamma dA(z) \leq \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^\gamma dA(z) < \infty$$

Man betrachtet nun die holomorphe und offensichtlich bijektive Abbildung

$$\psi : \; \Gamma_\rho \to \mathbb{D}, \; z \mapsto \frac{z-(1-\rho)}{\rho}.$$

Diese erfüllt

$$\begin{aligned} 1-|\psi(z)|^2 &= 1-\frac{1}{\rho^2}\big(|z|^2 - 2(1-\rho)\operatorname{Re} z + (1-\rho)^2\big) \\ &= \frac{1}{\rho^2}\big(2(1-\rho)\operatorname{Re} z - |z|^2 - 1 + 2\rho\big) \\ &\leq \frac{1}{\rho^2}\big(2(1-\rho) - |z|^2 - 1 + 2\rho\big) \\ &= \frac{1}{\rho^2}(1-|z|^2) \end{aligned}$$

und

$$\psi'(z) = \frac{1}{\rho}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Es folgt also unter Verwendung des Transformationssatzes für $\gamma \leq -1$

$$\begin{aligned} \rho^{2(1-\gamma)} \int_{\Gamma_\rho} (1-|z|^2)^\gamma dA(z) &\geq \frac{1}{\rho^2} \int_{\Gamma_\rho} (1-|\psi(z)|^2)^\gamma dA(z) \\ &= \int_{\Gamma_\rho} (1-|\psi(z)|^2)^\gamma |\psi'(z)|^2 dA(z) \\ &= \int_{\psi(\Gamma_\rho)} (1-|z|^2)^\gamma dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^\gamma dA(z) \end{aligned}$$

sodass nach Lemma 1.4

$$\int_{\Gamma_\rho} (1-|z|^2)^\gamma dA(z)$$

keinen endlichen Wert annehmen kann. Zusammenfassend folgt

$$\int_{\Gamma_\rho} (1-|z|^2)^\gamma dA(z) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma > -1,$$

sodass Γ_ρ wie behauptet eine (-1)-Menge darstellt. Der Zusatz ist nach Definition von Γ_ρ offensichtlich. $\square$

Die so gefundenen Mengen Γ_ρ bilden daher einen optimalen Ausgangspunkt für das Auffinden negativer Kriterien mit Satz 3.9.
Geometrisch lässt sich dies damit erklären, dass Γ_ρ im Gegensatz zu $\Gamma_{\rho,\theta}$ die Einheitskreislinie $\partial\mathbb{D}$ tangential berührt.

KAPITEL 4

Geometrische Eigenschaften des Bildes

Auf der Suche nach einer vollständigen Charakterisierung der Zugehörigkeit von Kompositionsoperatoren zu Schatten p-Klassen sind wohl die Integralbedingungen die hoffnungsvollsten Kandidaten. Dennoch ermöglichen auch speziellere Kriterien (wie etwa die Bedingungen für die Konvergenzgeschwindigkeit in Kapitel 3) weitreichende Aussagen. Eine weitere Möglichkeit ist es nun, einen Zusammenhang mit der Geometrie des Bildes $\varphi(\mathbb{D})$ herzustellen. Im Fall der Hardy-Räume wurde diese Idee beispielsweise in [**20**] verfolgt.
In der vorliegenden Situation von Kompositionsoperatoren auf Bergmanräumen wird ein solcher Zugang durch die Arbeit [**11**] motiviert, in der für die Kompaktheit der Kompositionsoperatoren auf dem kleinen Blochraum eine geometrische Bedingung gegeben wird. Durch eine geringfügige Abänderung der dort verwendeten Begriffe lässt sich zeigen, dass die geometrische Gestalt des Bildes der Einheitskreisscheibe unter einer holomorphen Abbildung die Existenz einer Abschätzung (3.5) (und nicht (3.6), wie man eigentlich erwarten würde!) bedingt. Unter Beachtung der entsprechenden Sätze erhält man die gewünschten Aussagen über die Zugehörigkeit zu $S_p(A^2_\alpha)$.

DEFINITION 4.1. *Es sei $G \subset \mathbb{D}$ eine offene Menge mit $\overline{G} \cap \partial\mathbb{D} = \{1\}$.*

(a) *Ist $\varepsilon > 0$, so besitzt die Menge G eine „ε-Spitze bei 1“, wenn*
$$\operatorname{dist}(w, \partial G) = O(|1-w|^{1+\varepsilon})$$
für $w \to 1$ in G.

(b) *Die ε-Spitze heißt „nichttangential“, falls G in einer Umgebung von 1 in einem Stolz-Winkelbereich liegt, d.h. falls Zahlen $r > 0$ und $M > 0$ existieren mit*
$$G \cap D_r(1) \subseteq \Gamma_M.$$

Vergleicht man diese Definition mit 1.26, so stellt man fest, dass jede ε-Spitze insbesondere eine Spitze ist.

Um einen Zusammenhang zwischen den analytischen Eigenschaften einer Abbildung $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ und der Geometrie des Bildes $\varphi(\mathbb{D})$ herzustellen, dient der folgende Satz, den man unter anderem als Corollary 1.4 in [**12**] finden kann:

SATZ 4.2 (Verzerrungssatz von Koebe). *Sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe und injektive Funktion. Es bezeichne $G := \varphi(\mathbb{D})$ das Bild der*

Einheitskreisscheibe unter der Abbildung φ. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{D}$:

$$\frac{1}{4}(1-|z|^2)|\varphi'(z)| \leq \operatorname{dist}(\varphi(z), \partial G) \leq (1-|z|^2)|\varphi'(z)|$$

Damit lässt sich nun der angekündigte Satz formulieren:

SATZ 4.3. *Sei $\alpha > 0$ beliebig vorgegeben und sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe und injektive Abbildung. Erfüllt die Menge $G := \varphi(\mathbb{D})$ die Eigenschaften*

(i) *Es gilt $\overline{G} \cap \partial\mathbb{D} = \{1\}$.*
(ii) *G besitzt eine nichttangentiale $\frac{\alpha}{2}$-Spitze bei 1.*

so genügt φ der Abschätzung (3.5) mit einer Konstanten $C > 0$ und $\omega = \alpha$, d.h. es gilt:

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{2+\alpha} |\varphi'(z)|^2 \leq C(1-|z|^2)^\alpha$$

Beweis. Sei also $\alpha > 0$ vorgegeben und sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe und injektive Abbildung, sodass die (nach dem Satz von der offenen Abbildung) offene Menge $G := \varphi(\mathbb{D})$ die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Da bei 1 eine $\frac{\alpha}{2}$-Spitze vorliegt, gilt

$$\operatorname{dist}(w, \partial G) = O(|1-w|^{1+\frac{\alpha}{2}}) \quad \text{für} \quad w \to 1,$$

d.h. man findet ein $r_1 > 0$ und $C_1 > 0$, sodass

$$\forall w \in G \cap D_{r_1}(1): \quad \operatorname{dist}(w, \partial G) \leq C_1|1-w|^{1+\frac{\alpha}{2}}.$$

Da diese Spitze nichttangential ist, findet man ferner ein $r_2 > 0$ und $C_2 > 0$, sodass

$$\forall w \in G \cap D_{r_2}(1): \quad |1-w| \leq C_2(1-|w|^2).$$

Setzt man $r := \min\{r_1, r_2\} > 0$, so rechnet man zunächst für alle $z \in \varphi^{-1}(G \cap D_r(1))$ unter Verwendung des Verzerrungssatzes von Koebe nach:

$$\begin{aligned}
\frac{1-|z|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^{1+\frac{\alpha}{2}}}|\varphi'(z)| &\leq \frac{4\operatorname{dist}(\varphi(z), \partial G)}{(1-|\varphi(z)|^2)^{1+\frac{\alpha}{2}}} \\
&\leq 4C_1\frac{|1-\varphi(z)|^{1+\frac{\alpha}{2}}}{(1-|\varphi(z)|^2)^{1+\frac{\alpha}{2}}} \\
&\leq 4C_1C_2^{1+\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

Ferner gilt $|1-\varphi(z)| \geq r > 0$ für alle $z \notin \varphi^{-1}(G \cap D_r(1))$, sodass wegen $\overline{G} \cap \partial\mathbb{D} = \{1\}$ ein $\rho \in (0,1)$ existieren muss mit

$$\mathbb{D} \backslash \varphi^{-1}(G \cap D_r(1)) \subseteq \varphi^{-1}(D_\rho(0)).$$

Als holomorphe und bijektive Funktion besitzt $\varphi : \mathbb{D} \to G$ eine holomorphe Umkehrfunktion $\psi : G \to \mathbb{D}$, weshalb $K := \psi(\overline{D_\rho(0)})$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{D}$ darstellt. Es folgt weiter

$$\varphi^{-1}(D_\rho(0)) \subseteq \varphi^{-1}(\overline{D_\rho(0)}) = \psi(\overline{D_\rho(0)}) = K.$$

Definiert man
$$C_3 := \max_{z\in K} |\varphi'(z)| < \infty,$$
so ergibt sich für alle $z \notin \varphi^{-1}(G \cap D_r(1))$:
$$\frac{1-|z|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^{1+\frac{\alpha}{2}}} |\varphi'(z)| \le C_3 \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}$$
Zusammenfassend folgt wie behauptet die Existenz einer Konstanten $C > 0$, sodass für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt
$$\frac{1-|z|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^{1+\frac{\alpha}{2}}} |\varphi'(z)| \le C^{\frac{1}{2}}$$
bzw.
$$\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{2+\alpha} |\varphi'(z)|^2 \le C(1-|z|^2)^\alpha.$$
□

KOROLLAR 4.4. *Sei $\alpha > 0$ beliebig vorgegeben und sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe und injektive Abbildung. Erfüllt die Menge $G := \varphi(\mathbb{D})$ die Eigenschaften*

(i) *Es gilt $\overline{G} \cap \partial\mathbb{D} = \{1\}$.*
(ii) *G besitzt eine nichttangentiale $\frac{\alpha}{2}$-Spitze bei 1.*

so liegt der zu φ gehörende Kompositionsoperator C_φ in $S_p(A^2_\alpha)$ für alle $p > \frac{2}{\alpha}$.

Beweis. Sind die Voraussetzungen erfüllt, so genügt nach dem obigen Satz die Funktion φ der Abschätzung
$$\forall z \in \mathbb{D} : \quad \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{2+\alpha} |\varphi'(z)|^2 \le C(1-|z|^2)^\alpha$$
mit einer Konstanten $C > 0$. Nach Satz 3.4 liegt C_φ daher in $S_p(A^2_\alpha)$ für alle $p > \frac{2}{2+\alpha}$ mit $\frac{1}{p} < \frac{2}{\alpha}$, also für alle
$$p > \max\left\{\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{2+\alpha}\right\} = \frac{2}{\alpha}.$$
□

KAPITEL 5

Beispiele für die Anwendbarkeit der Kriterien

1. Geometrische Charakterisierung

Sei $\alpha > 0$ gegeben. Man betrachtet die Funktion

$$f_\alpha : \ [-1, 1] \to \mathbb{R},$$

welche für alle $x \in [-1, 1]$ definiert ist durch

$$f_\alpha(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } x \in [-1, 0] \\ \frac{x}{2^\alpha}, & \text{für } x \in (0, \frac{1}{2}) \\ (1-x)^{1+\alpha}, & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Diese bestimmt nun eine Menge G_α durch

$$G_\alpha := \{z \in \mathbb{D}; \ |\operatorname{Im} z| < f_\alpha(\operatorname{Re} z)\}.$$

Das foldende Lemma stellt einige Eigenschaften von G_α zusammen.

Lemma 5.1. *Sei also $\alpha > 0$ und G_α definiert wie oben. Dann gilt:*

(a) *G_α ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet und erfüllt $\overline{G_\alpha} \cap \partial\mathbb{D} = \{1\}$.*
(b) *G_α hat eine nichttangentiale α-Spitze bei 1.*

Beweis. Sei also $\alpha > 0$ beliebig vorgegeben. Da die Funktion f_α stetig ist, stellt G_α eine offene Menge dar. Nach Konstruktion ist G_α ein einfach zusammenhängedes Gebiet und erfüllt ferner $\overline{G_\alpha} \cap \partial\mathbb{D} = \{1\}$, womit (a) gezeigt ist.
Ferner ergibt sich für alle $w \in G_\alpha \cap D_{1/2}(1)$ wegen $\operatorname{Re} w > \frac{1}{2}$:

$$\operatorname{dist}(w, \partial G_\alpha) \leq f_\alpha(\operatorname{Re} w) - |\operatorname{Im} w| \leq f_\alpha(\operatorname{Re} w) = (1 - \operatorname{Re} w)^{1+\alpha}$$

und

$$|1 - w|^{1+\alpha} = \left((1 - \operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2\right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \geq (1 - \operatorname{Re} w)^{1+\alpha}.$$

Es folgt also

$$\frac{\operatorname{dist}(w, \partial G_\alpha)}{|1 - w|^{1+\alpha}} \leq 1$$

und damit

$$\operatorname{dist}(w, \partial G_\alpha) = O(|1 - w|^{1+\alpha}) \quad \text{für} \quad w \to 1 \text{ in } G_\alpha,$$

d.h. G_α hat bei 1 eine α-Spitze. Beachtet man, dass für $w \in G_\alpha$ mit $\operatorname{Re} w > \frac{1}{2}$ gilt

$$(\operatorname{Im} w)^2 = |\operatorname{Im} w|^2 < (f_\alpha(\operatorname{Re} w))^2 = (1 - \operatorname{Re} w)^{2(1+\alpha)},$$

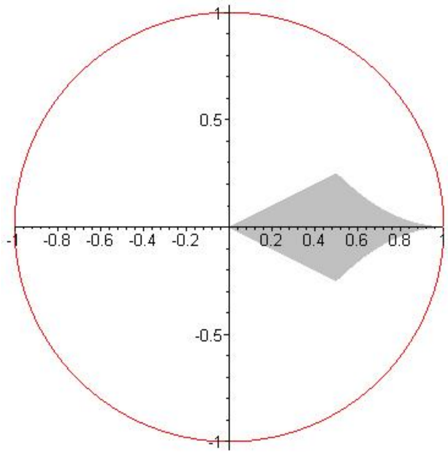

ABBILDUNG 1. G_α im Fall $\alpha = 1$.

so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{|1-w|}{1-|w|^2} &= \frac{\left((1-\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1-(\operatorname{Re} w)^2 - (\operatorname{Im} w)^2} \\
&< \frac{\left((1-\operatorname{Re} w)^2 + (1-\operatorname{Re} w)^{2(1+\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-(\operatorname{Re} w)^2 - (1-\operatorname{Re} w)^{2(1+\alpha)}} \\
&= \frac{\left((1-\operatorname{Re} w)^2 + (1-\operatorname{Re} w)^{2(1+\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}}{(1-\operatorname{Re} w)(1+\operatorname{Re} w) - (1-\operatorname{Re} w)^{2(1+\alpha)}} \\
&= \frac{\Big(1 + \overbrace{(1-\operatorname{Re} w)^{2\alpha}}^{\leq 1}\Big)^{\frac{1}{2}}}{1 + \underbrace{\operatorname{Re} w}_{>\frac{1}{2}} - \underbrace{(1-\operatorname{Re} w)^{1+2\alpha}}_{\leq 1}} \\
&< 2\sqrt{2},
\end{aligned}$$

d.h. $G_\alpha \cap D_{1/2}(1)$ liegt in dem Stolz-Winkelbereich $\Gamma_{2\sqrt{2}}$ und die Spitze bei 1 ist nichttangential. Damit ist auch (b) gezeigt. $\square$

Nach dem Riemannschen Abbildungssatz existiert nun für $\alpha > 0$ eine biholomorphe Abbildung

$$\varphi_\alpha : \mathbb{D} \to G_\alpha,$$

die nach Satz 4.4 einen Kompositionsoperator C_{φ_α} induziert, welcher für alle $p > \frac{1}{\alpha}$ zu $S_p(A^2_{2\alpha})$ gehört.

2. Konvergenzgeschwindigkeit

DEFINITION 5.2. *Für $\beta \in (0,1)$ bezeichne φ_β die Funktion*

$$\varphi_\beta : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto 1-(1-z)^\beta.$$

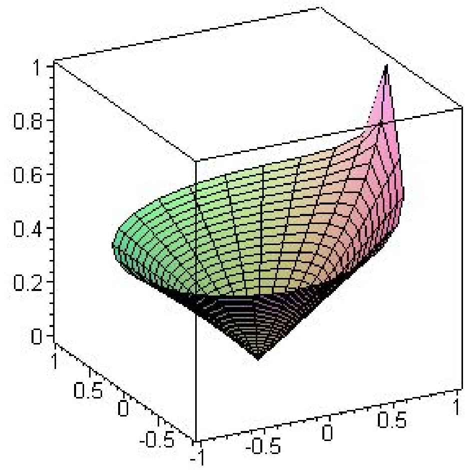

ABBILDUNG 2. Analytische Landschaft der Funktion $\varphi_{1/2}$.

Für die Behandlung dieser Funktionen benötigt man einige elementare Hilfsaussagen:

LEMMA 5.3. *Sei $\beta \in (0,1)$ beliebig. Dann gilt für alle $t \in [0, \pi/2]$:*

$$\cos(\beta t) - \cos^{\beta}(t) \geq 0$$

Beweis. Zunächst stellt man fest, dass für alle $0 \leq x < \pi/2$ gilt

$$-\log(\cos(x)) = \int_0^x \tan(\xi) d\xi \leq x \tan(x)$$

und somit

$$\log(\cos(x)) + x\tan(x) \geq 0.$$

Sei nun $t \in [0, \pi/2]$ beliebig. Dann betrachtet man die Funktion

$$f: \ (0,1] \to \mathbb{R}, \ \beta \mapsto \Big(\cos(\beta t)\Big)^{\frac{1}{\beta}} = \exp\left(\frac{1}{\beta}\log\Big(\cos(\beta t)\Big)\right).$$

Diese ist differenzierbar mit

$$f'(\beta) = -\Big(\cos(\beta t)\Big)^{\frac{1}{\beta}} \frac{1}{\beta^2} \underbrace{\Big(\log(\cos(\beta t)) + \beta t \tan(\beta t)\Big)}_{\geq 0, \text{ da } \beta t \in [0,\pi/2)} \leq 0$$

für alle $\beta \in (0,1)$, d.h. f ist auf $(0,1]$ monoton fallend und es gilt für alle $\beta \in (0,1)$:

$$\Big(\cos(\beta t)\Big)^{\frac{1}{\beta}} = f(\beta) \geq f(1) = \cos(t).$$

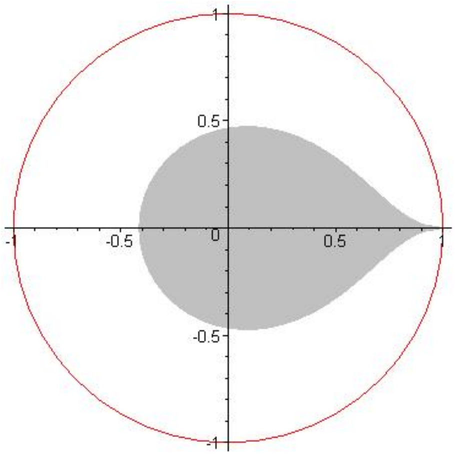

ABBILDUNG 3. Bildmenge $\varphi_{1/2}(\mathbb{D})$.

Die Monotonie der Funktion $x \mapsto x^\beta$ auf $[0,\infty)$ liefert

$$\cos(\beta t) \geq \cos^\beta(t),$$

womit die Behauptung bewiesen ist. $\square$

LEMMA 5.4. *Für $\gamma > -2$ gilt*

$$\int_{\mathbb{D}} |1-z|^\gamma dA(z) < \infty.$$

Beweis. Für $z \in \mathbb{D}$ liegt der Punkt $w := 1-z$ in der rechten Halbebene $\{\zeta \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}\zeta > 0\}$ und besitzt daher eine Polardarstellung $w = re^{it}$ mit $r > 0$ und $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Es folgt

$$|z|^2 = |1-w|^2 = |1-re^{it}|^2 = 1 - 2r\cos(t) + r^2$$

und damit wegen $|z| < 1$:

$$0 < r < 2\cos(t)$$

Sei nun $\gamma > -2$ gegeben. Unter Verwendung ebener Polarkoordinaten um den Punkt 1 lässt sich $\mathbb{D}$ nach obiger Bemerkung durch $z = 1 - re^{it}$ mit $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $r \in (0, 2\cos(t))$ parametrisieren. Man rechnet damit die Behauptung nach:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |1-z|^\gamma dA(z) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos(t)} r^{\gamma+1}\ dr\ dt \\
&= \frac{2^{2+\gamma}}{(2+\gamma)\pi}\underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2+\gamma}(t)\ dt}_{<\pi} \\
&< \frac{2^{2+\gamma}}{2+\gamma} < \infty
\end{aligned}$$

$\square$

Man erhält damit:

Korollar 5.5. *Für alle $\beta \in (0,1)$ ist die Funktion φ_β auf $\mathbb{D}$ holomorph und nimmt ihre Werte in $\mathbb{D}$ an.*

Beweis. Sei also $\beta \in (0,1)$ beliebig vorgegeben. Für alle $z \in \mathbb{D}$ ist $\operatorname{Re}(1-z) > 0$, d.h. $1-z$ liegt im Definitionsbereich des Hauptzweigs des komplexen Logarithmus Log. Die Funktion φ_β besitzt daher die Darstellung

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \varphi_\beta(z) = 1-(1-z)^\beta = 1-\exp\Big(\beta \operatorname{Log}(1-z)\Big)$$

und ist als Komposition holomorpher Funktionen holomorph auf $\mathbb{D}$. Sei nun $z \in \mathbb{D}$ beliebig. Man rechnet nach:

$$1-|\varphi_\beta(z)|^2 = 1-|1-(1-z)^\beta|^2 = 2\operatorname{Re}(1-z)^\beta - |1-z|^{2\beta}$$

Setzt man $w := 1-z$ und betrachtet die Polardarstellung $w = re^{it}$ von w mit $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $0 < r < 2\cos(t)$ (vgl. Beweis zu Lemma 5.4), so ergibt sich nach Lemma 5.3

$$\begin{aligned} 2\cos(\beta t) - r^\beta &= (2-2^\beta)\cos(\beta t) + \big(2^\beta\cos(\beta t) - r^\beta\big) \\ &\geq (2-2^\beta)\cos(\beta t) + 2^\beta \underbrace{\big(\cos(\beta t) - \cos^\beta(t)\big)}_{\geq 0} \\ &\geq (2-2^\beta)\cos(\beta t) \\ &\geq (2-2^\beta)\cos\big(\beta\frac{\pi}{2}\big) \;>\; 0. \end{aligned}$$

Es folgt schließlich

$$\begin{aligned} 1-|\varphi_\beta(z)|^2 &= 2\operatorname{Re}(1-z)^\beta - |1-z|^{2\beta} \\ &= 2\operatorname{Re} w^\beta - |w|^{2\beta} \\ &= 2r^\beta\cos(\beta t) - r^{2\beta} \\ &= r^\beta \underbrace{\Big(2\cos(\beta t) - r^\beta\Big)}_{>0} \;>\; 0 \end{aligned}$$

und daher $|\varphi_\beta(z)| < 1$. Da $z \in \mathbb{D}$ beliebig war, erhält man $\varphi_\beta(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, womit die Behauptung bewiesen ist. □

Das folgende Korollar beschreibt nun die Wachstumseigenschaften der Funktionen φ_β.

Satz 5.6. *Sei $\beta \in (0,1)$ beliebig. Für alle $\theta_1 \in [0,1]$ und $\theta_2 \in \mathbb{R}$ mit*

$$\theta_1 + \theta_2 = 1-\beta$$

existiert eine Konstante $C > 0$, sodass

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_\beta(z)|^2} \leq C(1-|z|^2)^{\theta_1}|1-z|^{\theta_2}. \tag{5.1}$$

Beweis. Sei also $\beta \in (0,1)$ beliebig vorgegeben. Zunächst bestimmt man für alle $z = 1 - re^{it} \in \mathbb{D}$:

$$1 - |\varphi_\beta(z)|^2 = r^\beta\big(2\cos(\beta t) - r^\beta\big)$$

und

$$1 - |z|^2 = r\big(2\cos(t) - r\big).$$

Sind nun $\theta_1 \in [0,1]$ und $\theta_2 \in \mathbb{R}$ mit $\theta_1 + \theta_2 = 1 - \beta$ gegeben, so rechnet man nach

$$\begin{aligned}
\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_\beta(z)|^2} &= \frac{r\big(2\cos(t) - r\big)}{r^\beta\big(2\cos(\beta t) - r^\beta\big)} \\
&= r^{1-\beta} \cdot \frac{2\cos(t) - r}{2\cos(\beta t) - r^\beta} \\
&= \frac{\big(2\cos(t) - r\big)^{1-\theta_1}}{2\cos(\beta t) - r^\beta} \cdot \Big(r\big(2\cos(t) - r\big)\Big)^{\theta_1} \cdot r^{\theta_2} \\
&= \frac{\big(2\cos(t) - r\big)^{1-\theta_1}}{2\cos(\beta t) - r^\beta} \cdot (1-|z|^2)^{\theta_1} |1-z|^{\theta_2}
\end{aligned}$$

Beachtet man

$$2\cos(\beta t) - r^\beta \geq (2 - 2^\beta)\cos\big(\beta\frac{\pi}{2}\big) > 0$$

und

$$\big(2\cos(t) - r\big)^{1-\theta_1} \leq 2^{1-\theta_1},$$

so folgt die Existenz einer Konstanten $C > 0$ (welche von θ_1 und β abhängt) mit

$$\frac{\big(2\cos(t) - r\big)^{1-\theta_1}}{2\cos(\beta t) - r^\beta} \leq C.$$

Zusammenfassend erhält man die Behauptung. □

Diese Eigenschaft lässt sich auch im Sinne von (3.4) und (3.5) interpretieren:

KOROLLAR 5.7. *Sei $\beta \in (0,1)$ beliebig. Es gilt:*

(a) *Es existiert ein $C > 0$, sodass:*

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_\beta(z)|^2} \leq C(1-|z|^2)^{1-\beta}$$

Insbesondere stellt C_{φ_β} für alle $\alpha > -1$ einen auf A^2_α kompakten Operator dar.

(b) *Ist $\alpha > 0$, dann existiert eine Konstante $C > 0$, sodass:*

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_\beta(z)|^2}\right)^{2+\alpha} |\varphi_\beta'(z)|^2 \leq C(1-|z|^2)^{\alpha(1-\beta)}$$

Insbesondere stellt C_{φ_β} für alle $\alpha > 0$ einen auf A^2_α streng kompakten Kompositionsoperator dar.

Beweis. Sei also $\beta \in (0,1)$ beliebig.

(a) In Satz 5.6 wählt man speziell $\theta_1 = 1-\beta$ und $\theta_2 = 0$ und erhält die Behauptung.

(b) Nach dem Lemma von Schwarz-Pick erhält man unter Verwendung von Teil (a) für $\alpha > 0$ und alle $z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_\beta(z)|^2}\right)^{2+\alpha} |\varphi_\beta'(z)|^2 &= \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_\beta(z)|^2}\right)^{\alpha} \underbrace{\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_\beta(z)|^2}|\varphi_\beta'(z)|\right)^2}_{\leq 1} \\ &\leq C^\alpha (1-|z|^2)^{\alpha(1-\beta)},\end{aligned}$$

d.h. es gilt die Behauptung (b). □

Damit lassen sich nun die Kriterien 3.3 und 3.4 anwenden und man erhält die folgenden beiden Aussagen:

SATZ 5.8. *Für die zu den Funktionen φ_β gehörenden Kompositionsoperatoren C_{φ_β} gelten die beiden folgenden Kriterien:*

(a) *Seien $\alpha > -1$ und $p > \frac{2}{2+\alpha}$ beliebig. Gilt*

$$0 < \beta < \frac{1}{1 + \frac{2}{p(1+\alpha)}},$$

so ist C_{φ_β} in $S_p(A^2_\alpha)$ enthalten.

(b) *Seien $\alpha > 0$ und $p > \frac{2}{2+\alpha}$ beliebig. Gilt*

$$0 < \beta < 1 - \frac{2}{p\alpha},$$

so ist C_{φ_β} in $S_p(A^2_\alpha)$ enthalten.

Um genauere Aussagen über die Zugehörigkeit der Kompositionsoperatoren C_{φ_β} zu den Schatten p-Klassen zu erhalten, stellt sich im Hinblick auf Satz 2.10 die Frage, welche der Funktionen φ_β von beschränkter Valenz sind.

LEMMA 5.9. *Für $\beta \in (0,1)$ sei die Funktion*

$$\varphi_\beta : \ \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \ z \mapsto 1-(1-z)^\beta$$

gegeben. Es bezeichne $G_\beta := \varphi_\beta(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ das Bild der Einheitskreisscheibe unter der Abbildung φ_β. Dann ist

$$\varphi_\beta : \ \mathbb{D} \to G_\beta, \ z \mapsto 1-(1-z)^\beta$$

biholomorph mit Umkehrfunktion

$$\psi_\beta : \ G_\beta \to \mathbb{D}, \ w \mapsto 1-(1-w)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Insbesondere ist $\varphi_\beta : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ von beschränkter Valenz.

Beweis. Sei also $\beta \in (0,1)$ beliebig vorgegeben. Man betrachtet die beiden Abbildungen

$$\varphi_\beta : \ \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \ z \mapsto 1-(1-z)^\beta$$

und

$$\psi_\beta : \ \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \ w \mapsto 1-(1-w)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Unter Verwendung des komplexen Logarithmus Log ergibt sich

$$\varphi_\beta(z) = 1-(1-z)^\beta = 1-\exp\Big(\beta \operatorname{Log}(1-z)\Big)$$

und

$$\psi_\beta(w) = 1-(1-w)^{\frac{1}{\beta}} = 1-\exp\Big(\frac{1}{\beta}\operatorname{Log}(1-w)\Big).$$

Insbesondere sind beide Funktionen auf $\mathbb{D}$ holomorph. Für alle $z \in \mathbb{D}$ rechnet man nach:

$$\begin{aligned}
\psi_\beta(\varphi_\beta(z)) &= 1-\exp\Big(\frac{1}{\beta}\operatorname{Log}(1-\varphi_\beta(w))\Big) \\
&= 1-\exp\left(\frac{1}{\beta}\operatorname{Log}\left(\exp\Big(\beta\operatorname{Log}(1-z)\Big)\right)\right) \\
&\overset{(*)}{=} 1-\exp\left(\frac{1}{\beta}\Big(\beta\operatorname{Log}(1-z)\Big)\right) \\
&= z,
\end{aligned}$$

d.h. $\psi_\beta(G_\beta) \subseteq \mathbb{D}$ und die Einschränkung ψ_β auf G_β ist in der Form

$$\psi_\beta : \ G_\beta \to \mathbb{D}, \ w \mapsto 1-(1-w)^{\frac{1}{\beta}}$$

wohldefiniert. Ferner gilt für alle $w \in G_\beta$:

$$\begin{aligned}
\varphi_\beta(\psi_\beta(w)) &= 1-\exp\Big(\beta\operatorname{Log}(1-\psi_\beta(w))\Big) \\
&= 1-\exp\left(\beta\operatorname{Log}\left(\exp\Big(\frac{1}{\beta}\operatorname{Log}(1-w)\Big)\right)\right) \\
&\overset{(**)}{=} 1-\exp\left(\beta\Big(\frac{1}{\beta}\operatorname{Log}(1-w)\Big)\right) \\
&= w
\end{aligned}$$

Für die Gleichheit $(*)$ bemerkt man: Wegen $z \in \mathbb{D}$, liegt $1-z$ in der rechten Halbebene $\{\zeta \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}\zeta > 0\}$ und besitzt daher eine Polardarstellung $1-z = re^{it}$ mit $r>0$ und $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Für den Hauptzweig Log des komplexen Logarithmus gilt daher

$$\operatorname{Log}(1-z) = \log(r) + it,$$

sodass

$$\beta\operatorname{Log}(1-z) = \beta\log(r) + i\beta t = \log(r^\beta) + i\beta t$$

und

$$\exp\big(\beta\operatorname{Log}(1-z)\big) = r^\beta e^{i\beta t}.$$

Da $\beta \in (0,1)$, ist $\beta t \in (-\pi/2, \pi/2)$ und damit wie in $(*)$ behauptet

$$\operatorname{Log}\Big(\exp\big(\beta \operatorname{Log}(1-z)\big)\Big) = \operatorname{Log}(r^\beta e^{i\beta t}) = \log(r^\beta) + i\beta t = \beta \operatorname{Log}(1-z).$$

Analog beachtet man für $(**)$: Wegen $w \in G_\beta$ existiert ein $z \in \mathbb{D}$ und eine Polardarstellung $1 - z = re^{it}$ mit $r > 0$ und $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, sodass mit obiger Rechnung folgt:

$$w = \varphi_\beta(z) = 1 - \exp\big(\beta \operatorname{Log}(1-z)\big) = 1 - r^\beta e^{i\beta t}$$

Es ergibt sich weiter

$$\operatorname{Log}(1-w) = \log(r^\beta) + i\beta t = \beta \log(r) + i\beta t$$

und

$$\frac{1}{\beta} \operatorname{Log}(1-w) = \log(r) + it,$$

sodass

$$\exp\big(\frac{1}{\beta} \operatorname{Log}(1-w)\big) = re^{it}.$$

Man erhält wie gewünscht $(**)$:

$$\operatorname{Log}\Big(\exp\big(\frac{1}{\beta} \operatorname{Log}(1-w)\big)\Big) = \log(r) + it = \frac{1}{\beta} \operatorname{Log}(1-w)$$

Damit sind die Abbildungen

$$\varphi_\beta : \mathbb{D} \to G_\beta \quad \text{und} \quad \psi_\beta : G_\beta \to \mathbb{D}$$

wohldefiniert, holomorph und zueinander invers, womit die Behauptung gezeigt ist. $\square$

KOROLLAR 5.10. *Sind $\beta \in (0,1)$, $\alpha > -1$ und $p \geq 2$ gegeben, sodass*

$$\beta < 1 - \frac{2}{p(2+\alpha)}$$

erfüllt ist, dann liegt C_{φ_β} in $S_p(A^2_\alpha)$.

Beweis. Nach Korollar 5.7 existiert zu jedem $\beta \in (0,1)$ eine Konstante $C > 0$, sodass

$$\forall z \in \mathbb{D} : \quad \frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi_\beta(z)|^2} \leq C(1 - |z|^2)^{1-\beta}.$$

Man rechnet damit nach:

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi_\beta(z)|^2}\right)^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} d\lambda(z) \leq C^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{(1-\beta)\frac{p(2+\alpha)}{2} - 2} dA(z)$$

Wegen

$$\beta < 1 - \frac{2}{p(2+\alpha)}$$

gilt

$$(1-\beta)\frac{p(2+\alpha)}{2} - 2 > -1$$

und somit nach Lemma 1.4 und Satz 2.4 die Behauptung. $\square$

Von Interesse sind darüber hinaus negative Aussagen über die Zugehörigkeit zu $S_p(A^2_\alpha)$. Dazu dient das folgende Lemma:

LEMMA 5.11. *Für $\rho \in (0,1)$ sei Γ_ρ definiert wie in Lemma 3.11. Für jedes $\beta \in (0,1)$ existiert dann ein $C > 0$, sodass*

$$\forall z \in \Gamma_\rho : \quad \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_\beta(z)|^2} \geq C(1-|z|^2)^{1-\frac{\beta}{2}}.$$

Beweis. Sind die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt, so ergibt sich für $z = 1 - re^{it} \in \Gamma_\rho$ wegen $r < 2\rho\cos(t)$:

$$2\cos(t) - r > \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) r$$

Ferner gilt

$$2\cos(\beta t) - r^\beta \leq 2.$$

Es folgt

$$\frac{(1-|z|^2)^{\frac{\beta}{2}}}{1-|\varphi_\beta(z)|^2} = \frac{\left(r(2\cos(t)-r)\right)^{\frac{\beta}{2}}}{r^\beta(2\cos(\beta t) - r^\beta)} \geq \frac{\left(r^2\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\right)^{\frac{\beta}{2}}}{2r^\beta} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}-1\right)^{\frac{\beta}{2}}}_{=:C}$$

und damit wie gewünscht

$$\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_\beta(z)|^2} \geq C(1-|z|^2)^{1-\frac{\beta}{2}}.$$

□

Es folgt die angekündigte Charakterisierung:

KOROLLAR 5.12. *Sind $\alpha > -1$ und $p \geq 2$ gegeben, dann gilt $C_{\varphi_\beta} \notin S_p(A^2_\alpha)$ für alle $\beta \in (0,1)$ mit*

$$\beta \geq 2\left(1 - \frac{2}{p(2+\alpha)}\right)$$

Beweis. Nach obigem Lemma gilt für $\beta \in (0,1)$:

$$\forall z \in \Gamma_\rho : \quad \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_\beta(z)|^2} \geq C(1-|z|^2)^{1-\frac{\beta}{2}}$$

mit $\rho \in (0,1)$ und $C > 0$. Sind $\alpha > -1$ und $p \geq 2$ gegeben, so impliziert

$$1 - \frac{\beta}{2} \leq \frac{2}{p(2+\alpha)}$$

bzw.

$$\beta \geq 2\left(1 - \frac{2}{p(2+\alpha)}\right)$$

nach Korollar 3.9 (mit $\kappa = -1$ nach Lemma 3.11) wie behauptet $C_{\varphi_\beta} \notin S_p(A^2_\alpha)$. □

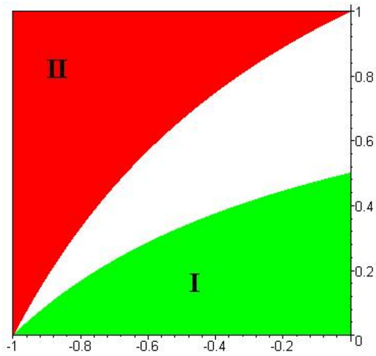

ABBILDUNG 4. Zugehörigkeit von C_{φ_β} zu $S_p(A^2_\alpha)$ für $p = 2$.

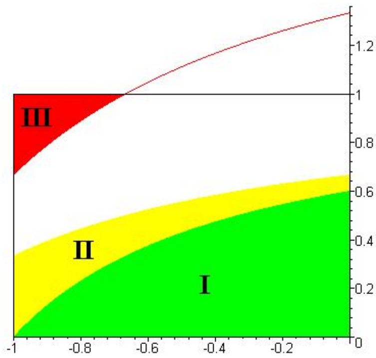

ABBILDUNG 5. Zugehörigkeit von C_{φ_β} zu $S_p(A^2_\alpha)$ für $p = 3$.

Um sich einen Überblick über die Aussagen dieser Kriterien am Beispiel der Funktionen φ_β zu verschaffen, bietet sich Folgendes an: Bei festem Wert $p \geq 2$ werden in ein Koordinatensystem die Punkte $(\alpha, \beta) \in (-1, 0] \times (0, 1)$ eingetragen, für die $C_{\varphi_\beta} \in S_p(A^2_\alpha)$ bzw. $C_{\varphi_\beta} \notin S_p(A^2_\alpha)$ mit den bewiesenen Kriterien gilt.

(a) In Abbildung 4 ist dies für $p = 2$ dargestellt. Der Bereich I enthält dabei alle Punkte (α, β), für die $C_{\varphi_\beta} \in S_p(A^2_\alpha)$ nach Satz 5.8 (a) folgt. Korollar 5.10 liefert keine weiteren Aussagen. Bereich II markiert diejenigen Punkte (α, β), für die nach Korollar 5.12 bereits $C_{\varphi_\beta} \notin S_p(A^2_\alpha)$ gelten muss.

(b) Abbildung 5 stellt die Situation im Fall $p = 3$ dar. Für I gilt $C_{\varphi_\beta} \in S_p(A^2_\alpha)$ wieder nach 5.8 (a), für II erhält man die Zugehörigkeit nach 5.10. Der Bereich III markiert die Punkte (α, β) mit $C_{\varphi_\beta} \notin S_p(A^2_\alpha)$ nach 5.12.

(c) In Abbildung 6 markieren die Bereiche I und II die Punkte (α, β) mit $C_{\varphi_\beta} \in S_p(A^2_\alpha)$ nach 5.8 (a) bzw. 5.10. Korollar 5.12 liefert in diesem Fall kein Beispiel für $C_{\varphi_\beta} \notin S_p(A^2_\alpha)$.

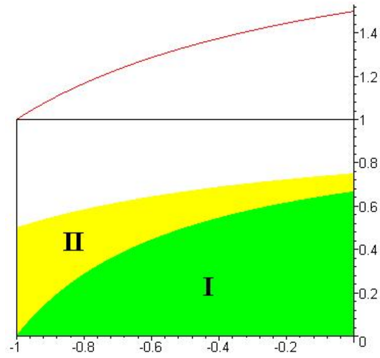

ABBILDUNG 6. Zugehörigkeit von C_{φ_β} zu $S_p(A^2_\alpha)$ für $p = 4$.

Man bemerkt nun aber, dass in jeder Graphik eine „leere Fläche“ auftritt, d.h. eine Menge von Punkten (α, β) existiert, über die die bisherigen Kriterien keine Aussage machen. Erfreulicherweise lassen sich unter direkter Ausnutzung der Eigenschaft in 5.6 diese leeren Flächen „füllen“.

SATZ 5.13. *Seien $p \geq 2$ und $\alpha > -1$ beliebig vorgegeben. Erfüllt $\beta \in (0, 1)$ die Bedingung*

$$\beta < 2\left(1 - \frac{2}{p(2+\alpha)}\right),$$

dann liegt C_{φ_β} in $S_p(A^2_\alpha)$.

Beweis. Seien also $p \geq 2$, $\alpha > -1$ und $\beta \in (0, 1)$ mit

$$\beta < 2\left(1 - \frac{2}{p(2+\alpha)}\right)$$

gegeben. Man rechnet nach, dass dann insbesondere

$$\begin{aligned} (1-\beta)\frac{p(2+\alpha)}{2} &> \left(1 - 2\left(1 - \frac{2}{p(2+\alpha)}\right)\right)\frac{p(2+\alpha)}{2} \\ &= \left(\frac{4}{p(2+\alpha)} - 1\right)\frac{p(2+\alpha)}{2} \\ &= 2 - \frac{p(2+\alpha)}{2} \end{aligned}$$

erfüllt ist. Ferner gilt wegen $p \geq 2$

$$2 - \frac{p(2+\alpha)}{2} \leq 2 - (2+\alpha) = -\alpha < 1,$$

sodass zusammenfassend

$$2 - \frac{p(2+\alpha)}{2} < \min\left\{1, (1-\beta)\frac{p(2+\alpha)}{2}\right\}$$

gilt. Da die rechte Seite der Ungleichung immer positiv ist, existiert ein $q > 1$ mit

$$2 - \frac{p(2+\alpha)}{2} < \frac{1}{q} < (1-\beta)\frac{p(2+\alpha)}{2}.$$

Damit sind die beiden Bedingungen

$$\frac{2}{p(2+\alpha)}\left(2 - \frac{1}{q}\right) < 1$$

und

$$\frac{2}{p(2+\alpha)}\left(2 - \frac{1}{q}\right) < (1-\beta) - \frac{2}{p(2+\alpha)}\left(\frac{2}{q} - 2\right)$$

erfüllt, d.h.

$$0 < \frac{2}{p(2+\alpha)}\left(2 - \frac{1}{q}\right) < \min\left\{1, (1-\beta) - \frac{2}{p(2+\alpha)}\left(\frac{2}{q} - 2\right)\right\}.$$

Man findet daher ein $\theta_1 \in (0,1)$ mit

$$\frac{2}{p(2+\alpha)}\left(2 - \frac{1}{q}\right) < \theta_1 < (1-\beta) - \frac{2}{p(2+\alpha)}\left(\frac{2}{q} - 2\right).$$

Es seien nun $\theta_2 \in \mathbb{R}$ und $q' > 1$ definiert durch

$$\theta_1 + \theta_2 = 1 - \beta \quad \text{und} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

dann folgt unmittelbar

$$\left(\theta_1 \frac{p(2+\alpha)}{2} - 2\right) q > -1$$

und

$$\theta_2 \frac{p(2+\alpha)}{2} q' = \big((1-\beta) - \theta_1\big)\frac{p(2+\alpha)}{2} q' > \left(\frac{2}{q} - 2\right) q' = -2.$$

Mit Lemma 1.4 und Lemma 5.4 ergibt sich nun, dass die beiden Integrale

$$I_1 := \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\left(\theta_1 \frac{p(2+\alpha)}{2} - 2\right) q} dA(z)$$

und

$$I_2 := \int_{\mathbb{D}} |1-z|^{\theta_2 \frac{p(2+\alpha)}{2} q'} dA(z)$$

einen endlichen Wert besitzen. Da die Funktion φ_β nach Satz 5.6 einer Abschätzung der Form

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_\beta(z)|^2} \leq C(1-|z|^2)^{\theta_1}|1-z|^{\theta_2}$$

mit einer Konstanten $C > 0$ genügt, erhält man unter Verwendung der Hölderungleichung

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_\beta(z)|^2} \right)^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} d\lambda(z) \\
\leq \;& C^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\theta_1 \frac{p(2+\alpha)}{2} - 2} |1-z|^{\theta_2 \frac{p(2+\alpha)}{2}} dA(z) \\
\leq \;& C^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} \left[\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\left(\theta_1 \frac{p(2+\alpha)}{2} - 2\right) q} dA(z) \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_{\mathbb{D}} |1-z|^{\theta_2 \frac{p(2+\alpha)}{2} q'} dA(z) \right]^{\frac{1}{q'}} \\
= \;& C^{\frac{p(2+\alpha)}{2}} \, I_1^{\frac{1}{q}} \, I_2^{\frac{1}{q'}} \; < \; \infty
\end{aligned}$$

Da die Funktion φ_β nach Lemma 5.9 von beschränkter Valenz ist, ergibt sich mit Satz 2.10 wie behauptet $C_{\varphi_\beta} \in S_p(A^2_\alpha)$. □

Damit ist die in 5.12 angegebene Schranke scharf, d.h. der Kompositionsoperator C_{φ_β} mit $\beta \in (0,1)$ gehört genau dann zu $S_p(A^2_\alpha)$ für $p \geq 2$ und $\alpha > -1$, wenn

$$\beta < 2\left(1 - \frac{2}{p(2+\alpha)}\right).$$

Insbesondere bemerkt man, dass das in Korollar 5.7 (a) angegebene Konvergenzverhalten der Form (3.4) im Allgemeinen nicht ausreicht, um die Zugehörigkeit von Kompositionsoperatoren zu Schattenklassen vollständig zu beschreiben, denn im Beweis von Satz 5.13 wurde die Allgemeinheit der Abschätzung (5.1) explizit ausgenutzt.

Literaturverzeichnis

[1] Albrecht, E., *Skriptum zur Vorlesung Funktionentheorie im Sommersemester 2007*, Universität des Saarlandes, Saarbrücken 2007

[2] Albrecht, E., *Skriptum zu den Vorlesungen Funktionalanalysis 1 und 2 im Wintersemester 2007/08 und Sommersemester 2008*, Universität des Saarlandes, Saarbrücken 2008

[3] Carroll, T. and Cowen, C., *Compact composition operators not in the Schatten classes*, J. Operator Theory 26 (1991), no. 1, 109-120

[4] Clahan, D., *Compact composition operators on weighted Bergman spaces of the unit ball*, J. Operator Theory 45 (2001), 335-355

[5] Cowen, C. and MacCluer, B., *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1994

[6] Elstrodt, J., *Maß- und Integrationstheorie*, fünfte Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007

[7] Katznelson, Y., *An Introduction to Harmonic Analysis*, Third Edition, Cambridge University Press

[8] Li, S.Y., *Trace ideal criteria for composition operators on Bergman spaces*, Amer. J. Math. 117 (1995), 1299-1323

[9] Luecking, H. and Zhu, K., *Composition operators belonging to the Schatten ideals*, Amer. J. Math. 114 (1992), 1127-1145

[10] MacCluer, B.D. and Shapiro, J.H., *Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces*, Canadian J. Math. 38 (1986), 878-906

[11] Madigan, K. and Matheson, A., C*ompact composition operators on the Bloch space*, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995), 2679-2687

[12] Pommerenke, Ch., *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer-Verlag Berlin, 1992

[13] Shapiro, J., *Composition Operators and classical function theory*, Springer-Verlag New York, 1993

[14] Werner, D., *Funktionalanalysis*, sechste Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007

[15] Xia, J., *On a proposed characterization of Schatten-class composition operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2002), 2505-2515

[16] Zhu, K., *Compact Composition Operators on Bergman spaces of the unit ball*, Houston J. Math. 33 (2007), no. 1, 273-283

[17] Zhu, K., *Operator Theory in Function Spaces*, Second Edition, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 138, American Mathematical Society

[18] Zhu, K., *Positive Toeplitz operators on weighted Bergman spaces of bounded symetric domains*, J. Operator Theory 20 (1988), 329-357

[19] Zhu, K., *Schatten class composition operators on weighted Bergman spaces of the disk*, J. Operator Theory 46 (2001), 173-181

[20] Zhu, Y., *Geometric properties of composition operators belonging to Schatten classes*, Int. J. Math. Math. Sci. 26 (2001), no. 4, 239-248

[21] Persönliche Unterhaltungen mit Heiko Hoffmann und Philip Oberacker