



UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

Zur Theorie der Faberpolynome

Masterarbeit

angefertigt von

Tobias Mai

an der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I der
Universität des Saarlandes, Fachrichtung 6.1 Mathematik

unter Betreuung von **Herrn Prof. Dr. E. Albrecht**

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbst angefertigt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, den

Vorwort

Die vorliegende Arbeit mit dem Titel „Zur Theorie der Faberpolynome“ entstand an der Universität des Saarlandes nach einem Thema und unter Betreuung von Herrn Prof. Dr. E. Albrecht.

Der Ursprung der Faberpolynome liegt in der Funktionentheorie. Dort besagt ein klassisches Resultat, dass sich jede auf einer Kreisscheibe $D(z_0, r)$ mit $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ holomorphe Funktion f in eine auf $D(z_0, r)$ kompakt konvergente Potenzreihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

mit komplexen Koeffizienten c_n entwickeln lässt. Im Rahmen seiner im Jahr 1903 erschienenen Arbeit **[Fab03]** befasste sich Georg Faber mit der Frage, wie ein analoges Resultat für auf einem beliebigen (einfach zusammenhängenden) Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen aussehen könnte. Seine Idee, die er in der 1907 veröffentlichten Arbeit **[Fab07]** weiterführte, war es, im allgemeinen Fall die Familie der Polynome $z \mapsto (z - z_0)^n$ durch eine vom jeweiligen Gebiet G abhängige Familie von Polynomen zu ersetzen. Dies war die Geburtsstunde der später nach ihm benannten Faberpolynome.

Bei der Konstruktion der Faberpolynome geht man (in Anlehnung an die Vorgehensweise von Georg Faber) von einem Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ aus, welches aus mehr als einem Punkt besteht und dessen Komplement $\Omega(K)$ in der Riemannschen Zahlkugel $\widehat{\mathbb{C}}$ einfach zusammenhängend ist. Solche Kompakta werden wir im Folgenden „zulässig“ nennen (vgl. Definition 2.1). Unter Verwendung des Riemannschen Abbildungssatzes findet man dann eine Zahl $r(K) > 0$, den sogenannten „transfiniten Durchmesser“ von K , und eine biholomorphe Abbildung $\psi_K : \Delta_{r(K)} \rightarrow \Omega(K)$, die der Normierungsbedingung

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi_K(z)}{z} = 1$$

genügt (vgl. Satz 2.5). Hierbei bezeichnet Δ_r für $r > 0$ das Komplement der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D(0, r)}$ in $\widehat{\mathbb{C}}$. Davon ausgehend zeigt man, dass für $w \in K$ die Funktion

$$\chi_K(w, \cdot) : \Delta_{r(K)} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{z\psi'_K(z)}{\psi_K(z)-w}, & z \neq \infty \\ 1, & z = \infty \end{cases}$$

wohldefiniert und holomorph ist. Als Laurentreihenentwicklung von $\chi_K(w, \cdot)$ um ∞ erhalten wir dann eine Reihe der Form

$$\chi_K(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^K(w) z^{-n},$$

mit der Koeffizientenfolge $(F_n^K(w))_{n=0}^{\infty}$ (vgl. Satz 2.11). Mit der überraschenden Feststellung (vgl. Satz 2.13), dass die hierdurch für $n \in \mathbb{N}_0$ konstruierte Funktion $w \mapsto F_n^K(w)$ die Einschränkung auf K eines holomorphen Polynoms F_n^K von Grad n ist, hat man dann die Familie $(F_n^K)_{n=0}^{\infty}$ der Faberpolynome zu K bestimmt (vgl. Definition 2.14).

Hierdurch war es aber nicht nur möglich, eine zum Fall der Kreisscheibe analoge Theorie der Reihenentwicklung holomorpher Funktionen zu erarbeiten (vgl. Satz 2.31). Vielmehr zeigte sich (wie etwa in [AES99]), dass diese Ideen auch in anderen Bereichen der Mathematik fruchtbar eingesetzt werden können.

Von besonderer Bedeutung ist die mit den Faberpolynomen verbundene Theorie bei Fragen der polynomialen Approximation, wie sich etwa in den Arbeiten [FM94] und [FM03] zeigt. Aber schon Georg Faber selbst bemerkte, dass die von ihm eingeführten Polynome enge Beziehungen zur Approximationstheorie aufweisen, was er 1920 in seiner Arbeit [Fab20] aufgriff.

Dort wurde eine erste Verbindung zu einer weiteren Klasse von Polynomen, den sogenannten Tschebyscheffpolynomen, hergestellt.

Bezeichnet $\mathcal{P}_n^1(K)$ für ein nichtleeres Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ die Menge aller Einschränkungen von komplexen holomorphen Polynomen der Gestalt

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$$

auf K , so fordert das auf Pafnuti Tschebyscheff zurückgehende Problem die Bestimmung eines Polynoms $P \in \mathcal{P}_n^1(K)$ mit der Eigenschaft

$$\|P\|_K = \inf_{p \in \mathcal{P}_n^1(K)} \|p\|_K,$$

wobei mit $\|\cdot\|_K$ die Maximumnorm auf K bezeichnet wird. Die entsprechende Theorie liefert dann die Aussage (vgl. Satz 4.6), dass es unter der zusätzlichen Voraussetzung $\#K \geq n+1$ ein eindeutiges Polynom $T_n^K \in \mathcal{P}_n^1(K)$ gibt, das dieser Bedingung genügt. Hierbei heißt T_n^K das n -te Tschebyscheffpolynom für K .

Vor diesem Hintergrund lässt die Tatsache, dass in den Fällen $K = \overline{\mathbb{D}}$ und $K = [-2 - 2]$ die Faber- mit den Tschebyscheffpolynomen übereinstimmen, vermuten, dass dies nicht nur Zufall, sondern einem grundlegenden Zusammenhang geschuldet ist. Unsere Zielsetzung soll es nun sein, dieses Phänomen genauer zu beleuchten. Dem Titel dieser Arbeit entsprechend, werden wir aus diesem interessanten Wechselspiel ein (meiner Kenntnis nach neues) Resultat zur Theorie der Faberpolynome beitragen können.

Bei der Beschäftigung mit Faberpolynomen kommt man nicht umhin, Funktionentheorie auf der Riemannschen Zahlkugel $\widehat{\mathbb{C}}$ zu betreiben. Auch wenn $\widehat{\mathbb{C}}$ das wohl einfachste nichttriviale Beispiel einer Riemannschen Fläche darstellt, und man daher (wie in der gängigen Literatur üblich, vgl. etwa [Mar67]) noch einen maßgeschneiderten Zugang zur Theorie der Faberpolynome wählen kann, ist es meiner Einschätzung nach natürlicher, das derartigen Problemen angemessene Konzept der Riemannschen Flächen zu bemühen.

Zu Beginn dieser Arbeit stellen wir daher mit KAPITEL 1 die grundlegenden und für uns später relevanten Begriffe und Resultate aus der Theorie Riemannscher Flächen zusammen. Anschließend werden in KAPITEL 2 die Faberpolynome in Anlehnung an die oben beschriebene Vorgehensweise von Georg Faber konstruiert und anschließend ersten Untersuchungen zugeführt. Dabei werden wir auch alternative Zugänge zur Theorie der Faberpolynome diskutieren. Zum Abschluss des zweiten Kapitels tragen wir dann einige Beispiele aus der Literatur zusammen. Insbesondere werden wir in Beispiel 2.39 die in [Fab03] angegebene Formel für die Faberpolynome zur klassischen Lemniskaten $L := \{z \in \mathbb{C}; |z^2 - 1| \leq 1\}$ korrigieren können.

Auch wenn die in KAPITEL 2 aufgeführten Resultate größtenteils bereits bekannt sind, rechtfertigt sich dieses recht umfangreiche Kapitel zum einen durch die konsequente Anwendung der Methoden aus der Theorie Riemannscher Flächen und zum anderen durch die Tatsache, dass die betreffende Literatur (mit Ausnahme des Standardwerks [Sue98]) weit gestreut ist.

Da im Gegensatz dazu die Tschebyscheffpolynome einer klassischen Fragestellung aus der Approximationstheorie entspringen, stellen wir in KAPITEL 3 die zu ihrem Verständnis notwendigen Begriffe und allgemeinen Aussagen zusammen. Dabei werden wir zugleich das Konzept der Faber-Sesquilinearformen (vgl. Definition 3.8) etablieren, welches nahe an dem von Theodore J. Rivlin geschaffenen Konzept der extremalen Signatur liegt (vgl. Definition 3.16), aber zumindest eine Verringerung des Schreibaufwands gestattet. Der Grund für unsere ungewöhnliche Namensgebung begründet sich dadurch, dass Georg Faber in seiner Arbeit [Fab20] zur Berechnung der Tschebyscheffpolynome für $[-2, 2]$ im Wesentlichen dieses Prinzip anwendet, ohne es jedoch genauer herauszuarbeiten.

In KAPITEL 4 werden wir anschließend diese Resultate auf Tschebyscheffpolynome anwenden. Allgemeiner werden wir dann auch Minimalfunktionen und Tschebyschefffunktionen (vgl. Definition 4.2 und Definition 4.6) untersuchen, da sich gerade für Minimalpolynome interessante Anwendungsmöglichkeiten (etwa auf Tschebyscheffpolynome für Elemente aus komplexen Banachalgebren mit Einselement in Beispiel 3.25 bzw. Satz 4.12) ergeben werden. Zum Abschluss erproben wir dann unsere Ideen, etwa unter Beispiel 4.25 im Fall des von der Hypocycloiden mit n Spitzen berandeten Kompaktums H_n .

Die Schnittstelle zwischen beiden Themenbereichen wird in den darauf folgenden Kapiteln näher beleuchtet.

In KAPITEL 5 werden wir sehen, dass durch die später in [Moh52] durch Ernst Mohr vereinfachte Arbeit [Heu49] von Paul Heuser eine Brücke zwischen den Faber- und Tschebyscheffpolynomen gebaut wird, wodurch sich viele der auftretenden Phänomene erklären lassen. Wir werden uns dabei zwar an der Vorgehensweise von Paul Heuser orientieren, können dessen Argumentation aber erneut verkürzen und etwas ausbauen.

Die wesentliche Idee dabei ist, das vorgegebene zulässige Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ um den Faktor $r > r(K)$ zu einem zulässigen Kompaktum K_r „konform aufzublasen“, welches durch die Bedingung $\psi_K(\Delta_r) = \Omega(K_r)$ (siehe auch Definition 2.9) bestimmt ist. Die verblüffende Aussage des zweiten Satzes von Heuser-Mohr 5.8 ist dann, dass bei festem $n \in \mathbb{N}$ die Familie der Tschebyscheffpolynome $(T_n^{K_r})_{r>r(K)}$ für $r \rightarrow \infty$ kompakt gegen das Faberpolynom F_n^K konvergiert. Im Gegensatz dazu zeigt der erste Satz von Heuser-Mohr 5.5, dass bei der Skalierung der Kompakta K_r mit dem Faktor $\frac{1}{r}$ die zugehörigen Tschebyscheffpolynome diese Information über die Faberpolynome verlieren.

Untersucht man Faber- und Tschebyscheffpolynome auf strukturelle Gemeinsamkeiten, so stellen sich diese unmittelbar bei affin linearen Transformationen und Spiegelungen des zugrunde liegenden Kompaktums heraus (vgl. Lemma 4.10 und Lemma 2.23). Dass diese aber auch unter polynomialen Abbildungen des Kompaktums ein ähnliches Transformationsverhalten zeigen, ist nicht mehr unmittelbar klar, sondern beruht letztlich auf den beiden, in KAPITEL 5 vorgestellten Sätzen von Heuser-Mohr.

Um dies untersuchen zu können, beschäftigen wir uns KAPITEL 6 mit (verallgemeinerten) Lemniskaten, d.h. mit Urbildern von kompakten Mengen unter polynomialen Abbildungen (vgl. Definition 6.2). Nach dem einleitenden Abschnitt 1 setzen wir uns in Abschnitt 2 mit dem Verhalten der Tschebyscheffpolynome zu (verallgemeinerten) Lemniskaten auseinander. Mit Hilfe des Konzepts der Faber-Sesquilinearformen und des Argumentprinzips aus der Funktionentheorie werden wir dort mit Korollar 6.11 einige der bisher bekannten Aussagen verallgemeinern können.

SATZ (vgl. Korollar 6.11). *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\#K \geq n + 1$ gegeben. Ist ein normiertes holomorphes Polynom Q vom Grad $m \geq 1$ gegeben, sodass $\#Q^{-1}(K) \geq nm + 1$ erfüllt ist, dann gilt*

$$T_{nm}^{Q^{-1}(K)} = T_n^K \circ Q.$$

Der letzte Abschnitt in KAPITEL 6 wird schließlich zeigen, wie sich diese Ergebnisse durch den zweiten Satz von Heuser-Mohr auf Faberpolynome übertragen lassen, und mündet somit im Beweis des dortigen Hauptresultats 6.18.

SATZ (vgl. Satz 6.18). *Sei $K \subset \mathbb{C}$ zulässig. Ist ein normiertes holomorphes Polynom Q vom Grad $m \geq 1$ gegeben, sodass auch $Q^{-1}(K)$ zulässig ist, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$F_{nm}^{Q^{-1}(K)} = F_n^K \circ Q.$$

Das in diesem Zusammenhang geschaffene Konzept ermöglicht zudem die vollständige Charakterisierung der unter Definition 6.20 eingeführten multiplikativen Kompakta, womit wir uns in Abschnitt 4 beschäftigen wollen.

Im letzten Kapitel dieser Arbeit, dem KAPITEL 7, wenden wir uns dann der durch die Sätze von Heuser-Mohr aufgeworfenen Frage zu, wann Tschebyscheffpolynome unter „konformem Aufblasen“ des zugrunde liegenden Kompaktums invariant sind. Hierdurch wollen wir zugleich auch versuchen, die Sonderstellung, die den Kompakta $K = \mathbb{D}$ und $K = [-2, 2]$ anscheinend zukommt, besser zu verstehen. Die Idee, die wir dabei verfolgen wollen, beruht auf einer Erweiterung (vgl. Satz 7.6) des in der Approximationstheorie klassischen Satzes von Rivlin-Shapiro.

Am Ende dieser Einführung möchte ich die Gelegenheit für ein kurzes Dankwort nutzen. Zunächst möchte ich Herrn Prof. Dr. E. Albrecht für dieses interessante Thema und die wissenschaftliche Freiheit danken, die er mir bei der Bearbeitung zugestanden hat. Herzlich danken möchte ich auch all jenen, die darüber hinaus, ob direkt oder indirekt, an der Entstehung dieser Arbeit beteiligt waren. Dies gilt vor allem meinen langjährigen Kommilitonen Heiko Hoffmann und Philip Oberacker, für ihr Interesse und ihr stets offenes Ohr.

Güdesweiler, im Oktober 2010

Tobias Mai

Notation

In diesem Abschnitt möchte ich die für die vorliegende Arbeit grundlegenden Bezeichnungen einführen, da auf diese im Text nicht gesondert hingewiesen wird. Die spezielle Notation dieser Arbeit, welche sich nach und nach ergeben wird, kann dann, sofern diese nicht nur lokal gültig oder relevant ist, im Symbolverzeichnis nachgeschlagen werden.

Zahlbereiche

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen (ohne 0)
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen mit 0
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}	Körper der reellen Zahlen
\mathbb{C}	Körper der komplexen Zahlen
\mathbb{K}	Körper der reellen oder komplexen Zahlen

spezielle Teilmengen von \mathbb{C}

$D(a, r)$	$\{z \in \mathbb{C}; z - a < r\}$	offene Kreisscheibe um den Punkt $a \in \mathbb{C}$ mit dem Radius $r > 0$
$B(a, r)$	$\{z \in \mathbb{C}; z - a \leq r\}$	abgeschlossene Kreisscheibe um den Punkt $a \in \mathbb{C}$ mit dem Radius $r \geq 0$
\mathbb{D}	$\{z \in \mathbb{C}; z < 1\}$	offene Einheitskreisscheibe
\mathbb{D}^*	$\mathbb{D} \setminus \{0\}$	punktierte Einheitskreisscheibe
\mathbb{T}	$\{z \in \mathbb{C}; z = 1\}$	Einheitskreislinie
$\mu_k(\mathbb{C})$	$\{\zeta \in \mathbb{C}; \zeta^k = 1\}$	Gruppe der k -ten Einheitswurzeln in \mathbb{C}

topologische Bezeichnungen

Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Für eine beliebige Teilmenge $A \subset X$ sei

\overline{A}	die Menge aller Berührungspunkte von A , also der Abschluss von A ,
$\text{int}(A)$	die Menge aller inneren Punkte von A , also das Innere von A ,
∂A	Menge aller Berührungspunkte von A und $X \setminus A$, also der Rand von A .

funktionentheoretische Bezeichnungen

$\operatorname{Re}(z)$	der Realteil von $z \in \mathbb{C}$
$\operatorname{Im}(z)$	der Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$
$\arg(z)$	das Argument von $z \in \mathbb{C}$
$\operatorname{sgn}(z)$	das Signum von $0 \neq z \in \mathbb{C}$, d.h. $\operatorname{sgn}(z) := \frac{z}{ z }$
\bar{z}	das komplex Konjugierte zu $z \in \mathbb{C}$
$\partial_+ E$	der positiv orientierten Rand eines Greenschen Bereichs $E \subset \mathbb{C}$
$\operatorname{int}(\Gamma)$	das Innere einer Jordankurve Γ
$\operatorname{Res}(f, z_0)$	das Residuum einer (auf einer Umgebung von z_0) meromorphen Funktion f an der Stelle z_0
$n(\Gamma, z_0)$	die Windungszahl der Kurve Γ um $z_0 \in \mathbb{C}$
$\operatorname{Spur}(\Gamma)$	die Spur der Kurve Γ
$\ \cdot\ _K$	Maximumnorm auf dem Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ (oder auf dem kompakten topologischen Hausdorffraum K)

funktionalanalytische Bezeichnungen

$\ell^p(\mathbb{Z})$	für $1 \leq p < \infty$ der Vektorraum der zur p -ten Potenz (absolut) summierbaren komplexen Folgen über der Indexmenge \mathbb{Z} bzw. für $p = \infty$ der Vektorraum der beschränkten komplexen Folgen über der Indexmenge \mathbb{Z}
$\mathcal{L}(E, F)$	der \mathbb{K} -Vektorraum der stetigen linearen Operatoren von E nach F für normierte \mathbb{K} -Vektorräume E und F
$\mathcal{L}(E)$	die \mathbb{K} -Algebra der stetigen linearen Operatoren auf einem normierten \mathbb{K} -Vektorraum E , d.h. $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$
E'	der topologische Dualraum zu einem normierten \mathbb{K} -Vektorraum E , d.h. $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$
$\dim V$	die Dimension des Vektorraums V
$\operatorname{codim} V$	die Kodimension des Vektorraums V

sonstige Bezeichnungen

$\mathbb{C}[X]$	Ring der Polynome in der Variablen X über \mathbb{C}
$\deg(q)$	Grad des komplexen holomorphen Polynoms q
$\#X$	Mächtigkeit der Menge X
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient zu „ n über k “
$\delta_{n,k}$	Kronecker-Delta für $n, k \in \mathbb{Z}$
$\lfloor x \rfloor$	größte ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x$ für $x \in \mathbb{R}$
$\ \cdot\ _\infty$	Maximumnorm auf \mathbb{K}^n
o, O	Landau-Symbole
$A \dot{\cup} B$	disjunkte Vereinigung der Mengen A und B

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Notation	xi
Zahlbereiche	xi
spezielle Teilmengen von \mathbb{C}	xi
topologische Bezeichnungen	xi
funktionentheoretische Bezeichnungen	xii
funktionalanalytische Bezeichnungen	xii
sonstige Bezeichnungen	xii
Kapitel 1. Grundlagen aus der Theorie Riemannscher Flächen	3
1. Definition und erste Eigenschaften	3
2. Überlagerungstheorie Riemannscher Flächen	6
Kapitel 2. Faberpolynome	9
1. Definition der Faberpolynome	9
2. Berechnung der Faberpolynome	19
3. Eigenschaften der Faberpolynome	29
4. Beispiele	43
Kapitel 3. Grundlagen aus der Approximationstheorie	49
1. Existenz und Eindeutigkeit von Bestapproximationen	49
2. Charakterisierung der Bestapproximation	50
3. Das lineare Approximationsproblem in $C(K)$	52
4. Approximation bezüglich Halbnormen	62
5. Ausblick	66
Kapitel 4. Minimalpolynome und Tschebyscheffpolynome	67
1. Der polynomiale Approximationsraum und Minimalfunktionen	67
2. Definition der Tschebyschefffunktionen	68
3. Berechnung der Minimalpolynome	70
4. Eigenschaften der Tschebyscheffpolynome	73
5. Beispiele	76
Kapitel 5. Faberpolynome als Tschebyscheffpolynome	87
1. Problemstellung	87
2. Die Sätze von Heuser-Mohr	90
Kapitel 6. Lemniskaten	103
1. Definition und erste Eigenschaften	103

2. Tschebyscheffpolynome zu Lemniskaten	108
3. Faberpolynome zu Lemniskaten	116
4. Multiplikative Kompakta	123
Kapitel 7. Radiale Abhängigkeit	129
1. Bezeichnungen	129
2. Ausbau der Charakterisierung	134
3. Anwendungsbeispiele	141
Anhang A. Nützliche Hilfsaussagen	145
Anhang B. Endlichdimensionale invariante Unterräume	149
Literaturverzeichnis	153
Abbildungsverzeichnis	157
Symbolverzeichnis	159
Index	161

Grundlagen aus der Theorie Riemannscher Flächen

In diesem Kapitel möchte ich die in dieser Arbeit benötigten Grundlagen aus der Theorie Riemannscher Flächen zusammenstellen. Dabei werde ich mich im Wesentlichen an dem Lehrbuch [For99] orientieren.

1. Definition und erste Eigenschaften

DEFINITION 1.1. Eine n -dimensionale (reelle) topologische Mannigfaltigkeit X ist ein topologischer Hausdorffraum X , in dem jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, welche zu einer offenen Menge im \mathbb{R}^n homöomorph ist. Im Fall $n = 2$ nennen wir X auch eine (reelle) topologische Fläche.

DEFINITION 1.2. Sei X eine (reelle) topologische Fläche.

- Eine **komplexe Karte auf X** ist ein Paar (U, ϕ) bestehend aus einer offenen Menge $U \subseteq X$ und einem Homöomorphismus $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ auf eine offene Teilmenge $\phi(U)$ von \mathbb{C} .
- Zwei komplexe Karten (U_1, ϕ_1) und (U_2, ϕ_2) heißen **analytisch verträglich**, falls die **Übergangsabbildung**

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

als Abbildung zwischen offenen Teilmengen von \mathbb{C} im gewöhnlichen Sinne biholomorph (also holomorph und bijektiv mit einer holomorphen Umkehrabbildung) ist.

- Ein **analytischer Atlas auf X** ist eine Familie $\{(U_j, \phi_j)\}_{j \in J}$ von paarweise analytisch verträglichen komplexen Karten (U_j, ϕ_j) auf X mit $j \in J$, sodass $X = \bigcup_{j \in J} U_j$ erfüllt ist.
- Zwei analytische Atlanten \mathcal{A} und \mathcal{A}' heißen **holomorph äquivalent**, falls auch $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ ein analytischer Atlas ist.

BEMERKUNG 1.3. Ist X eine (reelle) topologische Fläche, so induziert die holomorphe Äquivalenz eine Äquivalenzrelation auf der Menge der komplexen Atlanten auf X . Eine **komplexe Struktur auf X** ist die Äquivalenzklasse $[\mathcal{A}]$ eines Atlanten \mathcal{A} auf X .

Unter dem **maximalen analytischen Atlas** einer komplexen Struktur $[\mathcal{A}]$ auf X wollen wir den Atlas \mathcal{A}^* aus $[\mathcal{A}]$ verstehen, der aus allen komplexen Karten auf X besteht, die zu jeder komplexen Karte aus \mathcal{A} analytisch verträglich sind. Im Folgenden meinen wir mit „einer Karte auf X “ immer eine Karte, die zu diesem maximalen Atlas gehört.

Damit können wir nun definieren:

DEFINITION 1.4. Eine **Riemannsche Fläche** ist ein Paar $(X, [\mathcal{A}])$ bestehend aus einer zusammenhängenden topologischen Fläche X und einer komplexen Struktur $[\mathcal{A}]$ auf X . Ist die entsprechende komplexe Struktur aus dem Zusammenhang klar, so schreiben wir auch einfach X statt $(X, [\mathcal{A}])$.

DEFINITION 1.5 (holomorphe Abbildungen). Ist $(X, [\mathcal{A}])$ eine Riemannsche Fläche, so nennen wir eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph (in einem Punkt $a \in X$), falls für jede komplexe Karte (U, ϕ) (mit $a \in U$) die Abbildung $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ im gewöhnlichen Sinne (im Punkt $\phi(a)$) holomorph ist. Mit $\mathcal{O}(X)$ bezeichnen wir die Menge aller holomorphen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Ist $(Y, [\mathcal{B}])$ eine weitere Riemannsche Fläche, so nennen wir eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ holomorph (in einem Punkt $a \in X$), falls für alle Karten (U, ϕ) auf X (mit $a \in U$) und (V, ψ) auf Y mit $f(U) \subseteq V$ die Funktion

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$$

im gewöhnlichen Sinne (im Punkt $\phi(a)$) holomorph ist. Mit $\mathcal{O}(X, Y)$ bezeichnen wir die Menge aller holomorphen Funktionen $f : X \rightarrow Y$.

Eine holomorphe Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist biholomorph, falls $f : X \rightarrow Y$ holomorph und bijektiv ist und die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ ebenfalls holomorph ist.

BEMERKUNG 1.6. Wir stellen fest:

- Da je zwei analytische Karten analytisch verträglich sind, muss für den Nachweis der Holomorphie einer Funktion in einem Punkt nur die Holomorphie in einer Kartenumgebung nachgerechnet werden.
- Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei Riemannschen Flächen X und Y , so ist diese genau dann holomorph, falls für jede Karte (V, ψ) auf Y die zugehörige Abbildung $\psi \circ f : f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist.

BEISPIEL 1.7. Wir halten nun drei Beispiele für Riemannsche Flächen fest, die wir im Folgenden benötigen werden.

- Versehen wir die topologische Fläche \mathbb{C} mit der durch den Atlas $\mathcal{A} := \{(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})\}$ definierten komplexen Struktur $[\mathcal{A}]$, so erhalten wir die Riemannsche Fläche $(\mathbb{C}, [\mathcal{A}])$. Jede komplexe Karte auf \mathbb{C} besitzt dann die Form (U, id_U) mit einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$.
- Ist $(X, [\mathcal{A}])$ eine Riemannsche Fläche, so ist jede offene und zusammenhängende Teilmenge $Y \subseteq X$ versehen mit der durch den auf Y eingeschränkten Atlas

$$\mathcal{A}|_Y := \{(U \cap Y, \phi|_{U \cap Y}); (U, \phi) \in \mathcal{A}\}$$

induzierten komplexen Struktur $[\mathcal{A}|_Y]$ eine Riemannsche Fläche.

- Bezeichnen wir mit $\widehat{\mathbb{C}}$ die Einpunkt-Kompaktifizierung der komplexen Ebene \mathbb{C} , so wird $\widehat{\mathbb{C}}$ versehen mit der durch den Atlas $\mathcal{A} := \{(U_0, \phi_0), (U_1, \phi_1)\}$ definierten komplexen Struktur zu einer (kompakten) Riemannschen Fläche. Hierbei betrachten wir die durch

$$U_0 := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \quad \text{und} \quad U_1 := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$$

gegebene offene Überdeckung von $\widehat{\mathbb{C}}$ mit den Kartenabbildungen

$$\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z$$

und

$$\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \neq \infty \\ 0, & z = \infty \end{cases}.$$

Es stellt sich heraus, dass viele Resultate der klassischen Funktionentheorie eine Verallgemeinerung im Kontext Riemannscher Flächen besitzen. Beispielsweise gilt:

SATZ 1.8 (Riemannscher Hebbarkeitssatz, Theorem 1.8 in [For99]). *Sei U eine zusammenhängende offene Teilmenge einer Riemannschen Fläche X und sei $a \in U$. Ist $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ in einer Umgebung von a beschränkt, so lässt sich f holomorph auf U fortsetzen, d.h. es gibt ein $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ mit $\tilde{f}|_{U \setminus \{a\}} = f$.*

BEMERKUNG 1.9. In der Notation des vorangegangenen Satzes sei Y eine weitere Riemannsche Fläche. Als unmittelbare Folgerung ergibt sich dann, dass eine stetige Funktion $f : U \rightarrow Y$, welche auf $U \setminus \{a\}$ holomorph ist, bereits auf ganz U holomorph sein muss.

Hierzu wähle man eine Karte (V, ψ) in Y mit $f(a) \in V$ und wende den Riemannschen Hebbarkeitssatz 1.8 auf die stetige (und damit in einer Umgebung von a beschränkte) Funktion $\psi \circ f|_{U^*} : U^* \rightarrow \mathbb{C}$ an, wobei wir mit $U^* \subseteq U \cap f^{-1}(V)$ eine zusammenhängende offene Umgebung von a bezeichnen. Die holomorphe Fortsetzung muss dann aufgrund ihrer Stetigkeit mit $\psi \circ f|_{U^*}$ übereinstimmen, d.h. f ist in a und damit auf ganz U holomorph.

SATZ 1.10 (Identitätssatz, Theorem 1.11 in [For99]). *Seien X und Y Riemannsche Flächen. Sind $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ zwei holomorphe Abbildungen, welche auf einer Teilmenge $A \subseteq X$, die einen Häufungspunkt in X besitzt, übereinstimmen, so gilt bereits $f_1 = f_2$.*

SATZ 1.11 (Satz von der offenen Abbildung, Corollary 2.4 in [For99]). *Seien X und Y Riemannsche Flächen und sei $f : X \rightarrow Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung. Dann ist f eine offene Abbildung, d.h. $f(\Omega)$ ist offen in Y für alle offenen Mengen $\Omega \subset X$.*

SATZ 1.12 (Satz von der Holomorphie der Umkehrfunktion, Corollary 2.5 in [For99]). *Sind X und Y Riemannsche Flächen und ist $f : X \rightarrow Y$ eine injektive holomorphe Abbildung, dann ist $f : X \rightarrow f(X)$ bereits biholomorph.*

Die Mächtigkeit des hierdurch geschaffenen Konzepts zeigt sich unter anderem an dem folgenden Satz:

SATZ 1.13 (Theorem 2.7 in [For99]). *Seien X und Y Riemannsche Flächen und $f : X \rightarrow Y$ eine nicht konstante holomorphe Funktion. Ist X kompakt, so ist auch Y kompakt und f ist surjektiv.*

Zum Beweis dieser Aussage muss man sich nur überlegen, dass $f(X)$ sowohl offen (nach dem Satz von der offenen Abbildung) als auch abgeschlossen ist (da

abgeschlossene Mengen in der kompakten Menge X bereits kompakt sind und daher unter der stetigen Abbildung f auf kompakte und somit abgeschlossene Mengen in Y abgebildet werden). Somit muss nämlich, da Y nach unserer Definition Riemannscher Flächen insbesondere zusammenhängend ist und X bzw. $f(X)$ als nicht leer vorausgesetzt werden kann, bereits $f(X) = Y$ gelten, womit auch die Kompaktheit von Y folgt.

Diese, wenn auch überraschende, aber dennoch harmlos aussehende Aussage hat etwa die folgende Konsequenz:

KOROLLAR 1.14 (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei p ein beliebiges nicht konstantes komplexes Polynom vom Grad n . Dann besitzt p (mit Vielfachheiten) genau n Nullstellen.*

Beweis. Wir betrachten die durch p induzierte Abbildung $p : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ mit $p(\infty) = \infty$. Auf \mathbb{C} ist diese offensichtlich holomorph (nachgeprüft in der Karte (U_0, ϕ_0) aus Beispiel 1.7 (c)) und darüber hinaus auf $\widehat{\mathbb{C}}$ stetig, also nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 1.8 auf ganz $\widehat{\mathbb{C}}$ holomorph und offenbar nicht konstant. Nach Satz 1.13 folgt also $p(\widehat{\mathbb{C}}) = \widehat{\mathbb{C}}$, sodass insbesondere $0 \in p(\mathbb{C})$ gelten muss, d.h. p hat eine komplexe Nullstelle. Durch Polynomdivision ergibt sich dann induktiv die Behauptung. \square

In der klassischen Funktionentheorie charakterisiert der Riemannsche Abbildungssatz die einfach zusammenhängenden Gebiete in der komplexen Ebene \mathbb{C} . Im Kontext Riemannscher Flächen lässt sich diese Aussage zu einer Charakterisierung einfach zusammenhängender Riemannscher Flächen verallgemeinern.

SATZ 1.15 (Riemannscher Abbildungssatz, Theorem 27.9 in [For99]). *Jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist biholomorph äquivalent zu $\widehat{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} oder \mathbb{D} .*

Hierbei nennen wir zwei Riemannsche Flächen **biholomorph äquivalent**, falls es eine biholomorphe Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ gibt.

2. Überlagerungstheorie Riemannscher Flächen

Bei der Behandlung Riemannscher Flächen erweist sich die Überlagerungstheorie als äußerst nützliches Werkzeug. Ich möchte daher zunächst die benötigten Grundbegriffe aus der Überlagerungstheorie bereitstellen.

DEFINITION 1.16. Seien X und Y topologische Hausdorffräume und sei $p : Y \rightarrow X$ eine Abbildung.

- Die Abbildung p heißt **diskret**, falls $p^{-1}(\{x\})$ für alle $x \in X$ diskret in Y ist.
- Die Abbildung p heißt **Überlagerungsabbildung**, falls p stetig, offen und diskret ist.
- Eine Überlagerungsabbildung p heißt **unverzweigt**, falls jeder Punkt $y \in Y$ eine Umgebung V besitzt, sodass $p|_V$ injektiv ist.

- Die Abbildung p heißt **lokal topologisch**, falls jeder Punkt $y \in Y$ eine Umgebung V besitzt, sodass $p|_V : V \rightarrow p(V)$ einen Homöomorphismus darstellt.
- Eine unverzweigte Überlagerungsabbildung p heißt **unbegrenzt**, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, sodass $p^{-1}(U)$ eine Darstellung der Form

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$$

besitzt, wobei $(V_j)_{j \in J}$ mit $J \neq \emptyset$ eine Familie paarweise disjunkter offener Teilmengen von Y ist, für welche alle Abbildungen $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ Homöomorphismen darstellen (vgl. Definition 4.11 in [For99]).

- Sind X und Y zusätzlich lokalkompakt, so heißt eine stetige Abbildung p **eigentlich**, falls für jede in X kompakte Menge K auch $p^{-1}(K)$ kompakt in Y ist.

Wir werden die folgenden Aussagen verwenden:

LEMMA 1.17. *Sind X und Y topologische Hausdorffräume, so ist eine Abbildung $p : Y \rightarrow X$ genau dann eine unverzweigte Überlagerungsabbildung, falls diese lokal topologisch ist.*

SATZ 1.18 (Theorem 4.22 in [For99]). *Sind X und Y lokalkompakte topologische Hausdorffräume und ist $p : Y \rightarrow X$ eine eigentliche unverzweigte Überlagerungsabbildung, dann ist p auch unbegrenzt.*

SATZ 1.19 (Theorem 4.16 und Lemma 4.21 in [For99]). *Sind X und Y topologische Hausdorffräume, wobei X wegzusammenhängend ist, und ist $p : Y \rightarrow X$ eine unbegrenzte unverzweigte Überlagerungsabbildung, so besitzen $p^{-1}(\{x_1\})$ und $p^{-1}(\{x_2\})$ für alle $x_1, x_2 \in X$ die gleiche Mächtigkeit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. In diesem Fall heißt n die **Blätterzahl** von p .*

Sind X und Y zusätzlich lokalkompakt und ist p eigentlich, so ist die Blätterzahl n endlich.

Sind X, Y und Z topologische Räume und $p : Y \rightarrow X$ und $f : Z \rightarrow X$ stetige Abbildungen, so verstehen wir unter einer **Liftung von f** eine stetige Abbildung $g : Z \rightarrow Y$ mit $f = p \circ g$, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow g & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

kommutiert.

SATZ 1.20 (Eindeutigkeit der Liftung, Theorem 4.8 in [For99]). *Seien X und Y topologische Hausdorffräume und $p : Y \rightarrow X$ eine unverzweigte Überlagerungsabbildung. Sei ferner Z ein zusammenhängender topologischer Hausdorffraum und $f : Z \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Sind nun $g_1, g_2 : Z \rightarrow Y$ Liftungen von f , welche $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ für einen Punkt $z_0 \in Z$ erfüllen, dann gilt bereits $g_1 = g_2$.*

SATZ 1.21 (Theorem 4.17 in [For99]). Seien X und Y topologische Hausdorffräume und $p : Y \rightarrow X$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerungsabbildung. Ferner sei Z ein zusammenhängender, wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender topologischer Hausdorffraum und $f : Z \rightarrow X$ stetig. Dann gibt es zu beliebigen $z_0 \in Z$ und $y_0 \in Y$ mit $f(z_0) = p(y_0)$ genau eine Liftung $\hat{f} : Z \rightarrow Y$ von f mit $\hat{f}(z_0) = y_0$.

Mit dem folgenden Resultat stellt sich heraus, dass die Sprache der Überlagerungstheorie auch für Riemannsche Flächen geeignet ist.

SATZ 1.22 (Theorem 4.9 in [For99]). Seien X, Y und Z Riemannsche Flächen. Ist $p : Y \rightarrow X$ eine holomorphe unverzweigte Überlagerungsabbildung und $f : Z \rightarrow X$ eine holomorphe Abbildung, dann ist jede Liftung $g : Z \rightarrow Y$ von f bereits holomorph.

Aus der Vielzahl der Resultate, die sich aus diesem Zusammenspiel ergeben, möchte ich hier nur eines nennen:

SATZ 1.23 (Theorem 5.11 in [For99]). Sei X eine Riemannsche Fläche und sei $f : X \rightarrow \mathbb{D}$ eine eigentliche nicht konstante holomorphe Abbildung, welche über $\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\}$ unverzweigt ist. Dann existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und eine biholomorphe Abbildung $\phi : X \rightarrow \mathbb{D}$, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{D} \\ & \searrow f & \swarrow e_n \\ & & \mathbb{D} \end{array}$$

kommutiert. Hierbei bezeichnen wir mit e_n das durch $e_n(z) := z^n$ definierte Polynom.

Da wir diese Notation häufig benutzen werden, definieren wir genauer:

- Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei e_n das durch

$$e_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^n$$

bestimmte Monom.

- Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n < 0$ sei e_n gegeben durch

$$e_n : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^n.$$

Faberpolynome

1. Definition der Faberpolynome

Wir vereinbaren zunächst die folgende Notation:

- Ist $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, so bezeichnen wir mit $\Omega(K)$ die unbeschränkte Zusammenhangskomponente des Komplements von K in $\widehat{\mathbb{C}}$.
- Für $r > 0$ setzen wir $\Delta_r := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D(0, r)}$.

Gemäß Beispiel 1.7 (b) werden die hierdurch definierten offenen und zusammenhängenden Teilmengen von $\widehat{\mathbb{C}}$ zu Riemannschen Flächen.

Weiter wählen wir die folgende Bezeichnung:

DEFINITION 2.1. Eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ heißt **zulässig**, falls K aus mehr als einem Punkt besteht und zudem $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ einfach zusammenhängend ist. In diesem Fall gilt offensichtlich $\Omega(K) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus K$.

DEFINITION 2.2. Ist $\Omega \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ eine Umgebung von ∞ , so setzen wir

$$\Omega^* := \Omega \setminus \{\infty\}.$$

Für ein zulässiges Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ schreiben wir auch $\Omega^*(K)$ statt $\Omega(K)^*$.

Wiederum nach 1.7 wird die zu einem zulässigen Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ definierte offene und (einfach) zusammenhängende Menge $\Omega(K)$ zu einer Riemannschen Fläche. Mit Hilfe des Riemannschen Abbildungssatzes 1.15 lässt sich diese nun auch charakterisieren.

LEMMA 2.3. *Ist $K \subset \mathbb{C}$ zulässig, so ist $\Omega(K)$ biholomorph äquivalent zu \mathbb{D} .*

Beweis. Ist $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum, dann ist die Riemannsche Fläche $\Omega(K)$ nach Definition 2.1 einfach zusammenhängend und daher nach dem Riemannschen Abbildungssatz 1.15 biholomorph äquivalent zu einer der einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen $\widehat{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} oder \mathbb{D} .

ANNAHME 1: $\Omega(K)$ ist biholomorph äquivalent zu $\widehat{\mathbb{C}}$.

In diesem Fall wäre $\Omega(K)$ insbesondere homöomorph zu dem kompakten topologischen Raum $\widehat{\mathbb{C}}$, müsste also selbst kompakt und damit abgeschlossen in $\widehat{\mathbb{C}}$ sein.

Aufgrund des so gefundenen Widerspruchs kann $\Omega(K)$ nicht biholomorph äquivalent zu $\widehat{\mathbb{C}}$ sein.

ANNAHME 2: $\Omega(K)$ ist biholomorph äquivalent zu \mathbb{C} .

Wir finden also eine biholomorphe Abbildung $\psi : \Omega(K) \rightarrow \mathbb{C}$. Durch Komposition mit einem geeigneten Automorphismus von \mathbb{C} (etwa eine Translation) können wir zusätzlich annehmen, dass $\psi(\infty) = 0$ erfüllt ist.

Wir wählen nun ein $r > 0$ und erhalten die offene Umgebung $D(0, r)$ von 0, sodass (da ψ stetig ist) auch $\psi^{-1}(D(0, r))$ eine in $\Omega(K)$ offene Umgebung von ∞ darstellt. Da $\Omega(K)$ mit der Relativtopologie von $\widehat{\mathbb{C}}$ versehen ist, finden wir eine kompakte Teilmenge L von \mathbb{C} mit $\psi^{-1}(D(0, r)) = (\widehat{\mathbb{C}} \setminus L) \cap \Omega(K)$. Insbesondere gilt also $\psi^{-1}(\Delta_r^*) \subseteq L$, sodass die auf Δ_r^* holomorphe Funktion $\psi^{-1}|_{\Delta_r^*} : \Delta_r^* \rightarrow \mathbb{C}$ in der Umgebung Δ_r von ∞ beschränkt und somit nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 1.8 zu einer holomorphen Funktion $\phi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ fortsetzbar ist.

Nach Satz 1.13 muss nun ϕ sogar surjektiv sein, sodass sich insbesondere

$$\widehat{\mathbb{C}} = \phi(\widehat{\mathbb{C}}) = \Omega(K) \cup \{\phi(\infty)\}$$

ergibt, was aber nicht möglich sein kann, da nach Definition 2.1 das Kompaktum K mindestens einen weiteren, von $\phi(\infty)$ verschiedenen Punkt enthält.

Der so gefundene Widerspruch zeigt, dass es keine biholomorphe Abbildung $\psi : \Omega(K) \rightarrow \mathbb{C}$ geben kann.

Zusammenfassend folgt also, dass $\Omega(K)$ biholomorph äquivalent zu \mathbb{D} sein muss, womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Wir werden im Folgenden meist an einem speziellen Typ von holomorphen Abbildungen interessiert sein. Daher bemerken wir:

BEMERKUNG 2.4. Sei $K \subset \mathbb{C}$ zulässig und (U_1, ϕ_1) die Karte aus Beispiel 1.7 (c). Ist $r > 0$ und $\psi : \Delta_r \rightarrow \Omega(K)$ eine biholomorphe Abbildung, dann ist

$$\psi \circ (\phi_1|_{\Delta_r^*})^{-1} : D\left(0, \frac{1}{r}\right) \setminus \{0\} \rightarrow \Omega(K)$$

eine holomorphe Funktion, welche in 0 eine Polstelle erster Ordnung besitzt, also auf $D(0, \frac{1}{r}) \setminus \{0\}$ eine Laurententwicklung der Form

$$(\psi \circ (\phi_1|_{\Delta_r^*})^{-1})(z) = \frac{a_{-1}}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in D\left(0, \frac{1}{r}\right) \setminus \{0\}$$

besitzt. Insbesondere besitzt ψ auf Δ_r^* eine Laurententwicklung der Form

$$\psi(z) = a_{-1}z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad z \in \Delta_r^*.$$

Hierbei schreiben wir auch $\psi'(\infty)$ für den Koeffizienten

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi(z)}{z}.$$

Wir werden nun für zulässige Kompakta die zugehörige Familie der Faberpolynome definieren. Hierzu benötigen wir zunächst den folgenden Satz.

SATZ 2.5. Ist $K \subset \mathbb{C}$ zulässig, so existieren genau ein $r(K) > 0$ und genau eine biholomorphe Abbildung $\psi_K : \Delta_{r(K)} \rightarrow \Omega(K)$, sodass ψ_K um ∞ eine Laurententwicklung der Form

$$\psi_K(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad z \in \Delta_{r(K)}^*$$

besitzt. Die Zahl $r(K)$ nennt man den **transfiniten Durchmesser** von K .

Beweis. Sei also $K \subseteq \mathbb{C}$ zulässig. Gemäß der Charakterisierung der zugehörigen Riemannschen Fläche $\Omega(K)$ in Lemma 2.3 finden wir eine biholomorphe Abbildung $\varphi_K : \mathbb{D} \rightarrow \Omega(K)$. Nach eventueller Komposition mit einem Automorphismus von \mathbb{D} können wir hierbei erreichen, dass die Bedingungen

$$(2.1) \quad \varphi_K(0) = \infty \quad \text{und} \quad (\phi_1 \circ \varphi_K)'(0) > 0$$

erfüllt sind, wobei wir mit ϕ_1 die in Beispiel 1.7 (c) definierte Kartenabbildung bezeichnen. Man beachte hierbei, dass die Komposition $\phi_1 \circ \varphi_K$ in einer Umgebung von 0 wohldefiniert und im gewöhnlichen Sinne holomorph, d.h. komplex differenzierbar ist.

(i) Wir stellen fest, dass φ_K durch die obigen Forderungen (2.1) eindeutig bestimmt wird. Ist nämlich $\widetilde{\varphi}_K : \mathbb{D} \rightarrow \Omega(K)$ eine weitere biholomorphe Abbildung, die ebenfalls den Bedingungen (2.1) genügt, d.h. es gilt

$$\widetilde{\varphi}_K(\infty) = 0 \quad \text{und} \quad (\phi_1 \circ \widetilde{\varphi}_K)'(0) > 0,$$

so erhalten wir durch die Komposition $f := \varphi_K^{-1} \circ \widetilde{\varphi}_K$ einen Automorphismus von \mathbb{D} mit $f(0) = 0$ und (unter Beachtung der Kettenregel) auch

$$\begin{aligned} f'(0) &= (\varphi_K^{-1} \circ \varphi_K)'(0) \\ &= ((\phi_1 \circ \varphi_K)^{-1} \circ (\phi_1 \circ \widetilde{\varphi}_K))'(0) \\ &= \frac{1}{(\phi_1 \circ \varphi_K)'(f(0))} \cdot (\phi_1 \circ \widetilde{\varphi}_K)'(0) \\ &= \frac{(\phi_1 \circ \widetilde{\varphi}_K)'(0)}{(\phi_1 \circ \varphi_K)'(0)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

erfüllt, also bereits mit $\text{id}_{\mathbb{D}}$ übereinstimmen muss, d.h. es gilt $\widetilde{\varphi}_K = \varphi_K$.

(ii) Wir bemerken nun, dass φ_K die folgende Eigenschaft besitzt

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \varphi_K(z) = \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\phi_1 \circ \varphi_K)(z) - (\phi_1 \circ \varphi_K)(0)}{z} \right)^{-1} = \frac{1}{(\phi_1 \circ \varphi_K)'(0)} > 0.$$

Insbesondere ist φ_K eine meromorphe Funktion, welche in 0 eine Polstelle erster Ordnung besitzt, sodass

$$r(K) := \text{Res}(\varphi_K, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \varphi_K(z) > 0$$

erfüllt ist und φ_K auf \mathbb{D}^* eine Laurententwicklung der Form

$$\varphi_K(z) = r(K) \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} b'_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}^*$$

besitzt. Somit erhalten wir durch

$$\psi_K(z) := \varphi_K\left(\phi_1\left(\frac{1}{r(K)}z\right)\right) \quad \text{für } z \in \Delta_{r(K)}$$

eine offensichtlich biholomorphe Abbildung $\psi_K : \Delta_{r(K)} \rightarrow \Omega(K)$, welche auf $\Delta_{r(K)}^*$ die Laurententwicklung

$$\psi_K(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad z \in \Delta_{r(K)}^*$$

besitzt, wobei $b_n := b'_n r(K)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gesetzt wird.

(iii) Ferner sind $r(K)$ und ψ_K eindeutig bestimmt. Sind nämlich $\tilde{r}(K) > 0$ und eine biholomorphe Funktion $\widetilde{\psi}_K : \Delta_{\tilde{r}(K)} \rightarrow \Omega(K)$ gegeben, sodass die nach Bemerkung 2.4 bestimmte Laurententwicklung von $\widetilde{\psi}_K$ um ∞ die Form

$$\widetilde{\psi}_K(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n z^{-n}, \quad z \in \Delta_{\tilde{r}(K)}^*$$

besitzt, so erhalten wir durch

$$\widetilde{\varphi}_K(z) := \widetilde{\psi}_K(r(K)\phi_1^{-1}(z)) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}$$

eine offensichtlich biholomorphe Abbildung $\widetilde{\varphi}_K : \mathbb{D} \rightarrow \Omega(K)$. Für diese ergibt sich $\widetilde{\varphi}_K(0) = \infty$ und mit einer zu (ii) analogen Rechnung zunächst

$$(\phi_1 \circ \widetilde{\varphi}_K)'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\phi_1 \circ \widetilde{\varphi}_K)(z) - (\phi_1 \circ \widetilde{\varphi}_K)(0)}{z} = \left(\lim_{z \rightarrow 0} z \widetilde{\varphi}_K(z) \right)^{-1}$$

und damit unter Beachtung von

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \widetilde{\varphi}_K(z) = \text{Res}(\widetilde{\varphi}_K, 0) = \tilde{r}(K) > 0$$

schließlich

$$(\phi_1 \circ \widetilde{\varphi}_K)'(0) = \frac{1}{\tilde{r}(K)} > 0.$$

Die Eindeutigkeitsaussage in (i) zeigt nun, dass $\widetilde{\varphi}_K$ mit φ_K und daher auch $\widetilde{\psi}_K$ mit ψ_K übereinstimmen muss. Insbesondere ist also auch $\tilde{r}(K) = r(K)$, womit die Behauptung vollständig bewiesen ist. \square

BEMERKUNG 2.6. Sei $K \subset \mathbb{C}$ zulässig. Wir nennen die biholomorphe Abbildung $\psi : \Delta_r \rightarrow \Omega(K)$ **normiert**, falls in ihrer nach Bemerkung 2.4 bestimmten Laurententwicklung die Bedingung $a_{-1} = 1$ erfüllt ist. Satz 2.5 besagt also, dass es eine eindeutig bestimmte normierte biholomorphe Abbildung $\psi_K : \Delta_{r(K)} \rightarrow \Omega(K)$ gibt.

BEMERKUNG 2.7. Im Zuge dieser Arbeit werden wir zu diversen zulässigen Kompakta $K \subset \mathbb{C}$ die biholomorphe Abbildung $\psi_K : \Delta_{r(K)} \rightarrow \Omega(K)$ bestimmen können. Da wir uns diese Abbildungen auch veranschaulichen wollen, stellen wir die zugehörigen Polarkoordinatenbilder dar, d.h. wir geben an, worauf das durch die Strahlen

$$\{re^{i\theta}; r > r(K)\} \quad \text{für verschiedene Winkel } \theta \in \mathbb{R}$$

und die Kreise

$$\{re^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\} \quad \text{für verschiedene Radien } r > r(K)$$

gegebene Polarkoordinatengitter abgebildet wird. Da wir dies nur in den Fällen anwenden wollen, in denen sich ψ_K trivialerweise stetig auf $\overline{\Delta_{r(K)}}$ fortsetzen lässt und dadurch eine Parametrisierung von ∂K liefert, ergänzen wir dieses Gitter durch den Kreis zu $r = r(K)$ und fügen im Bild dementsprechend den Rand ∂K hinzu. Das (sofern nicht anders angegeben) im Folgenden verwendete Polarkoordinatengitter mit

- den Winkeln $\theta \in \{\frac{k}{6}\pi; k = 0, \dots, 11\}$
- den Radien $r \in \{(1 + \frac{k}{10})r(K); k = 0, \dots, 10\}$

ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

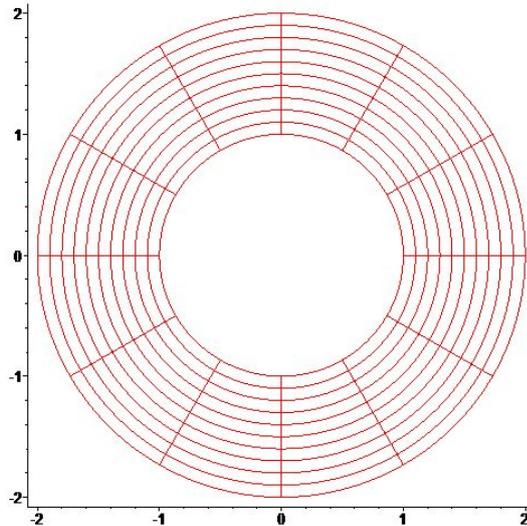


ABBILDUNG 2.1. Standard Polarkoordinatengitter

Aus dem Beweis des vorangegangenen Satzes erhalten wir unmittelbar eine Beziehung zwischen dem transfiniten Durchmesser eines zulässigen Kompaktums und dessen analytischer Kapazität, welchen wir an dieser Stelle einschieben wollen. Für die Definition der analytischen Kapazität verweisen wir auf Abschnitt 1 von Kapitel VIII in [Gam05].

KOROLLAR 2.8. Für ein zulässiges Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ stimmt der transfinite Durchmesser $r(K)$ mit der analytischen Kapazität $\gamma(K)$ überein.

Beweis. Die im Beweis zum obigen Satz konstruierte biholomorphe Funktion $\varphi_K : \mathbb{D} \rightarrow \Omega(K)$ erfüllt die Bedingungen $\varphi_K(0) = \infty$ und

$$\lim_{z \rightarrow 0} z\varphi_K(z) = r(K) > 0.$$

Insbesondere ist die Funktion $g_K := \varphi_K^{-1} : \Omega(K) \rightarrow \mathbb{D}$ ebenfalls biholomorph mit $g_K(\infty) = 0$ und

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zg_K(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \varphi_K(z)g_K(\varphi_K(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} z\varphi_K(z) = r(K) > 0.$$

Gemäß Theorem VIII.1.4 in [Gam05] erhalten wir dann wie behauptet

$$\gamma(K) = \lim_{z \rightarrow \infty} zg_K(z) = r(K).$$

Insbesondere stellt g_K die Ahlforsfunktion für K (vgl. Theorem/Definition VIII.1.6 in [Gam05]) dar. \square

In der folgenden Definition führen wir einige Notationen ein, die wir später benötigen werden.

DEFINITION 2.9. Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum mit dem transfiniten Durchmesser $r(K) > 0$ und der zugehörigen biholomorphen Abbildung $\psi_K : \Delta_{r(K)} \rightarrow \Omega(K)$.

- Für $r > r(K)$ bezeichnen wir mit $\Gamma_r(K)$ die durch

$$\Gamma_r(K) := \psi_K(\partial_+ D(0, r))$$

definierte orientierte Jordankurve in \mathbb{C} . Falls das zugrunde liegende Kompaktum aus dem Zusammenhang klar ist, schreiben wir auch kurz Γ_r statt $\Gamma_r(K)$. Situationsbezogen werden wir eine solche Kurve $\Gamma_r(K)$ auch mit ihrer Spur identifizieren.

- Für $\rho > r(K)$ liefert $\psi_K(\Delta_\rho)$ nach Satz 1.11 eine offene Teilmenge von $\Omega(K)$, welche wegen $\psi_K(\infty) = \infty$ auch eine offene Umgebung von ∞ darstellt. Nach Definition der Topologie auf $\widehat{\mathbb{C}}$ ist

$$K_\rho := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \psi_K(\Delta_\rho)$$

eine kompakte Teilmenge von \mathbb{C} . Da $\psi_K(\Delta_\rho)$ darüber hinaus (als homöomorphes Bild einer einfach zusammenhängenden Menge) einfach zusammenhängend ist, ist K_ρ ein zulässiges Kompaktum und wegen $\psi_K(\Delta_\rho) = \Omega(K_\rho)$ gilt

$$\psi_{K_\rho} = \psi_K|_{\Delta_\rho} \quad \text{und} \quad r(K_\rho) = \rho.$$

Ferner erhalten wir

$$\partial K_\rho = \psi_K(\partial \Delta_\rho) = \psi_K(\partial D(0, \rho)) = \Gamma_\rho$$

und

$$\text{int}(K_\rho) = \text{int}(\Gamma_\rho).$$

Wir halten an dieser Stelle eine nützliche Beobachtung fest:

LEMMA 2.10. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum. Dann ist durch $(K_r)_{r > r(K)}$ eine kompakte Ausschöpfung von \mathbb{C} gegeben, d.h.*

(i) Für alle $r(K) < r_1 < r_2$ gilt

$$K_{r_1} \subset \text{int}(K_{r_2}).$$

(ii) Es ist

$$\bigcup_{r>r(K)} K_r = \mathbb{C}.$$

Darüber hinaus gilt $K \subset \text{int}(K_r)$ für alle $r > r(K)$.

Beweis. Nach Definition 2.9 ist das Kompaktum K_r für $r > r(K)$ durch $\psi_K(\Delta_r) = \Omega(K_r)$ bestimmt. Sind also $r(K) < r_1 < r_2$ beliebig vorgegeben, so erhalten wir für $\rho := \frac{r_1+r_2}{2}$ wegen

$$\psi_K(\Delta_{r_2}) \subset \psi_K(\Delta_\rho) \subset \psi_K(\overline{\Delta_\rho}) \subset \psi_K(\Delta_{r_1}) \subset \psi_K(\Delta_{r(K)})$$

unmittelbar

$$K \subset K_{r_1} \subset U := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \psi_K(\overline{\Delta_\rho}) \subset K_{r_2}$$

mit einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, sodass sich $K_{r_1} \subset \text{int}(K_{r_2})$ und damit der erste Teil der Behauptung ergibt. Darüber hinaus sehen wir damit $K \subset \text{int}(K_r)$ für alle $r > r(K)$.

Sei nun $z \in \mathbb{C}$ beliebig vorgegeben. Gilt speziell $z \in K$, so ist bereits $z \in K_r$ für alle $r > r(K)$ erfüllt. Ist andererseits $z \notin K$ und damit $z \in \Omega(K)$ erfüllt, so wählen wir $r > |\psi_K^{-1}(z)|$ und erhalten $z \notin \psi_K(\Delta_r)$, also $z \in K_r$. Zusammenfassend ergibt sich

$$z \in \bigcup_{r>r(K)} K_r$$

und damit auch der zweite Teil der Behauptung. \square

LEMMA 2.11. In der Situation von Satz 2.5 ist für alle $w \in K$ die Funktion

$$\chi_K(w, \cdot) : \Delta_{r(K)} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{z\psi'_K(z)}{\psi_K(z)-w}, & z \neq \infty \\ 1, & z = \infty \end{cases}$$

holomorph und besitzt eine Laurententwicklung um ∞ der Form

$$\frac{z\psi'_K(z)}{\psi_K(z)-w} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^K(w)z^{-n}, \quad z \in \Delta_{r(K)}^*$$

mit den Koeffizienten $(F_n^K(w))_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass nach Konstruktion der Abbildung ψ_K auch

$$\psi_K(\Delta_{r(K)}^*) = \Omega^*(K)$$

erfüllt ist. Insbesondere ist für $w \in K$ die Funktion

$$H_w : \Delta_{r(K)}^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z\psi'_K(z)}{\psi_K(z)-w}$$

wohldefiniert und holomorph. Da ψ_K nach Konstruktion in 2.5 eine Darstellung der Form

$$\psi_K(z) = z + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \Delta_{r(K)}^*$$

mit einer auf $D(0, \frac{1}{r(K)})$ holomorphen Funktion \mathfrak{P} besitzt, können wir

$$\psi'_K(z) = 1 - \frac{1}{z^2} \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \Delta_{r(K)}^*$$

nachrechnen und erhalten, dass

$$\frac{z\psi'_K(z)}{\psi_K(z) - w} = \frac{z\left(1 - \frac{1}{z^2} \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{z}\right)\right)}{z + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) - w} = \frac{1 - \frac{1}{z^2} \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{z}\right)}{1 + \frac{1}{z} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{w}{z}}$$

für alle $z \in \Delta_{r(K)}^*$ erfüllt ist, womit sich wegen

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2} \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

unmittelbar

$$(2.2) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} H_w(z) = 1$$

ergibt. Insbesondere ist also H_w in einer Umgebung von ∞ beschränkt, sodass sich H_w nach dem Riemanschen Hebbarkeitssatz 1.8 zu einer holomorphen Funktion $\chi_K(w, \cdot) : \Delta_{r(K)} \rightarrow \mathbb{C}$ fortsetzen lässt. Wegen (2.2) muss dann insbesondere $\chi_K(w, \infty) = 1$ erfüllt sein. Damit stellt

$$\chi_K(w, \cdot) : \Delta_{r(K)} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{z\psi'_K(z)}{\psi_K(z) - w}, & z \neq \infty \\ 1, & z = \infty \end{cases}$$

wie behauptet eine holomorphe Funktion dar. Bezeichnen wir mit (U_1, ϕ_1) die Karte aus Beispiel 1.7 (c), so erhalten wir durch

$$\tilde{\chi}_K(w, \cdot) := \chi_K(w, \cdot) \circ \phi_1^{-1}|_{D(0, \frac{1}{r(K)})}$$

eine holomorphe Funktion $\tilde{\chi}_K(w, \cdot) : D(0, \frac{1}{r(K)}) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\tilde{\chi}_K(w, z) = \begin{cases} \chi_K(w, \frac{1}{z}), & z \neq 0 \\ \chi_K(w, \infty), & z = 0 \end{cases} \quad \text{für alle } z \in D\left(0, \frac{1}{r(K)}\right),$$

welche sich auf $D(0, \frac{1}{r(K)})$ in eine konvergente Potenzreihe

$$\tilde{\chi}_K(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^K(w) z^n \quad \text{für alle } z \in D\left(0, \frac{1}{r(K)}\right)$$

mit Koeffizienten $(F_n^K(w))_{n=0}^{\infty}$ entwickeln lässt. Wegen

$$\chi_K(w, \cdot) = \tilde{\chi}_K(w, \cdot) \circ \phi_1|_{\Delta_{r(K)}}$$

gilt dann für alle $z \in \Delta_{r(K)}^*$

$$\chi_K(w, z) = \tilde{\chi}_K\left(w, \frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^K(w) z^{-n},$$

d.h. $\chi_K(w, \cdot)$ besitzt auf $\Delta_{r(K)}^*$ eine Laurententwicklung (um ∞) der gewünschten Form. \square

BEMERKUNG 2.12. In der Situation des vorangegangenen Satzes 2.11 ist für $w \in K$ die holomorphe Funktion $\chi_K(w, \cdot) : \Delta_{r(K)} \rightarrow \mathbb{C}$ auf $\partial D(0, r)$ für $r > r(K)$ gleichmäßig absolut konvergent. Daher können wir für $k \in \mathbb{N}_0$ nachrechnen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r)} \chi_K(w, z) z^{k-1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n^K(w) z^{-n} \right) z^{k-1} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^K(w) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r)} z^{k-n-1} dz \right)}_{=\delta_{n,k}} \\ &= F_k^K(w), \end{aligned}$$

womit wir die Formel

$$F_k^K(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r)} \chi_K(w, z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r)} \frac{z^k \psi'_K(z)}{\psi_K(z) - w} dz$$

gefunden haben. Insbesondere lässt sich die Abbildung $w \mapsto F_k^K(w)$ auf K durch die offenbar auf $\text{int}(K_r)$ holomorphe Funktion

$$w \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r)} \frac{z^k \psi'_K(z)}{\psi_K(z) - w} dz$$

fortsetzen. Da K als zulässiges Kompaktum einen Häufungspunkt besitzen muss¹, ist diese holomorphe Fortsetzung sogar eindeutig bestimmt.

SATZ 2.13 (Theorem 2.1 (a) (iii) in [Eil83]). *Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum. Ist*

$$\psi_K(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$$

die Laurententwicklung von ψ_K um ∞ , so erfüllen die Koeffizienten $(F_n^K(w))_{n=0}^{\infty}$ für $w \in K$ die Rekursion

$$F_{n+1}^K(w) = w F_n^K(w) - \sum_{k=0}^{n-1} b_k F_{n-k}^K(w) - (1+n)b_n, \quad n \geq 1$$

mit den Anfangswerten

$$F_0^K(w) = 1 \quad \text{und} \quad F_1^K(w) = w - b_0.$$

¹Würde K keinen Häufungspunkt besitzen, so könnte K als beschränkte Menge nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß nur endlich viele Punkte enthalten, was aber nicht möglich ist, da $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ als einfach zusammenhängend vorausgesetzt wird.

Beweis. Sei $w \in K$ beliebig vorgegeben. Nach Konstruktion erhalten wir für alle $z \in \Delta_{r(K)}^*$

$$z\psi'_K(z) = (\psi_K(z) - w) \frac{z\psi'_K(z)}{\psi_K(z) - w} = (\psi_K(z) - w) \sum_{n=0}^{\infty} F_n^K(w) z^{-n}$$

und damit

$$z \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^{-(n+1)} \right) = \left(z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} - w \right) \sum_{n=0}^{\infty} F_n^K(w) z^{-n}.$$

Beachten wir, dass unter Verwendung des Cauchyprodukts

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n^K(w) z^{-n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n b_k F_{n-k}^K(w) \right) z^{-n}$$

gilt (da beide Reihen auf der linken Seite absolut konvergieren) so lässt sich dies in die folgende Form bringen:

$$z - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^K(w) z^{-(n-1)} - w \sum_{n=0}^{\infty} F_n^K(w) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n b_k F_{n-k}^K(w) \right) z^{-n}$$

Da diese Identität für alle $z \in \Delta_{r(K)}^*$ gilt, erhalten wir durch Koeffizientenvergleich zunächst die im Satz behaupteten Anfangswerte

$$\begin{aligned} F_0^K(w) &= 1 \\ F_1^K(w) &= w F_0^K(w) - b_0 F_0^K(w) = w - b_0 \end{aligned}$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ aus

$$\begin{aligned} -n b_n &= F_{n+1}^K(w) - w F_n^K(w) + \sum_{k=0}^n b_k F_{n-k}^K(w) \\ &= F_{n+1}^K(w) - w F_n^K(w) + b_n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k F_{n-k}^K(w) \end{aligned}$$

die Rekursionsvorschrift

$$F_{n+1}^K(w) = w F_n^K(w) - \sum_{k=0}^{n-1} b_k F_{n-k}^K(w) - (1+n)b_n,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Die in obigem Satz 2.13 hergeleitete Rekursion für die Folge $(F_n^K(w))_{n=0}^{\infty}$ zu einem zulässigen Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ und einem Punkt $w \in K$ lässt sich auch als „formale“ Rekursion im Polynomring $\mathbb{C}[w]$ auffassen, wodurch dann eine Folge von holomorphen Polynomen $(F_n^K)_{n=0}^{\infty}$ definiert wird, welche eingeschränkt auf K mit den Koeffizientenabbildungen $w \mapsto F_n^K(w)$ übereinstimmen. Die nach Bemerkung 2.12 eindeutig bestimmte holomorphe Fortsetzung ist damit durch diese Polynome gegeben.

Induktiv überzeugt man sich leicht, dass F_n^K für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ein **normiertes Polynom** (d.h. ein Polynom mit führendem Koeffizienten 1) vom Grad n darstellt. Dies mündet nun in

DEFINITION 2.14 (Faberpolynome). Ist $K \subset \mathbb{C}$ zulässig, so wird durch

$$\frac{z\psi'_K(z)}{\psi_K(z) - w} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^K(w)z^{-n}, \quad z \in \Delta_{r(K)}^*$$

eine Familie normierter Polynome $(F_n^K)_{n=0}^{\infty}$ definiert, wobei $\deg(F_n^K) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist. Das Polynom F_n^K heißt das **n -te Faberpolynom** des zulässigen Kompaktums K .

BEISPIEL 2.15 (Einheitskreisscheibe). Offenbar ist $\overline{\mathbb{D}}$ ein zulässiges Kompaktum und

$$\psi_{\overline{\mathbb{D}}} : \Delta_1 \rightarrow \Omega(\overline{\mathbb{D}}), \quad z \mapsto z$$

ist die eindeutig bestimmte normierte biholomorphe Abbildung von Δ_1 nach $\Omega(\overline{\mathbb{D}})$. Es ist also $r(\overline{\mathbb{D}}) = 1$.

Ferner ergibt sich für alle $z \in \Delta_1^*$ und alle $w \in \overline{\mathbb{D}}$

$$\frac{z\psi'_{\overline{\mathbb{D}}}(z)}{\psi_{\overline{\mathbb{D}}}(z) - w} = \frac{z}{z - w} = \frac{1}{1 - \frac{w}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^n z^{-n}$$

und daher

$$F_n^{\overline{\mathbb{D}}}(w) = w^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Satz 2.13 zeigt, dass die Folge $(F_n^K)_{n=0}^{\infty}$ der Faberpolynome zu einem zulässigen Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ allein von den Koeffizienten der Laurententwicklung um ∞ der biholomorphen Funktion ψ_K abhängt. Da für $r > r(K)$ die Identität $\psi_{K_r} = \psi_K|_{\Delta_r}$ gilt (vgl. Definition 2.9), stimmen die Koeffizienten der Laurententwicklung um ∞ von ψ_{K_r} mit denen der Laurententwicklung um ∞ von ψ_K überein, weshalb sich die gleichen Faberpolynome ergeben müssen. Wir halten diese Beobachtung in dem folgenden Korollar fest:

KOROLLAR 2.16. Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum. Für alle $r > r(K)$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt dann $F_n^{K_r} = F_n^K$.

2. Berechnung der Faberpolynome

Auch wenn, wie in obigem Beispiel 2.15 gesehen, die Bestimmung der Faberpolynome im Fall der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}$ mit Hilfe der erzeugenden Funktion aus Definition 2.14 noch einfach möglich ist, so stößt man bei anderen zulässigen Kompakta $K \subset \mathbb{C}$ schnell auf einige Probleme. Selbst wenn die zugehörige biholomorphe Abbildung ψ_K bekannt ist, hat man meist nicht mehr als die in Satz 2.13 angegebene rekursive Darstellung der Faberpolynome zur Verfügung.

2.1. abbrechende Laurententwicklung. In Anlehnung an die Arbeit [Fab20] wollen wir nun für zulässige Kompakta K , für die die Laurententwicklung um ∞ der zugehörigen biholomorphen Abbildung ψ_K nach endlich vielen Termen abbricht, eine „explizite“ Darstellung der Faberpolynome bestimmen. Hierzu erinnern wir zunächst an das Konzept der logarithmischen Ableitung:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Ist $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ auf Ω nullstellenfrei, so nennt man $\frac{f'}{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ die **logarithmische Ableitung von f auf Ω** . Induktiv überzeugt man sich leicht, dass für endlich viele nullstellenfreie Funktionen $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $f := \prod_{j=1}^n f_j$ gilt:

$$(2.3) \quad \frac{f'}{f} = \sum_{j=1}^n \frac{f'_j}{f_j}$$

SATZ 2.17 (Abschnitt 2 in [Fab20]). *Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum, für welches die zugehörige biholomorphe Abbildung $\psi_K : \Delta_{r(K)} \rightarrow \Omega(K)$ eine Laurententwicklung um ∞ der Form*

$$\psi_K(z) = z + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

mit einem komplexen holomorphen Polynom \mathfrak{P} vom Grad $m \geq 1$ besitzt. Sind für $w \in K$ durch $\tau_1(w), \dots, \tau_{m+1}(w)$ die $m+1$ (nicht notwendig paarweise verschiedenen) Lösungen der Gleichung

$$1 + \tau \mathfrak{P}(\tau) - \tau w = 0$$

gegeben, dann lassen sich die Faberpolynome zu K in folgender Weise darstellen:

$$F_n^K(w) = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{\tau_j(w)^n}, \quad w \in K, \quad n \in \mathbb{N}$$

Beweis. Wir fixieren ein beliebiges $w \in K$ und betrachten das durch

$$\mathfrak{Q}_w(\tau) := 1 + \tau \mathfrak{P}(\tau) - \tau w \quad \text{für } \tau \in \mathbb{C}$$

definierte Polynom \mathfrak{Q}_w vom Grad $m+1$. Gemäß dem Fundamentalsatz der Algebra 1.14 besitzt \mathfrak{Q}_w genau $m+1$ (nicht notwendig verschiedene) Nullstellen $\tau_1(w), \dots, \tau_{m+1}(w)$, welche wegen $\mathfrak{Q}_w(0) = 1$ von 0 verschieden sind. Insbesondere ist also

$$\varepsilon := \min_{j=1, \dots, m+1} |\tau_j(w)| > 0$$

und $\Omega := D(0, \varepsilon)$ stellt eine offene Umgebung von 0 dar, auf der \mathfrak{Q}_w keine Nullstelle hat.

Ist nun genauer $\mathfrak{P}(\tau) = b_m \tau^m + \dots + b_1 \tau + b_0$ für alle $\tau \in \mathbb{C}$, so gilt offensichtlich

$$\mathfrak{Q}_w(\tau) = b_m \prod_{j=1}^{m+1} (\tau - \tau_j(w)) \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{C}$$

und daher für alle $\tau \in \Omega$ nach obiger Vorbemerkung zur logarithmischen Ableitung (2.3)

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{Q}'_w(\tau)}{\mathfrak{Q}_w(\tau)} &= \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{\tau - \tau_j(w)} = - \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{\tau_j(w)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\tau}{\tau_j(w)}} \\ &= - \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{\tau_j(w)^{n+1}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{\tau_j(w)^{n+1}} \right) \tau^n. \end{aligned}$$

Setzen wir $R := \max\{\frac{1}{\varepsilon}, r(K)\}$, so können wir für alle $z \in \Delta_R^* \subset \Delta_{r(K)}$ nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} \frac{z\psi'_K(z)}{\psi_K(z) - w} &= \frac{z(1 - \frac{1}{z^2}\mathfrak{P}'(\frac{1}{z}))}{z + \mathfrak{P}(\frac{1}{z}) - w} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{z^2}\mathfrak{P}'(\frac{1}{z})}{1 + \frac{1}{z}\mathfrak{P}(\frac{1}{z}) - \frac{1}{z}w} \\ &= 1 - \frac{1}{z} \cdot \frac{\frac{1}{z}\mathfrak{P}'(\frac{1}{z}) + \mathfrak{P}(\frac{1}{z}) - w}{1 + \frac{1}{z}\mathfrak{P}(\frac{1}{z}) - \frac{1}{z}w} \\ &= 1 - \frac{1}{z} \cdot \frac{\mathfrak{Q}'_w(\frac{1}{z})}{\mathfrak{Q}_w(\frac{1}{z})} \end{aligned}$$

und damit wegen $\frac{1}{z} \in \Omega$ auch

$$\frac{z\psi'_K(z)}{\psi_K(z) - w} = 1 - \frac{1}{z} \cdot \frac{\mathfrak{Q}'_w(\frac{1}{z})}{\mathfrak{Q}_w(\frac{1}{z})} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{\tau_j(w)^{n+1}} \right) \frac{1}{z^{n+1}}$$

gilt. Durch Koeffizientenvergleich mit der Darstellung in Definition 2.14 erhalten wir, dass wie behauptet $F_0^K(w) = 1$ und

$$F_n^K(w) = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{\tau_j(w)^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt ist. □

Um für diese Situation konkrete Beispiele angeben zu können, zeigen wir das folgende Lemma.

LEMMA 2.18. *Sei durch*

$$\mathfrak{P}(\tau) = a_m\tau^m + \cdots + a_1\tau + a_0, \quad \tau \in \mathbb{C}$$

ein beliebiges komplexes holomorphes Polynom vom Grad m gegeben. Gilt für $r > 0$ die Bedingung

$$(2.4) \quad \sum_{j=1}^m |a_j| \frac{j}{r^{j+1}} \leq 1$$

(für $m = 0$ ist diese Bedingung leer), so stellt

$$\psi : \Delta_r \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \begin{cases} z + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right), & z \neq \infty \\ \infty, & z = \infty \end{cases}$$

eine injektive holomorphe Abbildung dar. Insbesondere ist $\psi : \Delta_r \rightarrow \psi(\Delta_r)$ nach Satz 1.12 biholomorph.

Beweis. Sei also $r > 0$ gegeben, sodass die Bedingung (2.4) erfüllt ist. Da ψ auf Δ_r^* offensichtlich holomorph ist (nachgeprüft in der Karte (U_0, ϕ_0) aus Beispiel 1.7 (c)) und darüber hinaus in ∞ stetig ist, folgt mit Hilfe des Riemanschen Hebbarkeitssatzes 1.8 unmittelbar die Holomorphie von ψ auf ganz Δ_r . Es genügt also, die Injektivität von ψ auf Δ_r nachzuweisen. Da ψ auf Δ_r^* den Wert ∞ nicht annimmt, genügt sogar der Nachweis der Injektivität von ψ auf Δ_r^* .

Hierzu nehmen wir an, wir könnten $z_1, z_2 \in \Delta_r^*$ mit $\psi(z_1) = \psi(z_2)$ und $z_1 \neq z_2$ finden. Nach Definition von ψ würde in diesem Fall

$$z_1 + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z_1}\right) = z_2 + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z_2}\right)$$

bzw.

$$\left| \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z_2}\right) - \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z_1}\right) \right| = |z_1 - z_2|$$

gelten. Da wir aber ein $r_* > r$ mit $z_1, z_2 \in \Delta_{r_*}$ finden können, erhalten wir für alle $j = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z_2^j} - \frac{1}{z_1^j} \right| &= \left| \frac{z_1^j - z_2^j}{z_1^j z_2^j} \right| \\ &= \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1^j z_2^j} \cdot \sum_{\nu=0}^{j-1} z_1^\nu z_2^{j-1-\nu} \right| \\ &= |z_1 - z_2| \cdot \left| \sum_{\nu=0}^{j-1} \frac{1}{z_1^{j-\nu}} \cdot \frac{1}{z_2^{\nu+1}} \right| \\ &\leq |z_1 - z_2| \cdot \sum_{\nu=0}^{j-1} \frac{1}{r_*^{j+1}} \\ &= \frac{j}{r_*^{j+1}} |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

und somit den Widerspruch

$$\begin{aligned}
\left| \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z_2}\right) - \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z_1}\right) \right| &= \left| \sum_{j=1}^m a_j \left(\frac{1}{z_2^j} - \frac{1}{z_1^j} \right) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^m |a_j| \left| \frac{1}{z_2^j} - \frac{1}{z_1^j} \right| \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^m |a_j| \frac{j}{r_*^{j+1}} \right) |z_1 - z_2| \\
&< \left(\sum_{j=1}^m |a_j| \frac{j}{r^{j+1}} \right) |z_1 - z_2| \\
&\stackrel{(2.4)}{\leq} |z_1 - z_2|,
\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. \square

BEISPIEL 2.19 (Hypocycloide). Für $2 \leq n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Abbildung

$$\psi_n : \Delta_1 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \begin{cases} z + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{z^{n-1}}, & z \neq \infty \\ \infty, & z = \infty \end{cases}$$

und halten fest:

- Unter Verwendung von Lemma 2.18 ergibt sich unmittelbar, dass ψ_n eine injektive holomorphe Abbildung darstellt. Nach dem Satz von der offenen Abbildung 1.11 ist $\psi_n(\Delta_1)$ daher eine offene Teilmenge von $\widehat{\mathbb{C}}$, welche wegen $\psi_n(\infty) = \infty$ eine Umgebung von ∞ sein muss und somit nach Definition der Topologie auf $\widehat{\mathbb{C}}$ ein kompaktes Komplement $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \psi_n(\Delta_1) \subset \mathbb{C}$ haben muss.
- In Lemma 2.18 hatten wir uns mit dem Satz von der Holomorphie der Umkehrfunktion 1.12 überzeugt, dass ψ_n bereits eine biholomorphe Abbildung zwischen Δ_1 und $\psi_n(\Delta_1)$ liefert. Insbesondere sind Δ_1 und $\psi_n(\Delta_1)$ homöomorph, also beide einfach zusammenhängend.

Zusammenfassend ist damit $H_n := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \psi_n(\Delta_1) \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum und es gilt $\psi_n(\Delta_1) = \Omega(H_n)$, d.h.

$$\psi_{H_n} = \psi_n \quad \text{und} \quad r(H_n) = 1.$$

Den Rand ∂H_n nennt man die **Hypocycloide mit n Spitzen**. Für die Werte $n = 3, 4, 5, 11$ sind die zugehörigen Hypocycloiden ∂H_n in Abbildung 2.2 dargestellt.

Die Rekursion aus Satz 2.13 liefert dann speziell

$$F_k^{H_n}(w) = w^k \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1$$

und

$$F_n^{H_n}(w) = w^n - \frac{n}{n-1}.$$

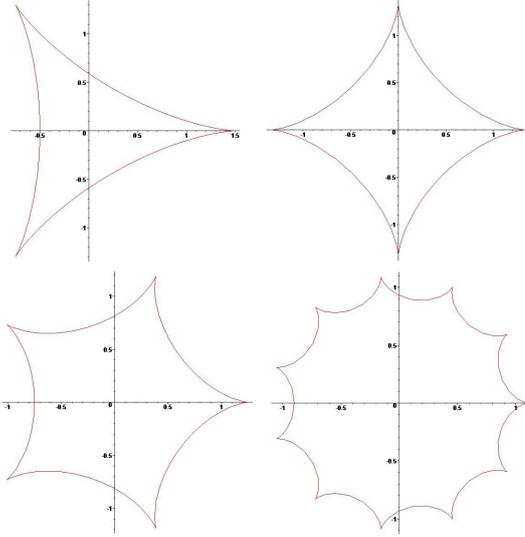


ABBILDUNG 2.2. Hypocycloiden H_n für $n = 3, 4, 5, 11$

BEISPIEL 2.20 (Ellipse). In obigem Beispiel 2.19 liefert der Spezialfall $n = 2$ die biholomorphe Abbildung

$$\psi_2 : \Delta_1 \rightarrow \Omega(H_2), \quad z \mapsto \begin{cases} z + \frac{1}{z}, & z \neq \infty \\ \infty, & z = \infty \end{cases}.$$

Für alle $r > r(H_2) = 1$ betrachten wir die Kurve $\Gamma_r = \psi_n(\partial_+ D(0, r))$, welche sich durch den Weg $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\gamma_r(t) := \psi_n(re^{it}) = re^{it} + \frac{1}{r}e^{-it} = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos(t) + i\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin(t)$$

parametrisieren lässt. Man überzeugt sich leicht, dass die Spur von γ_r die Ellipse um 0 mit den Halbachsen

$$a = r + \frac{1}{r} \quad \text{und} \quad b = r - \frac{1}{r}$$

ist. Da somit offensichtlich jeder Punkt der komplexen Ebene außerhalb von $E := [-2, 2]$ in der Form $\psi_n(re^{it})$ mit geeigneten Werten $r > 1$ und $t \in [0, 2\pi]$ darstellbar ist, folgt $H_2 = [-2, 2] = E$. Zudem ist E_r für $r > 1$ das von der durch γ_r parametrisierten Ellipse umrandete Kompaktum. In Abbildung 2.3 sind $E = [-2, 2]$ und die Ellipsen $\Gamma_r(E)$ für $r \in \{1.5, 2, 2.5, 3\}$ dargestellt.

Laut Satz 2.17 können wir die Faberpolynome zu E durch die Lösungen $\tau_1(w)$ und $\tau_2(w)$ der Gleichung

$$1 + \tau^2 - \tau w = 0$$

für $n \in \mathbb{N}$ gemäß der Formel

$$F_n^E(w) = \frac{1}{\tau_1(w)^n} + \frac{1}{\tau_2(w)^n}$$

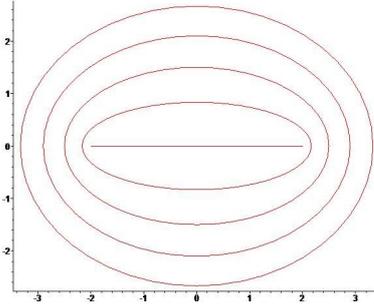


ABBILDUNG 2.3. E und $\Gamma_r(E)$ für $r \in \{1.5, 2, 2.5, 3\}$

bestimmen. Man rechnet leicht nach, dass

$$\tau_1(w) = \frac{1}{2} \left(w + \sqrt{w^2 - 4} \right) \quad \text{und} \quad \tau_2(w) = \frac{1}{2} \left(w - \sqrt{w^2 - 4} \right)$$

und damit auch $\tau_1(w)\tau_2(w) = 1$ gilt, wobei es genügt $\sqrt{w^2 - 4}$ symbolisch als eine beliebige komplexe Lösung τ der Gleichung $\tau^2 = w^2 - 4$ aufzufassen. In der Tat erhalten wir die explizite Darstellung

$$\begin{aligned} F_n^E(w) &= \frac{1}{2^n} \left(\left(w + \sqrt{w^2 - 4} \right)^n + \left(w - \sqrt{w^2 - 4} \right)^n \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(w^{n-k} (\sqrt{w^2 - 4})^k + w^{n-k} (-\sqrt{w^2 - 4})^k \right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} w^{n-2k} (w^2 - 4)^k. \end{aligned}$$

An dieser Stelle sei zudem auf die rekursive Darstellung der Faberpolynome hingewiesen, die sich aus Satz 2.13 ergibt:

$$F_0^E(w) = 1, \quad F_1^E(w) = w, \quad F_2^E(w) = wF_1^E(w) - 2 = w^2 - 2$$

und

$$F_{n+1}^E(w) = wF_n^E(w) - F_{n-1}^E(w), \quad n \geq 2.$$

Beispielsweise ist:

$$\begin{aligned} F_0^E(w) &= 1 \\ F_1^E(w) &= w \\ F_2^E(w) &= w^2 - 2 \\ F_3^E(w) &= w^3 - 3w \\ F_4^E(w) &= w^4 - 4w^2 + 2 \\ F_5^E(w) &= w^5 - 5w^3 + 5w \\ F_6^E(w) &= w^6 - 6w^4 + 9w^2 - 2 \end{aligned}$$

2.2. rationale Abbildung. In seiner Arbeit [Lie01] betrachtet J. Liesen den allgemeineren Fall, dass die zu einem zulässigen Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ gehörende biholomorphe Abbildung ψ_K durch eine rationale Funktion gegeben ist, also die Struktur

$$(2.5) \quad \psi_K(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z^m + \mu_{m-1}z^{m-1} + \cdots + \mu_0}{z^{m-1} + \nu_{m-2}z^{m-2} + \cdots + \nu_0}$$

mit (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) teilerfremden Polynomen P und Q besitzt. Man beachte hierbei, dass wir die Ergebnisse der Arbeit [Lie01] an unsere Definitionen anpassen müssen, da J. Liesen nicht eine biholomorphe Abbildung $\psi_K : \Delta_{r(K)} \rightarrow \Omega(K)$ mit $\psi'_K(\infty) = 1$ sondern eine biholomorphe Abbildung $\tilde{\psi}_K : \Delta_1 \rightarrow \Omega(K)$ mit $\tilde{\psi}'_K(\infty) > 0$ betrachtet. Zur Bestimmung der Faberpolynome ist nun Lemma 2.1 in [Lie01] entscheidend:

SATZ 2.21 (Lemma 2.1 in [Lie01]). *Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum, für welches die zugehörige normierte biholomorphe Abbildung $\psi_K : \Delta_{r(K)} \rightarrow \Omega(K)$ die Struktur (2.5) hat. Besitzen das Polynom Q eine Faktorisierung der Form*

$$Q(z) = \prod_{j=1}^l (z - z_j)^{m_j} \quad \text{mit} \quad m_j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^l m_j = m - 1$$

und für $w \in \mathbb{C}$ das Polynom $P - wQ$ eine Faktorisierung der Form

$$P(z) - wQ(z) = \prod_{j=1}^{l(w)} (z - z_j(w))^{m_j(w)} \quad \text{mit} \quad m_j(w) \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^{l(w)} m_j(w) = m,$$

dann ist das n -te Faberpolynom F_n^K zu K gegeben durch

$$F_n^K(w) = \sum_{j=1}^{l(w)} m_j(w) z_j(w)^n - \sum_{j=1}^l m_j z_j^n.$$

Beweis. Sei $w \in \mathbb{C}$ beliebig vorgegeben. Nach Lemma 2.10 können wir dann ein $r > r(K)$ mit $w \in \text{int}(K_r)$ wählen und stellen fest, dass die Abbildung

$$z \mapsto \psi_K(z) - w = \frac{P(z) - wQ(z)}{Q(z)}$$

und damit auch das Polynom $P - wQ$ auf Δ_r nullstellenfrei sein muss, d.h. es gilt

$$|z_j(w)| \leq r \quad \text{für } j = 1, \dots, l(w).$$

Darüber hinaus können auch keine Nullstellen von Q in $\Delta_{r(K)}$ liegen, da P und Q teilerfremd sind und die nach Vorgabe injektive Abbildung ψ_K bereits $\psi_K(\infty) = \infty$ erfüllt. Es gilt daher auch

$$|z_j| \leq r(K) < r \quad \text{für } j = 1, \dots, l.$$

Für alle $z \in \Delta_r^*$ können wir ferner aus

$$\psi_K(z) - w = \frac{P(z) - wQ(z)}{Q(z)} = \prod_{j=1}^{l(w)} (z - z_j(w))^{m_j(w)} \cdot \prod_{j=1}^l (z - z_j)^{-m_j}$$

unter Verwendung der logarithmischen Ableitung (2.3) nachrechnen:

$$\frac{\psi'_K(z)}{\psi_K(z) - w} = \frac{\frac{d}{dz}(\psi_K(z) - w)}{\psi_K(z) - w} = \sum_{j=1}^{l(w)} \frac{m_j(w)}{z - z_j(w)} - \sum_{j=1}^l \frac{m_j}{z - z_j}$$

Aufgrund der obigen Abschätzungen ist nun

$$\left| \frac{z_j(w)}{z} \right| < 1 \quad \text{für } j = 1, \dots, l(w)$$

und

$$\left| \frac{z_j}{z} \right| < 1 \quad \text{für } j = 1, \dots, l,$$

sodass wir mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} \frac{z\psi'_K(z)}{\psi_K(z) - w} &= \sum_{j=1}^{l(w)} m_j(w) \frac{1}{1 - \frac{z_j(w)}{z}} - \sum_{j=1}^l m_j \frac{1}{1 - \frac{z_j}{z}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{l(w)} m_j(w) z_j(w)^n - \sum_{j=1}^l m_j z_j^n \right) \frac{1}{z^n} \end{aligned}$$

berechnen können, womit sich unter Beachtung von Lemma 2.11 und der Eindeutigkeit der Laurententwicklung wie behauptet

$$F_n^K(w) = \sum_{j=1}^{l(w)} m_j(w) z_j(w)^n - \sum_{j=1}^l m_j z_j^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ergibt. □

Satz 2.21 stellt klarerweise einer Verallgemeinerung des Resultats 2.17 von G. Faber und auch tatsächlich eine echte Erweiterung dar:

BEISPIEL 2.22 („Bratwurst“-Mengen). So lassen sich etwa die in [KL00] von T. Koch und J. Liesen untersuchten „Bratwurst“-Mengen durch diesen Satz 2.21 erfassen. Abbildung 2.4 zeigt hierzu ein Beispiel, für welches in Theorem 3.1 von [KL00] die Werte

$$\lambda_m = 1, \quad \phi = \pi \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{1}{8}\varepsilon_0$$

gewählt wurden.

2.3. Transformationsverhalten. Im Hinblick auf die meist mühsame Bestimmung der biholomorphen Abbildung ψ_K ist es wünschenswert, das Transformationsverhalten der Faberpolynome zu verstehen. In dem folgenden Satz wollen wir untersuchen, wie sich die Faberpolynome verändern, wenn wir das zugehörige Kompaktum K einer affin linearen Transformation unterwerfen oder es an der reellen Achse spiegeln.

SATZ 2.23. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ zulässig.*

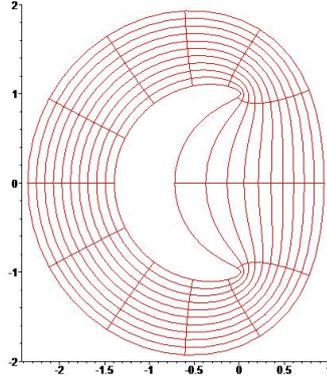


ABBILDUNG 2.4. Beispiel einer „Bratwurst“-Menge

(i) Sind $a \in \mathbb{C}$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ gegeben, so ist auch $a + \lambda K$ zulässig mit

$$r(a + \lambda K) = |\lambda| r(K)$$

und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$F_n^{a+\lambda K}(w) = \lambda^n F_n^K\left(\frac{w-a}{\lambda}\right), \quad w \in a + \lambda K.$$

(ii) Mit K ist auch $K^* := \{\bar{z}; z \in K\}$ zulässig mit

$$r(K^*) = r(K)$$

und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$F_n^{K^*}(w) = \overline{F_n^K(\bar{w})}, \quad w \in K^*.$$

Beweis. (i) Für $a \in \mathbb{C}$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ definieren wir $L := a + \lambda K$ und die biholomorphen Abbildungen

$$\rho: \Delta_{r(K)} \rightarrow \Delta_{|\lambda|r(K)}, \quad z \mapsto \lambda z$$

und

$$\phi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto a + \lambda z.$$

Da ϕ sogar biholomorph ist, also insbesondere ein Homöomorphismus von $\widehat{\mathbb{C}}$ auf sich ist, können wir aus $L = \phi(K)$ und $\widehat{\mathbb{C}} \setminus L = \phi(\Omega(K))$ schließen, dass auch L zulässig ist. Weil wir uns darüber hinaus leicht davon überzeugen können, dass die biholomorphe Abbildung

$$(\phi|_{\Omega(K)}) \circ \psi_K \circ \rho^{-1}: \Delta_{|\lambda|r(K)} \rightarrow \Omega(L)$$

normiert ist, erhalten wir

$$r(L) = |\lambda| r(K) \quad \text{und} \quad \psi_L \circ \rho = \phi \circ \psi_K.$$

Für alle $z \in \Delta_{r(K)}$ und $w \in L$ ergibt sich dann (wegen $\rho(z) \in \Delta_{r(L)}$) einerseits

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^L(w) (\rho(z))^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} F_n^K(w) z^{-n}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n^L(w)(\rho(z))^{-n} &= \frac{\rho(z)\psi'_L(\rho(z))}{\psi_L(\rho(z)) - w} = \frac{z(\psi_L \circ \rho)'(z)}{(\psi_L \circ \rho)(z) - w} \\ &= \frac{z(\phi \circ \psi_K)'(z)}{(\phi \circ \psi_K)(z) - w} = \frac{z\lambda\psi'_K(z)}{a + \lambda\psi_K(z) - w} \\ &= \frac{z\psi'_K(z)}{\psi'_K(z) - \frac{w-a}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^K\left(\frac{w-a}{\lambda}\right)z^{-n} \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert dann die Behauptung (i).

(ii) Wir betrachten den Homöomorphismus

$$\phi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \bar{z}.$$

Somit können wir aus $K^* = \phi(K)$ und $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K^* = \phi(\Omega(K))$ unmittelbar schließen, dass K^* zulässig ist. Ferner stellen wir fest, dass die Abbildung

$$(\phi|_{\Omega(K)}) \circ \psi_K \circ (\phi|_{\Delta_r(K)}): \Delta_r(K) \rightarrow \Omega(K^*), \quad z \mapsto \overline{\psi_K(\bar{z})}$$

biholomorph und normiert ist. Es gilt also

$$r(K^*) = r(K) \quad \text{und} \quad \psi_{K^*} = (\phi|_{\Omega(K)}) \circ \psi_K \circ (\phi|_{\Delta_r(K)}).$$

Für alle $z \in \Delta_r(K)$ und $w \in K^*$ ergibt sich dann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{K^*}(w)z^{-n} = \frac{z\psi'_{K^*}(z)}{\psi_{K^*}(z) - w} = \frac{z\overline{\psi'_K(\bar{z})}}{\overline{\psi_K(\bar{z})} - w} = \frac{\overline{z\psi'_K(\bar{z})}}{\overline{\psi_K(\bar{z})} - \bar{w}} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{F_n^K(\bar{w})}z^{-n}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert auch hier die Behauptung. \square

BEISPIEL 2.24 (Kreisscheibe). Für $w_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ gilt

$$\overline{D(w_0, r)} = w_0 + r\overline{\mathbb{D}}$$

und daher nach Beispiel 2.15 für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$F_n^{\overline{D(w_0, r)}}(w) = r^n F_n^{\overline{\mathbb{D}}}\left(\frac{w - w_0}{r}\right) = (w - w_0)^n, \quad w \in \overline{D(w_0, r)}.$$

3. Eigenschaften der Faberpolynome

In diesem Abschnitt wollen wir einige wichtige Eigenschaften der Faberpolynome zusammenstellen.

3.1. Symmetrieeigenschaften. In vielen interessanten Fällen weisen die zulässigen Kompakta mindestens eine der folgenden Symmetrien auf:

DEFINITION 2.25. Eine kompakte Menge $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ heißt

- **k -fach zentralsymmetrisch**, falls die Menge $\mu_k(\mathbb{C})$ der k -ten Einheitswurzeln in \mathbb{C} durch Multiplikation auf K operiert, d.h. falls

$$\mu_k(\mathbb{C}) \times K \rightarrow K, \quad (\zeta, z) \mapsto \zeta z$$

eine wohldefinierte Abbildung darstellt (vgl. Definition 2.1 in [He94])

- **symmetrisch zur reellen Achse**, falls $K = K^*$ erfüllt ist.

Mit Satz 2.23 ergeben sich dann unmittelbar die folgenden Eigenschaften:

KOROLLAR 2.26. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ zulässig.*

- (i) *Ist K k -fach zentralsymmetrisch, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$*

$$F_n^K(\zeta w) = \zeta^n F_n^K(w), \quad w \in K, \zeta \in \mu_k(\mathbb{C}).$$

Insbesondere verschwinden dann gemäß Lemma A.4 einige der Koeffizienten von F_n^K .

- (ii) *Ist K symmetrisch zur reellen Achse, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$*

$$F_n^K(\bar{w}) = \overline{F_n^K(w)}, \quad w \in K.$$

Insbesondere besitzen dann alle Faberpolynome reelle Koeffizienten.

Beweis. (i) Ist K k -fach zentralsymmetrisch, so gilt $\zeta K = K$ für alle $\zeta \in \mu_k(\mathbb{C})$ und daher nach Satz 2.23

$$F_n^K(w) = F_n^{\zeta K}(w) = \zeta^n F_n^K\left(\frac{w}{\zeta}\right), \quad w \in \zeta K$$

bzw.

$$F_n^K(\zeta w) = \zeta^n F_n^K(w), \quad w \in K.$$

(ii) Ist K symmetrisch zur reellen Achse, so gilt $K^* = K$ und daher nach Satz 2.23

$$F_n^K(w) = F_n^{K^*}(w) = \overline{F_n^K(\bar{w})}, \quad w \in K^*$$

bzw.

$$F_n^K(\bar{w}) = \overline{F_n^K(w)}, \quad w \in K.$$

Der Zusatz ergibt sich unmittelbar durch Koeffizientenvergleich von linker und rechter Seite. \square

Das Resultat 2.26 (i) findet sich etwa als Theorem 2.2 in [He94].

3.2. Wachstumseigenschaften. Von zentraler Bedeutung in der Theorie der Faberpolynome ist es, deren Wachstum kontrollieren zu können. Ein elementares aber oft schon ausreichendes Resultat ist das folgende

LEMMA 2.27. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum. Für alle $r > r(K)$ existiert dann eine Zahl $M(r) > 0$ mit der Eigenschaft, dass*

$$\|F_n^K\|_{K_r} \leq M(r) \cdot r^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

erfüllt ist.

Beweis. Sei $r > r(K)$ beliebig vorgegeben. Zu $w \in \Gamma_r$ können wir die Funktion

$$\widehat{\chi}_K(w, \cdot) : \Delta_{r(K)} \setminus \{\psi_K^{-1}(w)\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{z\psi'_K(z)}{\psi_K(z)-w}, & z \neq \infty \\ 1, & z = \infty \end{cases}$$

betrachten, welche auf Δ_r mit $\chi_{K_r}(w, \cdot)$ übereinstimmt und daher (weil die Holomorphie von $\widehat{\chi}_K(w, \cdot)$ auf $\Delta_{r(K)}^* \setminus \{\psi_K^{-1}(w)\}$ offensichtlich ist) insbesondere auf ganz $\Delta_{r(K)} \setminus \{\psi_K^{-1}(w)\}$ holomorph ist. Wählen wir nun $r(K) < \rho' < r < \rho$ und setzen

$$A(\rho', \rho) := \{z \in \mathbb{C}; \rho' < |z| < \rho\},$$

so ist für $n \in \mathbb{N}_0$ die Funktion

$$h_{n,w} : \Delta_{r(K)}^* \setminus \{\psi_K^{-1}(w)\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \widehat{\chi}_K(w, z) z^{n-1}$$

holomorph und besitzt wegen

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow \psi_K^{-1}(w)} (z - \psi_K^{-1}(w)) \widehat{\chi}_K(w, z) z^{n-1} \\ = & \lim_{z \rightarrow \psi_K^{-1}(w)} \underbrace{\frac{z - \psi_K^{-1}(w)}{\psi_K(z) - \psi_K(\psi_K^{-1}(w))} \psi'_K(z)}_{\rightarrow 1, z \rightarrow \psi_K^{-1}(w)} z^n = (\psi_K^{-1}(w))^n \end{aligned}$$

in $\psi_K^{-1}(w)$ eine Polstelle erster Ordnung mit dem Residuum

$$\text{Res}(h_{n,w}, \psi_K^{-1}(w)) = (\psi_K^{-1}(w))^n.$$

Mit dem Residuensatz erhalten wir für den Greenschen Bereich $A(\rho', \rho)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, \rho)} \widehat{\chi}_K(w, z) z^{n-1} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, \rho')} \widehat{\chi}_K(w, z) z^{n-1} dz \\ = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ A(\rho', \rho)} h_{n,w}(z) dz = \text{Res}(h_{n,w}, \psi_K^{-1}(w)) = (\psi_K^{-1}(w))^n. \end{aligned}$$

Da nach Definition der Abbildungen und wegen $\psi_{K_r} = \psi_K|_{\Delta_r}$ die Identität

$$\widehat{\chi}_K(w, \cdot)|_{\partial D(0, \rho)} = \chi_{K_r}(w, \cdot)|_{\partial D(0, \rho)}$$

gilt, erhalten wir unter Beachtung von Bemerkung 2.11 und Korollar 2.16 aus obiger Rechnung

$$\begin{aligned} F_n^K(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, \rho)} \chi_{K_r}(w, z) z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, \rho)} \widehat{\chi}_K(w, z) z^{n-1} dz \\ &= (\psi_K^{-1}(w))^n + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, \rho')} \widehat{\chi}_K(w, z) z^{n-1} dz. \end{aligned}$$

Beachten wir weiter, dass $\widehat{\chi}_K$ auf der kompakten Menge $\Gamma_r \times \partial D(0, \rho')$ stetig ist, so erhalten wir

$$M(r) := 1 + \|\widehat{\chi}_K\|_{\Gamma_r \times \partial D(0, \rho')} < \infty$$

und damit

$$\begin{aligned}
|F_n^K(w)| &= \left| (\psi_K^{-1}(w))^n + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, \rho')} \widehat{\chi}_K(w, z) z^{n-1} dz \right| \\
&\leq \underbrace{|\psi_K^{-1}(w)|^n}_{=r^n} + \|\widehat{\chi}_K(w, \cdot)\|_{\partial D(0, \rho')} \cdot (\rho')^n \\
&\leq (1 + \|\widehat{\chi}_K\|_{\Gamma_r \times \partial D(0, \rho')}) \cdot r^n = M(r) \cdot r^n
\end{aligned}$$

Da $w \in \Gamma_r$ beliebig vorgegeben war, erhalten wir

$$\|F_n^K\|_{\Gamma_r} \leq M(r) \cdot r^n,$$

sodass sich schließlich unter Verwendung des Maximumprinzips

$$\|F_n^K\|_{K_r} \leq M(r) \cdot r^n$$

ergibt, womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Mit einem erheblich höheren Aufwand lassen sich auch schärfere Abschätzungen beweisen. So zeigte Ch. Pommerenke in seiner 1964 erschienenen Arbeit **[Pom64]**, dass

SATZ 2.28 (Satz 2 in **[Pom64]**). *Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum mit $r(K) = 1$. Dann gilt*

$$\log(n) < \max_{w \in K} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} |F_k^K(w)|^2 < 4 \log(n) + 8$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die hierdurch gegebene Abschätzung ist optimal in dem Sinne, dass auf der linken bzw. rechten Seite kein konstanter Faktor > 1 bzw. < 1 hinzugefügt werden kann.

und in der gleichen Arbeit unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass das zulässige Kompaktum konvex ist, dass

SATZ 2.29 (Satz 3 in **[Pom64]**). *Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein konvexes zulässiges Kompaktum mit $r(K) = 1$. Dann gelten die Abschätzungen*

$$1 \leq \|F_n^K\|_K \leq 2.$$

In der 1966 veröffentlichten Arbeit **[KP67]** von T. Kövari und Ch. Pommerenke wird hierzu die folgende Verschärfung angegeben:

SATZ 2.30 (Theorem 1 in **[KP67]**). *Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum mit $r(K) = 1$. Dann finden wir $A > 0$ und $\alpha < \frac{1}{2}$, sodass*

$$\|F_n^K\|_K \leq An^\alpha$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

3.3. Faberentwicklung. Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, so lässt sich f bekanntlich auf jeder Kreisscheibe $D(z_0, r)$ mit $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$ in eine auf $\overline{D(z_0, r)}$ gleichmäßig absolut konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad z \in \overline{D(z_0, r)}$$

entwickeln, wobei sich die Koeffizienten gemäß der Formel

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r)} \frac{f(z_0 + z)}{z^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

berechnen. Beachten wir Beispiel 2.24, so stellen wir fest, dass hierdurch im Wesentlichen eine Entwicklung nach den Faberpolynomen für $\overline{D(z_0, r)}$ angegeben wird. Dieses Resultat lässt sich wie folgt verallgemeinern:

SATZ 2.31 (Faberentwicklung, Abschnitt 5 in [Cur71]). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Ist $K \subset \Omega$ ein zulässiges Kompaktum, so existiert ein $r_* > r(K)$, sodass $K_r \subset \Omega$ für alle $r(K) < r < r_*$ erfüllt ist.*

Für alle $r(K) < r < r_$ lässt sich f auf K_r in eine gleichmäßig absolut konvergente Reihe der Form*

$$(2.6) \quad f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^K(f) F_n^K(w) \quad \text{für alle } w \in K_r,$$

entwickeln, wobei sich die Koeffizienten gemäß

$$(2.7) \quad c_n^K(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r_*)} \frac{f(\psi_K(z))}{z^{n+1}} dz \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

berechnen lassen.

Zum Beweis (welcher sich in ähnlicher Form auch in Abschnitt 3.2 von [Sue98] findet) benötigen wir allerdings etwas Vorbereitung. Wir zeigen zunächst das folgende Lemma, welches uns beim Umgang mit Wegintegralen behilflich sein wird.

LEMMA 2.32. *Sei Γ eine geschlossene Kurve mit C^1 -Parametrisierung $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ und sei ψ eine in einer offenen Umgebung von $\text{Spur}(\Gamma)$ holomorphe Funktion. Ist $f : \psi(\text{Spur}(\Gamma)) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so gilt*

$$\int_{\psi(\Gamma)} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(\psi(z)) \psi'(z) dz.$$

Beweis. Wir rechnen hierfür nach

$$\begin{aligned}
\int_{\psi(\Gamma)} f(z)dz &= \int_{\psi \circ \gamma} f(z)dz \\
&= \int_0^{2\pi} f((\psi \circ \gamma)(t))(\psi \circ \gamma)'(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} f(\psi(\gamma(t)))\psi'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_{\gamma} f(\psi(z))\psi'(z)dz \\
&= \int_{\Gamma} f(\psi(z))\psi'(z)dz,
\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Darüber hinaus klären wir noch einige topologische Eigenschaften der in Definition 2.9 eingeführten Objekte.

LEMMA 2.33. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum.*

(i) *Für alle $r(K) < r_1 < r_2$ gilt*

$$n(\Gamma_{r_2}, w) = 1 \quad \text{für alle } w \in K_{r_1}.$$

(ii) *Durch $(\text{int}(\Gamma_\rho))_{r(K) < \rho < r}$ ist eine offene Überdeckung von $\text{int}(\Gamma_r)$ gegeben. Genauer gilt*

$$\bigcup_{r(K) < \rho < r} \text{int}(\Gamma_\rho) = \text{int}(\Gamma_r).$$

(iii) *Ist $L \subset \mathbb{C}$ kompakt mit*

$$L \subset \text{int}(\Gamma_r),$$

so existiert ein $r(K) < \rho < r$ mit

$$L \subset \text{int}(\Gamma_\rho).$$

(iv) *Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen mit $K \subset \Omega$, so existiert ein $r_* > r(K)$, sodass $\Gamma_r \subset \Omega$ für alle $r(K) < r < r_*$ erfüllt ist.*

Beweis. (i) Es seien also $r(K) < r_1 < r_2$ beliebig vorgegeben. Bezeichnen wir mit (U_1, ϕ_1) die Karte aus Beispiel 1.7 (c), so erhalten wir durch $\psi := \psi_K \circ \phi_1^{-1}|_{D(0, \frac{1}{r(K)})}$ eine auf der offenen Umgebung $D(0, \frac{1}{r(K)})$ von $\partial_+ D(0, \frac{1}{r_2})$ holomorphe Abbildung. Weil nun die Orientierung der Kurven offenbar durch

$$\psi\left(\partial_+ D\left(0, \frac{1}{r_2}\right)\right) = \psi_K(-\partial_+ D(0, r_2)) = -\Gamma_{r_2}$$

bestimmt ist, können wir uns mit Lemma 2.32 davon überzeugen, dass für alle $w \in K_{r_1}$

$$\begin{aligned} n(\Gamma_{r_2}, w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r_2}} \frac{1}{z-w} dz \\ &\stackrel{\text{Lemma 2.32}}{=} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r_2)} \frac{\psi'(z)}{\psi(z)-w} dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, \frac{1}{r_2})} \frac{h'_w(z)}{h_w(z)} dz \end{aligned}$$

mit der durch

$$h_w : D\left(0, \frac{1}{r(K)}\right) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \psi(z) - w$$

definierten holomorphen Funktion gilt. Da h_w auf $\overline{D(0, \frac{1}{r_2})}$ offenbar nullstellenfrei ist und in 0 eine Polstelle erster Ordnung besitzt, ergibt sich nach dem Argumentprinzip A.1

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, \frac{1}{r_2})} \frac{h'_w(z)}{h_w(z)} dz = -1$$

und damit wie gewünscht

$$n(\Gamma_{r_2}, w) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, \frac{1}{r_2})} \frac{h'_w(z)}{h_w(z)} dz = 1.$$

(ii) Sei $z \in \text{int}(\Gamma_r)$ beliebig vorgegeben. Gilt $z \in K$, so ist $z \in \text{int}(\Gamma_\rho)$ für alle $r(K) < \rho < r$. Ist $z \notin K$, d.h. $z \in \Omega(K) \cap \text{int}(\Gamma_r)$, so ist $\psi_K^{-1}(z) \in \Delta_{r(K)} \cap D(0, r)$ und damit $z \in \text{int}(\Gamma_\rho)$ für alle $|\psi_K^{-1}(z)| < \rho < r$. Zusammenfassend erhalten wir

$$\text{int}(\Gamma_r) \subseteq \bigcup_{r(K) < \rho < r} \text{int}(\Gamma_\rho),$$

wonach die Familie $(\text{int}(\Gamma_\rho))_{r(K) < \rho < r}$ in der Tat eine offene Überdeckung von $\text{int}(\Gamma_r)$ liefert. Da nach (i) offenbar auch die umgekehrte Inklusion

$$\bigcup_{r(K) < \rho < r} \text{int}(\Gamma_\rho) \subseteq \text{int}(\Gamma_r)$$

gilt, folgt auch die Gültigkeit des Zusatzes in (ii).

(iii) Sei L eine kompakte Teilmenge von $\text{int}(\Gamma_r)$. Da $(\text{int}(\Gamma_\rho))_{r(K) < \rho < r}$ nach (ii) eine offene Überdeckung von $\text{int}(\Gamma_r)$ und damit von L darstellt, finden wir $\rho_1, \dots, \rho_n \in (r(K), r)$ mit der Eigenschaft

$$L \subset \bigcup_{j=1}^n \text{int}(\Gamma_{\rho_j}).$$

Setzen wir dann

$$\rho := \max_{j=1,\dots,n} \rho_j,$$

so erhalten wir nach (i) unmittelbar $L \subset \text{int}(\Gamma_\rho)$, womit die Behauptung (iii) bewiesen ist.

(iv) Sei also Ω eine beliebige offene Obermenge von K . Wir halten fest, dass damit $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ wegen $K \subset \Omega$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\Omega(K)$ und daher $\psi_K^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\Delta_{r(K)}$ darstellt. Insbesondere sind also die abgeschlossene Menge $\psi_K^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ und die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D(0, r(K))}$ disjunkt, weshalb wir ein $r_* > r(K)$ wählen können, sodass auch noch $D(0, r_*)$ zu $\psi_K^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ disjunkt ist (man erinnere sich daran, dass $\widehat{\mathbb{C}}$ einen normalen topologischen Raum darstellt). Für alle $r(K) < r < r_*$ gilt also

$$\Gamma_r = \psi_K(\partial D(0, r)) \subset \Omega(K) \setminus (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega) \subseteq \Omega,$$

womit auch die Aussage (iv) gezeigt ist. \square

Damit nehmen wir nun in Angriff:

Beweis von Satz 2.31. (i) Wir halten zunächst fest, dass wir nach Lemma 2.33 (iv) ein $r_* > r(K)$ finden können, sodass $\Gamma_r = \psi_K(\partial D(0, r)) \subset \Omega$ für alle $r(K) < r < r_*$ erfüllt ist.

(ii) Weiter halten wir fest, dass sich nach Lemma 2.33 (i) die Windungszahl

$$(2.8) \quad n(\Gamma_{r_*}, w) = 1 \quad \text{für alle } w \in K_r$$

für alle $r(K) < r < r_*$ ergibt.

(iii) Wählen wir nun $r(K) < r < r_*$, so erhalten wir für $w \in K_r$ mit der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r_*}} \frac{f(z)}{z-w} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\psi_K(\partial_+ D(0, r_*))} \frac{f(z)}{z-w} dz \\ &\stackrel{\text{Lemma 2.32}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r_*)} \frac{f(\psi_K(z))}{\psi_K(z)-w} \psi'_K(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r_*)} \frac{f(\psi_K(z))}{z} \cdot \frac{z\psi'_K(z)}{\psi_K(z)-w} dz. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.11 und Korollar 2.16 ist die Laurententwicklung

$$\frac{z\psi'_K(z)}{\psi_K(z)-w} = \chi_{K_r}(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^K(w) z^{-n}$$

auf $\partial D(0, r_*)$ gleichmäßig absolut konvergent. Es folgt also

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r_*)} \frac{f(\psi_K(z))}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n^K(w) z^{-n} \right) dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r_*)} \frac{f(\psi_K(z))}{z^{n+1}} dz \right) F_n^K(w), \end{aligned}$$

und damit die in (2.6) behauptete Darstellung.

(iv) Sei nun $r > r(K)$ gegeben, sodass $\Gamma_r = \psi_K(\partial D(0, r)) \subset \Omega$ erfüllt ist und sei L eine beliebige kompakte Teilmenge von $\text{int}(\Gamma_r)$. Wir können dann nach Lemma 2.33 (iii) ein $r > \tilde{r} > r(K)$ wählen, sodass noch $L \subset \text{int}(\Gamma_{\tilde{r}})$ erfüllt ist. Wir schätzen in (2.7) für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$|c_n^K(f)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r)} \frac{f(\psi_K(z))}{z^{n+1}} dz \right| \leq \|f\|_{\Gamma_r} \cdot \frac{1}{r^n}$$

ab und beachten ferner, dass es nach Lemma 2.27 eine von n unabhängige Konstante $M(\tilde{r}) > 0$ gibt mit

$$\|F\|_{\Gamma_{\tilde{r}}} \leq M(\tilde{r}) \cdot \tilde{r}^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit erhalten wir nach dem Maximumprinzip

$$\|c_n^K(f) F_n^K\|_L \leq |c_n^K(f)| \|F_n^K\|_{\Gamma_{\tilde{r}}} \leq M(\tilde{r}) \|f\|_{\Gamma_r} \cdot \left(\frac{\tilde{r}}{r} \right)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$, weshalb die Reihe (2.6) nach dem Majorantenkriterium auf L gleichmäßig absolut konvergiert. \square

3.4. Faberpolynome als „verallgemeinerte Monome“. Das obige Resultat 2.31 steht exemplarisch dafür, dass in einem gewissen Sinne den Faberpolynomen bei einem zulässigen Kompaktum die gleiche Bedeutung zukommt, wie den Monomen $e_n : z \mapsto z^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ bei der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D}(0, r)$ mit $r > 0$. Dieses Phänomen zeigt sich auch in den verschiedensten Bereichen der Funktionalanalysis, etwa in der folgenden Situation:

Sei $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|)$ eine komplexe Banachalgebra mit Einselement $1_{\mathfrak{A}}$ und sei $a \in \mathfrak{A}$. Bekanntlich ist das Spektrum $\sigma_{\mathfrak{A}}(a)$ von a genau dann in

$$B(0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$$

für $r \geq 0$ enthalten, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r$$

erfüllt ist (vgl. etwa Satz IX.1.3 in [Wer07]). Hierfür konnten A. Atzmon, A. Eremenko und M. Sodin in ihrer Arbeit [AES99] die folgende Verallgemeinerung angeben:

SATZ 2.34 (Theorem 1 in [AES99]). Sei $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|)$ eine komplexe Banachalgebra mit Einselement $1_{\mathfrak{A}}$ und sei $a \in \mathfrak{A}$. Genau dann gilt $\sigma_{\mathfrak{A}}(a) \subseteq K$, wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|F_n^K(a)\|^{\frac{1}{n}} \leq r(K)$$

erfüllt ist.

An dieser Stelle sei darüber hinaus noch auf die Arbeiten [Has97] und [BG08] verwiesen.

3.5. Alternative Definitionen. Während wir bei der Einführung der Faberpolynome den Zugang über ihre charakteristische Funktion gewählt haben, finden sich in der gängigen Literatur einige weitere Definitionsmöglichkeiten. Eine erste derartige Variante liefert der folgende

SATZ 2.35. Sei $K \subset \mathbb{C}$ zulässig. Wir setzen $\phi_K := \psi_K^{-1}$. Dann ist F_n^K der Hauptteil der Laurententwicklung von ϕ_K^n um ∞ .

Beweis. Für $n = 0$ ist die obige Behauptung klarerweise richtig. Sei also nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben. Wir wählen ein $r > r(K)$ und betrachten zu $z \in \text{int}(\Gamma_r)$ das folgende Integral

$$I_n(r, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{\phi_K(w)^n}{w - z} dw.$$

(i) Da K_r kompakt ist, finden wir $R > R' > 0$, sodass $K_r \subset D(0, R') \subset D(0, R)$ und damit auch $\partial D(0, R) \subset \Delta_{R'} \subset \Omega(K_r)$ erfüllt ist. Auf der offenen Umgebung $\Delta_{R'}$ von ∞ besitzt die holomorphe Funktion $\phi_K^n : \Omega(K) \rightarrow \Delta_{r(K)}$ eine Laurentreihenentwicklung, welche auf der kompakten Menge $\partial D(0, R)$ gleichmäßig absolut konvergiert². Wir können also ϕ_K^n auf $\Delta_{R'}$ als $\phi_K^n|_{\Delta_{R'}} = H_n + N_n$ in den Hauptteil $H_n : \Delta_{R'} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ und den Nebenteil $N_n : \Delta_{R'} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $N_n(\infty) = 0$ zerlegen. Beachten wir, dass H_n wegen

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\phi_K(w)}{w} = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{\psi_K(w)} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\phi_K(w)^n}{w^n} = 1$$

ein (normiertes) Polynom vom Grad n sein muss, so erhalten wir mit der Cauchyschen Integralformel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, R)} \frac{H_n(w)}{w - z} dw = H_n(z).$$

Führen wir zudem die offensichtlich holomorphe Funktion

$$g_n(z, \cdot) : D\left(0, \frac{1}{R'}\right) \rightarrow \mathbb{C}, \quad w \mapsto \frac{N_n(\phi_1^{-1}(w))}{1 - wz}$$

²Man wählt hierzu die Kartenumgebung (U_1, ϕ_1) aus Beispiel 1.7 (c) und entwickelt die holomorphe Funktion $\phi_K^n \circ (\phi_1^{-1}|_{D(0, \frac{1}{R'}) \setminus \{0\}}) : D(0, \frac{1}{R'}) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ um ihre Polstelle 0 in eine auf $D(0, \frac{1}{R'}) \setminus \{0\}$ kompakt konvergente Laurentreihe.

ein, so können wir mit Lemma 2.32 und der Cauchyschen Integralformel nachrechnen, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0,R)} \frac{N_n(w)}{w-z} dw &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_1^{-1}(\partial_+ D(0, \frac{1}{R}))} \frac{N_n(w)}{w-z} dw \\
&\stackrel{\text{Lemma 2.32}}{=} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, \frac{1}{R})} \frac{N_n(\phi_1^{-1}(w))}{\phi_1^{-1}(w) - z} (\phi_1^{-1})'(w) dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, \frac{1}{R})} \frac{N_n(\phi_1^{-1}(w))}{1-wz} \frac{1}{w} dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, \frac{1}{R})} \frac{g_n(z, w)}{w} dw \\
&= g_n(z, 0) = N_n(\infty) = 0
\end{aligned}$$

gilt. Zusammenfassend ist also

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0,R)} \frac{\phi_K^n(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0,R)} \frac{H_n(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0,R)} \frac{N_n(w)}{w-z} dw \\
&= H_n(z),
\end{aligned}$$

womit sich nach dem Cauchyschen Integralsatz schließlich

$$I_n(r, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{\phi_K(w)^n}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0,R)} \frac{\phi_K^n(w)}{w-z} dw = H_n(z)$$

ergibt.

(ii) Unter erneuter Ausnutzung von Lemma 2.32 und Bemerkung 2.12 erhalten wir andererseits

$$\begin{aligned}
I_n(r, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{\phi_K(w)^n}{w-z} dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\psi_K(\partial_+ D(0,r))} \frac{\phi_K(w)^n}{w-z} dw \\
&\stackrel{\text{Lemma 2.32}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0,r)} \frac{\xi^n \psi'_K(\xi)}{\psi_K(\xi) - z} d\xi \\
&\stackrel{\text{Bemerkung 2.12}}{=} F_n^K(z).
\end{aligned}$$

Vergleichen wir nun die Ergebnisse (i) und (ii), so folgt

$$H_n(z) = I_n(r, z) = F_n^K(z)$$

und damit die Behauptung. \square

Dieser Zugang wird beispielsweise in der Übersichtsarbeit [Cur71] gewählt. Am Beweis zu Satz 2.35 erkennt man zudem, dass diese Definition der Faberpolynome nahe an unserer in 2.14 liegt.

Einen weiteren, meiner Meinung nach nicht weniger überraschenden Zugang zur Theorie der Faberpolynome eröffnet dieser

SATZ 2.36. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ zulässig. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine holomorphe Funktion $f_n^K : D(0, \frac{1}{r(K)}) \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft*

$$(F_n^K \circ \psi_K)(z) = z^n + \frac{1}{z} f_n^K \left(\frac{1}{z} \right), \quad z \in \Delta_{r(K)}^*.$$

Beweis. Sei also $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig vorgegeben. Im Beweis zu Lemma 2.27 hatten wir zu $r > r(K)$ und $w \in \Gamma_r$ die Gleichung

$$F_n^K(w) = (\psi_K^{-1}(w))^n + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, \rho')} \widehat{\chi}_K(w, z) z^{n-1} dz$$

für ein beliebiges $r(K) < \rho' < r$ hergeleitet, wobei wir mit $\widehat{\chi}_K(w, \cdot)$ die Funktion

$$\widehat{\chi}_K(w, \cdot) : \Delta_{r(K)} \setminus \{\psi_K^{-1}(w)\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{z\psi'_K(z)}{\psi_K(z)-w}, & z \neq \infty \\ 1, & z = \infty \end{cases}$$

bezeichnet hatten. Umgekehrt erhalten wir also bei festem $\rho' > r(K)$ die Darstellung

$$(F_n^K \circ \psi_K)(z) = z^n + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, \rho')} \frac{\psi'_K(\xi)}{\psi_K(\xi) - \psi_K(z)} \xi^n d\xi$$

für alle $z \in \Delta_{\rho'}^*$. Hierbei ist durch

$$h_n : \Delta_{\rho'}^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, \rho')} \frac{\psi'_K(\xi)}{\psi_K(\xi) - \psi_K(z)} \xi^n d\xi$$

eine offensichtlich holomorphe Funktion gegeben, welche sich wegen

$$(2.9) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} h_n(z) = 0$$

nach dem Riemannsches Hebbarkeitssatz 1.8 durch $h_n(\infty) = 0$ zu einer holomorphen Funktion $h_n : \Delta_{\rho'} \rightarrow \mathbb{C}$ fortsetzen lässt. Für den Nachweis von (2.9) bemerken wir zunächst, dass wegen $\psi_K(\infty) = \infty$ ein $R > \rho'$ existiert mit

$$|\psi_K(z)| > 2\|\psi_K\|_{\partial D(0, \rho')} \quad \text{für alle } z \in \Delta_R^*.$$

Für alle $z \in \Delta_R^*$ ergibt sich damit

$$\left| |\psi_K(\xi)| - |\psi_K(z)| \right| \geq |\psi_K(z)| - \|\psi_K\|_{\partial D(0, \rho')} \geq \frac{1}{2} |\psi_K(z)|, \quad \xi \in \partial D(0, \rho')$$

und weiter

$$\sup_{\xi \in \partial D(0, \rho')} \left| \frac{\psi'_K(z)}{\psi_K(\xi) - \psi_K(z)} \right| \leq 2\|\psi'_K\|_{\partial D(0, \rho')} \frac{1}{|\psi_K(z)|}.$$

Folglich ist für alle $z \in \Delta_R^*$ auch

$$|h_n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, \rho')} \frac{\psi'_K(\xi)}{\psi_K(\xi) - \psi_K(z)} \xi^n d\xi \right| \leq 2(\rho')^{n+1} \|\psi'_K\|_{\partial D(0, \rho')} \frac{1}{|\psi_K(z)|},$$

woraus sich wegen $\lim_{z \rightarrow \infty} \psi_K(z) = \infty$ schließlich die behauptete Gleichung (2.9) ergibt.

Darüber hinaus stimmt h_n auf $\Delta_{r'}^*$ mit der holomorphen Funktion

$$\Delta_{r(K)}^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto (F_n^K \circ \psi_K)(z) - z^n$$

überein, sodass sich h_n hierdurch zu einer holomorphen Funktion auf ganz $\Delta_{r(K)}$ fortsetzen lässt. Diese hat dann die Eigenschaft

$$(F_n^K \circ \psi_K)(z) = z^n + h_n(z), \quad z \in \Delta_{r(K)}^*.$$

Bezeichnen wir nun mit (U_1, ϕ_1) die Karte aus Beispiel 1.7 (c), so erhalten wir durch $g_n := h_n \circ (\phi_1^{-1}|_{D(0, \frac{1}{r(K)}})$ eine holomorphe Funktion $g_n : D(0, \frac{1}{r(K)}) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g_n(0) = 0$. Nach dem klassischen Riemannschen Hebbarkeitssatz stellt somit auch

$$f_n^K : D\left(0, \frac{1}{r(K)}\right) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{g_n(z)}{z}, & z \neq 0 \\ g_n'(0), & z = 0 \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion dar. Diese erfüllt nun für alle $z \in \Delta_{r(K)}^*$

$$(F_n^K \circ \psi_K)(z) = z^n + h_n(z) = z^n + g_n\left(\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z} f_n^K\left(\frac{1}{z}\right),$$

womit die Behauptung bewiesen ist. \square

DEFINITION 2.37. Ist $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum und ist $n \in \mathbb{N}_0$, so besitzt die **Faberfunktion** $F_n^K \circ \psi_K : \Delta_{r(K)}^* \rightarrow \mathbb{C}$ eine Reihendarstellung der Form (durch Entwicklung der Funktion f_n^K in ihre Taylorreihe um 0)

$$(F_n^K \circ \psi_K)(z) = z^n + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n,k} z^{-k}, \quad z \in \Delta_{r(K)}^*.$$

Die hierdurch eindeutig bestimmten Entwicklungskoeffizienten $\alpha_{n,k}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ heißen die **Faberkoeffizienten für K** oder auch **Grunskykoeffizienten**.

Da die Grunskykoeffizienten im Folgenden keine Rolle spielen werden, verzichten wir hier auf eine Darstellung ihrer umfangreichen Theorie und verweisen stattdessen auf die entsprechenden Abschnitte in [Sue98].

Der obige Satz 2.36 besagt also, dass die Faberpolynome eines zulässiges Kompaktums $K \subset \mathbb{C}$ der Bedingung

$$(2.10) \quad (F_n^K \circ \psi_K)(z) = z^n + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

genügen. Wir zeigen nun, dass die Faberpolynome hierdurch sogar eindeutig bestimmt sind.

LEMMA 2.38. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum. Ist P ein komplexes holomorphes Polynom vom Grad $\deg(P) = n$, welches der Bedingung*

$$(P \circ \psi_K)(z) = z^n + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty$$

genügt, so gilt bereits $P = F_n^K$.

Beweis. Sei also P ein komplexes holomorphes Polynom vom Grad n , welches die Forderung

$$(P \circ \psi_K)(z) = z^n + O\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{für } z \rightarrow \infty$$

des Satzes erfüllt. Dann folgt wegen

$$\phi_K(w) \rightarrow \infty \quad \text{für } w \rightarrow \infty,$$

dass

$$P(w) = \phi_K(w)^n + O\left(\frac{1}{\phi_K(w)}\right) \quad \text{für } w \rightarrow \infty.$$

Da sich nach Satz 2.35

$$\phi_K(w)^n = F_n^K(w) + O\left(\frac{1}{w}\right) \quad \text{für } w \rightarrow \infty$$

und ferner aufgrund von

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{\phi_K(w)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi_K(z)}{z} = 1$$

auch

$$\frac{1}{\phi_K(w)} = O\left(\frac{1}{w}\right) \quad \text{für } w \rightarrow \infty$$

ergibt, erhalten wir weiter

$$P(w) = F_n^K(w) + O\left(\frac{1}{w}\right) \quad \text{für } w \rightarrow \infty,$$

bzw.

$$P(w) - F_n^K(w) = O\left(\frac{1}{w}\right) \quad \text{für } w \rightarrow \infty.$$

Für das Polynom $P - F_n^K$ ist dies nach dem Satz von Liouville aber nur dann möglich, wenn $P = F_n^K$ gilt, womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Die Forderung (2.10) liefert den angekündigten zweiten alternativen Zugang zur Theorie der Faberpolynome.

4. Beispiele

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir in einigen Fällen bereits konkrete Beispiele für Faberpolynome gesehen:

- Für die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D}(z_0, r)$ mit $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ in Beispiel 2.24.
- Für die Ellipsen E_r mit $r > 1$ bzw. das Intervall $E = [-2, 2]$ in Beispiel 2.20.
- Für die Hypocycloide H_n mit n -Spitzen in Beispiel 2.19.
- Für die „Bratwurst“-Mengen in Beispiel 2.22.

Darüber hinaus finden sich in der Literatur noch weitere bemerkenswerte Beispiele, von denen ich einige zum Abschluss dieses Kapitels vorstellen möchte.

BEISPIEL 2.39 (klassische Lemniskate). Wir betrachten die (klassische) Lemniskate (vgl. Abbildung 2.5)

$$L := \{z \in \mathbb{C}; |z^2 - 1| \leq 1\}.$$

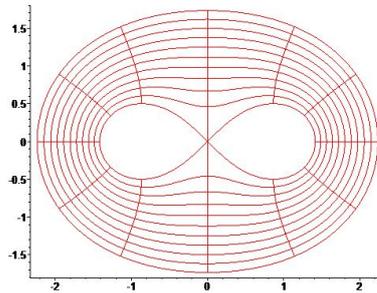


ABBILDUNG 2.5. ψ_L zur klassischen Lemniskaten L

Der Arbeit [Fab03] von G. Faber können wir entnehmen, dass (in unserer Notation und Sprechweise) die Lemniskate L ein zulässiges Kompaktum mit dem transfiniten Durchmesser $r(L) = 1$ darstellt und die zugehörige biholomorphe Abbildung durch

$$\psi_L : \Delta_1 \rightarrow \Omega(L), \quad z \mapsto z\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}$$

gegeben ist. Zur Bestimmung der Faberpolynome wählen wir allerdings einen von seiner Vorgehensweise abweichenden Weg: Wir bestimmen mit der Produktregel zunächst

$$\psi'_L(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}} \quad \text{für alle } z \in \Delta_1^*$$

und rechnen für alle $w \in L$ und alle $z \in \Delta_1^*$ nach

$$\begin{aligned} \frac{z\psi'_L(z)}{\psi_L(z) - w} &= \frac{z \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}}}{z\sqrt{1+\frac{1}{z^2}} - w^2} = \frac{z \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}} \left(z\sqrt{1+\frac{1}{z^2}} + w \right)}{z^2 + 1 - w} \\ &= \left(1 + \frac{w}{z\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}} \right) \frac{1}{1 - \frac{w^2-1}{z^2}} \\ &= \left(1 + \frac{w}{z\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (w^2 - 1)^n \frac{1}{z^{2n}}, \end{aligned}$$

wobei wir für die Konvergenz der geometrischen Reihe beachten, dass $|w^2-1| \leq 1 < |z|^2$ für $w \in L$ und $z \in \Delta_1^*$ erfüllt ist. Benutzen wir weiter die kompakt konvergente Laurentreihenentwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!} \frac{1}{z^{2k}}, \quad z \in \Delta_1^*,$$

wobei wir das durch

$$(\alpha)_k := \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1), & k \in \mathbb{N} \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definierte Pochhammersymbol verwendet haben, so erhalten wir mit dem Cauchyprodukt kompakt konvergenter Reihen

$$\begin{aligned} \frac{z\psi'_L(z)}{\psi_L(z) - w} &= \left(1 + \frac{w}{z\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (w^2 - 1)^n \frac{1}{z^{2n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (w^2 - 1)^n \frac{1}{z^{2n}} + \frac{w}{z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!} \frac{1}{z^{2k}} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (w^2 - 1)^n \frac{1}{z^{2n}} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (w^2 - 1)^n \frac{1}{z^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(w \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!} (w^2 - 1)^{n-k} \right) \frac{1}{z^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Gemäß Definition 2.14 besitzen damit die Faberpolynome zu L die Gestalt

$$\begin{aligned} F_{2n}^L(w) &= (w^2 - 1)^n \\ F_{2n+1}^L(w) &= w \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!} (w^2 - 1)^{n-k} \end{aligned}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$. So ergibt sich etwa

$$\begin{aligned} F_0^L(w) &= 1 \\ F_1^L(w) &= w \\ F_2^L(w) &= w^2 - 1 \\ F_3^L(w) &= w^3 - \frac{3}{2}w \\ F_4^L(w) &= w^4 - 2w^2 + 1 \\ F_5^L(w) &= w^5 - \frac{5}{2}w^3 + \frac{15}{8}w \\ F_6^L(w) &= w^6 - 3w^4 + 3w^2 - 1 \\ F_7^L(w) &= w^7 - \frac{7}{2}w^5 + \frac{35}{8}w^3 - \frac{35}{16}w \end{aligned}$$

BEISPIEL 2.40 (Linsen). In [He95] behandelt M. He kreisförmige Linsen D_α mit $0 < \alpha \leq 2$, welche zur reellen Achse symmetrisch sind und deren äußerer Öffnungswinkel in den Punkten $\pm\alpha$ den Wert $\pi\alpha$ hat.

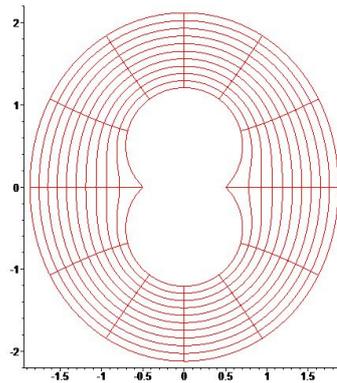


ABBILDUNG 2.6. ψ_{D_α} für $\alpha = \frac{1}{2}$

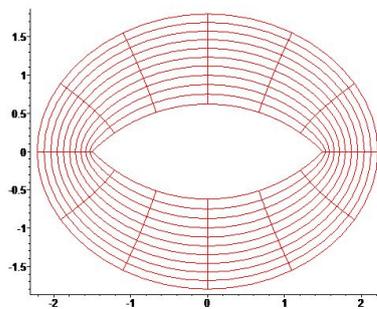


ABBILDUNG 2.7. ψ_{D_α} für $\alpha = \frac{3}{2}$

Hierzu gibt er die zugehörige normierte biholomorphe Abbildung

$$\psi_{D_\alpha} : \Delta_1 \rightarrow \Omega(D_\alpha), \quad z \mapsto \alpha \frac{1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^\alpha}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^\alpha}$$

an, womit insbesondere $r(D_\alpha) = 1$ gezeigt ist, und gibt eine explizite Formel für die Koeffizienten in der Laurentreihenentwicklung um ∞ an (Theorem 1 in [He95]). Mit deren Hilfe leitet er die folgende Darstellung der Faberpolynome her (Theorem 2 in [He95]): Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$F_n^{D_\alpha}(w) = \sum_{j=0}^n \frac{-4}{\alpha^{n-j-1}} D_n(j) w^{n-j},$$

wobei

$$D_n(j) := \begin{cases} C_0(j) + C_2(j) + \cdots + C_n(j), & n \text{ gerade} \\ C_1(j) + C_3(j) + \cdots + C_n(j), & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$C_n(j) := \sum_{r=0}^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-j-1}{i} (-1)^i a_r(i) \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n+j+1}{i} a_{n-r}(i) \right)$$

und

$$a_r(i) := \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{\alpha i}{k} \binom{-\alpha i}{r-k}$$

gilt.

BEISPIEL 2.41 (Kreissektoren). In ihrer Arbeit [GHO92] geben K. Gattermann, Ch. Hoffmann und G. Opfer aufbauend auf die Arbeit [CS87] von J. P. Coleman and R. A. Smith einen Algorithmus zur Berechnung der Faberpolynome zu Kreissektoren

$$S_\alpha := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1, |\arg(z)| \leq \alpha\} \quad \text{mit } 0 \leq \alpha \leq \pi$$

an. Insbesondere wird auf die bemerkenswerte Formel

$$r(S_\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{(2-\frac{\alpha}{\pi})^2} \left(\frac{\pi}{\alpha} (2 - \frac{\alpha}{\pi})\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}, & \alpha \neq 0 \\ \frac{1}{4}, & \alpha = 0 \end{cases}$$

hingewiesen.

BEISPIEL 2.42 (Kreisringsektoren). Für Kreisringsektoren, also Mengen der Gestalt

$$Q(R, \theta) := \{z \in \mathbb{C}; R \leq |z| \leq 1, \theta \leq |\arg(z)| \leq \pi\}$$

mit $\theta \in (0, \pi]$ und $R \in (0, 1)$, konstruieren J. P. Coleman und N. J. Myers in [CM95] die biholomorphe Abbildung $\psi_{Q(R, \theta)} : \Delta_{r(Q(R, \theta))} \rightarrow \Omega(Q(R, \theta))$, bestimmen den transfiniten Durchmesser $r(Q(R, \theta))$ und geben eine Rekursion für die Koeffizienten in Laurentreihenentwicklung von $\psi_{Q(R, \theta)}$ um ∞ an.

BEISPIEL 2.43 (m -Stern). In [BH94] leiten J. Bartolomeo und M. He eine explizite Formel für die Faberpolynome zum m -Stern

$$S_m := \{t\zeta; \zeta \in \mu_m(\mathbb{C}), t \in [0, 4^{\frac{1}{m}}]\}$$

für $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ her. Ausgehend von der biholomorphen Abbildung (die m -te Wurzel ist hierbei über den Hauptzweig des Logarithmus definiert)

$$\psi_{S_m} : \Delta_1 \rightarrow \Omega(S_m), w \mapsto w \left(1 + \frac{1}{w^m}\right)^{\frac{2}{m}}$$

(womit insbesondere $r(S_m) = 1$ gezeigt ist) beweisen sie für $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$F_n^{S_m}(w) = \frac{2n}{m} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} (-1)^j \frac{\Gamma(\frac{2n}{m} - j)}{\Gamma(\frac{2n}{m} - j + 1)j!} w^{n-mj},$$

wobei mit Γ die Eulersche Gammafunktion bezeichnet wird. Abbildung 2.8 zeigt im Fall $m = 3$ den 3-Stern S_3 und für $r \in \{1.1, 1.2, \dots, 1.9, 2\}$ die Kurve $\Gamma_r(S_3)$.

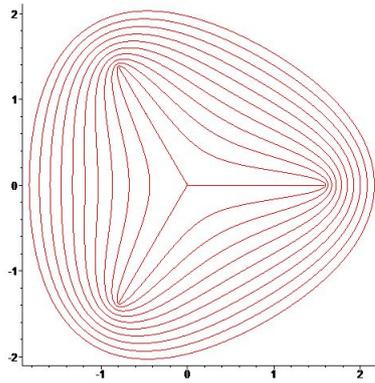


ABBILDUNG 2.8. S_3 und $\Gamma_r(S_3)$ für $r \in \{1.1, 1.2, \dots, 1.9, 2\}$

BEISPIEL 2.44 (Mandelbrotmenge). In Anlehnung an das Buch [Fal90] definieren wir zu einem holomorphen Polynom $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vom Grad $\deg(q) \geq 2$ die Juliamenge $J(q)$ durch

$$J(q) := \{z \in \mathbb{C}; \exists k \in \mathbb{N} : q^{[k]}(z) = z, |(q^{[k]})'(z)| > 1\},$$

wobei wir mit $q^{[k]}$ die k -fache Komposition $q \circ \dots \circ q$ von q bezeichnen. Betrachten wir nun die Familie $\{q_w\}_{w \in \mathbb{C}}$ der durch

$$q_w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2 + w \quad (w \in \mathbb{C})$$

definierten Polynome, so ist die Mandelbrotmenge M die Menge aller Punkte $w \in \mathbb{C}$, für die $J(q_w)$ zusammenhängend ist. In [Fal90] findet sich auch der Beweis, dass M kompakt und zusammenhängend ist.

In ihrer Arbeit [ES90] geben J. H. Ewing und G. Schober, darauf aufbauend, dass M ein zulässiges Kompaktum mit dem transfiniten Durchmesser $r(M) = 1$ darstellt, eine Formel für die Koeffizienten der zugehörigen biholomorphen

Abbildung ψ_M an und weisen nach, dass sich das n -te Faberpolynom F_n^M zu M als Hauptteil der Laurententwicklung um ∞ von $w \mapsto p_n(w)^{1/2^n}$ ergibt, wobei die Polynomfolge $(p_n)_{n=1}^\infty$ mit der Eigenschaft $\deg(p_n) = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ über die Rekursionsvorschrift

$$p_1(w) := w^2 + w \quad \text{und} \quad p_{n+1}(w) := p_n(w)^2 + w \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

eingeführt wird. Ferner wird gezeigt, dass „einige“ der Koeffizienten in der Laurententwicklung von ψ_M um ∞ verschwinden, und es werden explizit Werte von nichtverschwindenden Koeffizienten angegeben.

KAPITEL 3

Grundlagen aus der Approximationstheorie

Mit diesem Kapitel möchte ich die Grundlagen aus der Approximationstheorie bereitstellen, die wir im Folgenden benötigen werden.

1. Existenz und Eindeutigkeit von Bestapproximationen

Für uns wird speziell das klassische lineare Approximationsproblem von Bedeutung sein, welches die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Bestapproximationen aus linearen Unterräumen stellt.

DEFINITION 3.1 (Bestapproximation). Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und sei $V \subseteq X$ ein Untervektorraum. Zu $x \in X$ nennen wir $v^* \in V$ eine **Bestapproximation an x aus V** , wenn gilt

$$\|x - v^*\| = \inf_{v \in V} \|x - v\|.$$

Mit $P(V, x)$ bezeichnen wir die Menge aller Bestapproximationen an x aus V .

Im Falle eines endlichdimensionalen Untervektorraums lässt sich die Existenzfrage positiv beantworten:

SATZ 3.2 (Existenzsatz, Chap. 1 Sect. 6 in [Che66]). *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und sei $V \subseteq X$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ mindestens eine Bestapproximation $v^* \in V$.*

Um in dieser Situation auch die Eindeutigkeit der Bestapproximation zu erreichen, muss eine zusätzliche Forderung an die Norm des zugrunde liegenden Raumes gestellt werden.

DEFINITION 3.3 (strikte Konvexität). Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt **strikt konvex**, wenn für alle $x, y \in X$ mit $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ und $\|\frac{1}{2}(x+y)\| = 1$ bereits $x = y$ gelten muss.

Damit erhalten wir die folgende Eindeutigkeitsaussage:

SATZ 3.4 (Eindeutigkeitssatz, Chap. 1 Sect. 6 in [Che66]). *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein strikt konvexer normierter Raum und sei $V \subseteq X$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum. Dann besitzt jeder Punkt in X genau eine Bestapproximation aus V .*

Lässt man hingegen die Voraussetzung eines endlichdimensionalen Untervektorraums fallen, lassen sich Beispiele angeben, in denen keine Bestapproximation existiert (vgl. Chap. 1 Sect. 6 in [Che66]). Wiederum durch eine zusätzliche

Bedingung an den zugrunde liegenden normierten Raum kann aber gleichzeitig die Existenz und die Eindeutigkeit der Bestapproximation garantiert werden.

DEFINITION 3.5 (gleichmäßig konvex). Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist **gleichmäßig konvex**, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für $x, y \in X$ mit $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ und $\|\frac{1}{2}(x + y)\| > 1 - \delta$ bereits $\|x - y\| < \varepsilon$ gelten muss.

Offenbar ist jeder gleichmäßig konvexe Raum auch strikt konvex. Wie angekündigt gilt nun der folgende

SATZ 3.6 (Chap. 1 Sect. 6 in [Che66]). *Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein gleichmäßig konvexer Banachraum und ist V ein abgeschlossener Untervektorraum von X , dann existiert zu jedem Punkt aus X eine eindeutige Bestapproximation aus V .*

2. Charakterisierung der Bestapproximation

Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und V ein endlichdimensionaler Untervektorraum, so gewährleistet Satz 3.2 für alle $x \in X$ die Existenz einer Bestapproximation v^* an x aus V . Der wenig konstruktive Beweis dieses Satzes (vgl. Chap. 1 Sect. 6 in [Che66]) lässt aber weder eine direkte Bestimmung, noch eine Charakterisierung der Bestapproximation zu.

Spezialisiert man sich allerdings auf Hilberträume, so liefert dies für Fragen der Approximationstheorie die wohl günstigste Ausgangssituation.

SATZ 3.7 (Theorem V.3.4 in [Wer07]). *Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und sei $V \neq \{0\}$ ein abgeschlossener Untervektorraum von \mathcal{H} .*

- Für alle $x \in \mathcal{H}$ existiert eine eindeutig bestimmte Bestapproximation $P_V(x)$ aus V .
- Die hierdurch bestimmte Abbildung $P_V : \mathcal{H} \rightarrow V \subseteq \mathcal{H}$ ist linear und stetig und stellt eine orthogonale Projektion von \mathcal{H} auf V dar.

In beliebigen normierten Räumen, deren Norm im Allgemeinen nicht von einem Skalarprodukt induziert wird, können wir diese Situation imitieren:

DEFINITION 3.8. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum und V ein beliebiger Untervektorraum von X . Für $x \in X$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{A}(V, x) := V + \text{LH}\{x\}$$

den **linearen Approximationsraum zu x und V** . Sei nun zudem eine Norm $\|\cdot\|$ auf X gegeben. Ist $v^* \in V$, so nennen wir eine Sesquilinearform (bzw. eine Bilinearform im reellen Fall)

$$B : \mathcal{A}(V, x) \times \mathcal{A}(V, x) \rightarrow \mathbb{K},$$

welche die Eigenschaften

- (i) Für alle $y \in \mathcal{A}(V, x)$ gilt $B(y, y) \geq 0$.
- (ii) Für alle $y \in V$ gilt $B(x - v^*, y) = 0$ und $B(y, x - v^*) = 0$.
- (iii) Für alle $y \in \mathcal{A}(V, x)$ gilt $B(y, y) \leq \|y\|^2$.
- (iv) Es ist $B(x - v^*, x - v^*) = \|x - v^*\|^2$.

hat, eine **Faber-Sesquilinearform zu** (V, x, v^*) .

Wir erhalten damit

SATZ 3.9 (Faber-Kriterium). *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum, V ein beliebiger Untervektorraum von X und $x \in X$. Gibt es für $v^* \in X$ eine Faber-Sesquilinearform zu (V, x, v^*) , dann ist v^* eine Bestapproximation an x aus V .*

Beweis. Sei etwa $B : \mathcal{A}(V, x) \times \mathcal{A}(V, x) \rightarrow \mathbb{K}$ eine Faber-Sesquilinearform zu (V, x, v^*) . Für alle $v \in V$ rechnen wir unter Verwendung der definierenden Eigenschaften von B nach, dass

$$\begin{aligned} \|x - v\|^2 &\stackrel{\text{(iii)}}{\geq} B(x - v, x - v) \\ &= B((x - v^*) + (v^* - v), (x - v^*) + (v^* - v)) \\ &= B(x - v^*, x - v^*) + B(x - v^*, v^* - v) \\ &\quad + B(v^* - v, x - v^*) + B(v^* - v, v^* - v) \\ &\stackrel{\text{(ii)}}{=} B(x - v^*, x - v^*) + B(v^* - v, v^* - v) \\ &\stackrel{\text{(i)}}{\geq} B(x - v^*, x - v^*) \\ &\stackrel{\text{(iv)}}{=} \|x - v^*\|^2. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\|x - v^*\| \leq \|x - v\| \quad \text{für alle } v \in V$$

und daher wegen $v^* \in V$ natürlich auch

$$\|x - v^*\| = \inf_{v \in V} \|x - v\|,$$

d.h. v^* ist, wie behauptet, eine Bestapproximation an x aus V . \square

In der eingangs geschilderten Situation eines Hilbertraumes $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ liefert natürlich das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für jede Bestapproximation v^* aus einem abgeschlossenen Untervektorraum V an ein $x \in \mathcal{H}$ eine Faber-Sesquilinearform zu (V, x, v^*) . Wir werden sehen, dass es durchaus auch in anderen Situationen möglich ist, Faber-Sesquilinearformen anzugeben.

Wir bemerken, dass sich unter Zuhilfenahme von Faber-Sesquilinearformen Eindeutigkeitsfragen recht elegant beantworten lassen.

SATZ 3.10. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum, V ein beliebiger Untervektorraum von X und $x \in X$. Gibt es für $v^* \in X$ eine auf V positiv definite Faber-Sesquilinearform zu (V, x, v^*) , so ist die Bestapproximation v^* aus V an x eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei etwa $B : \mathcal{A}(V, x) \times \mathcal{A}(V, x) \rightarrow \mathbb{K}$ eine auf V positiv definite Faber-Sesquilinearform zu (V, x, v_1) mit $v_1 \in V$. Nach Satz 3.9 stellt v_1 damit

eine Bestapproximation an x aus V dar. Sei nun $v_2 \in V$ eine weitere Bestapproximation aus V an x . Unter Verwendung der definierenden Eigenschaften der Faber-Sesquilinearform B können wir dann

$$\begin{aligned}
\|x - v_2\|^2 &\stackrel{\text{(iii)}}{\geq} B(x - v_2, x - v_2) \\
&= B((x - v_1) + (v_1 - v_2), (x - v_1) + (v_1 - v_2)) \\
&= B(x - v_1, x - v_1) + B(x - v_1, v_1 - v_2) \\
&\quad + B(v_1 - v_2, x - v_1) + B(v_1 - v_2, v_1 - v_2) \\
&\stackrel{\text{(ii)}}{=} B(x - v_1, x - v_1) + B(v_1 - v_2, v_1 - v_2) \\
&\stackrel{\text{(iv)}}{=} \|x - v_1\|^2 + B(v_1 - v_2, v_1 - v_2)
\end{aligned}$$

nachrechnen, was aber wegen $B(v_1 - v_2, v_1 - v_2) \geq 0$ (nach (i)) und

$$\|x - v_1\| = \inf_{v \in V} \|x - v\| = \|x - v_2\|$$

nur möglich sein kann, wenn $B(v_1 - v_2, v_1 - v_2) = 0$ erfüllt ist. Da B nach Voraussetzung auf V positiv definit ist, ergibt sich damit $v_1 - v_2 = 0$ bzw. $v_1 = v_2$, was die Eindeutigkeit der Bestapproximation zeigt. \square

3. Das lineare Approximationsproblem in $C(K)$

Das in den vorangegangenen Abschnitten eingeführte lineare Approximationsproblem ist speziell im Banachraum $(C(K), \|\cdot\|_K)$ von Bedeutung, d.h. bei Fragen der gleichmäßigen Approximierbarkeit stetiger Funktionen. Hierbei bezeichnen wir, wie üblich, mit $C(K)$ den \mathbb{C} -Vektorraum aller stetigen, komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten topologischen Hausdorffraum K und mit $\|\cdot\|_K$ die Supremumsnorm auf $C(K)$.

Während Satz 3.2 in $(C(K), \|\cdot\|_K)$ noch die Existenz einer Bestapproximation aus einem endlichdimensionalen Untervektorraum sichert, lässt Satz 3.4 keine Aussage über deren Eindeutigkeit zu, da die Supremumsnorm $\|\cdot\|_K$ nicht strikt konvex ist, falls K aus mehr als einem Punkt besteht.

LEMMA 3.11. *Sei K ein kompakter topologischer Hausdorffraum, welcher aus mindestens zwei verschiedenen Punkten besteht. Dann ist $\|\cdot\|_K$ nicht strikt konvex.*

Beweis. Seien etwa $x_1, x_2 \in K$ zwei verschiedene Punkte aus K . Da K als kompakter Hausdorffraum ein normaler topologischer Raum ist, finden wir nach dem Lemma von Urysohn (Satz 7.1 in [Que01]) eine stetige Funktion $f_1 : K \rightarrow [0, 1]$, welche $f_1(x_1) = 1$ und $f_1(x_2) = 0$ erfüllt. Mit f_2 bezeichnen wir ferner die Funktion, die auf K identisch 1 ist. Dann gilt offensichtlich $\|f_1\|_K = 1$, $\|f_2\|_K = 1$ und wegen $f_1(x_1) = f_2(x_1) = 1$ auch $\|\frac{1}{2}(f_1 + f_2)\|_K = 1$. Wegen $f_1(x_2) = 0 \neq 1 = f_2(x_2)$ gilt aber $f_1 \neq f_2$, sodass $\|\cdot\|_K$ nach Definition 3.3 nicht strikt konvex sein kann. \square

Zur Behandlung der Eindeutigkeitsfrage muss daher ein anderer Zugang gewählt werden.

Im Folgenden sei nun K ein kompakter topologischer Hausdorffraum. Für $f \in C(K)$ bezeichnen wir mit $E(f, K)$ die (bekanntlich nichtleere) Menge aller Maximumstellen von f auf K , d.h.

$$E(f, K) := \{z \in K; |f(z)| = \|f\|_K\}.$$

Diese ist, als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{\|f\|_K\}$ unter der stetigen Abbildung $z \mapsto |f(z)|$, in K abgeschlossen und damit auch kompakt. Wir beginnen mit der folgenden Charakterisierung der Bestapproximationen:

SATZ 3.12 (Kolmogorov-Kriterium, Exercise 2.2.1 in [Riv90]). *Sei V ein endlichdimensionaler Untervektorraum von $C(K)$. Zu $f \in C(K)$ ist $v^* \in V$ genau dann eine Bestapproximation an f aus V , wenn für alle $v \in V$ gilt*

$$\max_{z \in E(f-v^*, K)} \operatorname{Re}((f(z) - v^*(z))\overline{v(z)}) \geq 0.$$

Beweis. Zum Beweis dieser Aussage orientieren wir uns im Wesentlichen an dem Vorgehen in Kapitel 2 von [Mö105].

„ \Rightarrow “: Sei $v^* \in V$ eine Bestapproximation an f . Wir machen die Annahme, dass ein $v \in V$ existiert, für welches entgegen unserer Behauptung

$$\max_{z \in E(f-v^*, K)} \operatorname{Re}((f(z) - v^*(z))\overline{v(z)}) < 0$$

gilt. Insbesondere ist dann natürlich $v \neq 0$. Da $E(f-v^*, K)$ als abgeschlossene Teilmenge von K kompakt ist, wird $E(f-v^*, K)$ unter der stetigen Funktion

$$h : K \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto \operatorname{Re}((f(z) - v^*(z))\overline{v(z)})$$

auf eine kompakte Teilmenge $h(E(f-v^*, K))$ von $(-\infty, 0)$ abgebildet. Wir finden also ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$h(E(f-v^*, K)) \subset (-\infty, -\varepsilon)$$

erfüllt ist und können damit durch $U := h^{-1}((-\infty, -\varepsilon))$ eine offene Obermenge von $E(f-v^*, K)$ definieren. Darüber hinaus setzen wir $B := K \setminus U$ und erhalten wegen $E(f-v^*, K) \subset U$ und der Kompaktheit von B

$$\|f - v^*\|_B < \|f - v^*\|_K \quad \text{also} \quad \|f - v^*\|_B \leq \|f - v^*\|_K - \delta$$

für ein geeignetes $\delta > 0$. Wir wählen nun ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$0 < \lambda < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{\|v\|_K^2}, \frac{\delta}{2\|v\|_K} \right\}$$

und definieren

$$u := v^* - \lambda v \in V.$$

Damit stellen wir fest:

(i) Ist $z \in U$ beliebig vorgegeben, so können wir nachrechnen

$$\begin{aligned}
|f(z) - u(z)|^2 &= |(f(z) - v^*(z)) + \lambda v(z)|^2 \\
&= \underbrace{|f(z) - v^*(z)|^2}_{\leq \|f - v^*\|_K^2} + 2\lambda \underbrace{\operatorname{Re}((f(z) - v^*(z))\overline{v(z)})}_{< -\varepsilon} + \lambda^2 \underbrace{|v(z)|^2}_{\leq \|v\|_K^2} \\
&\leq \|f - v^*\|_K^2 - \lambda \|v\|_K^2 \left(2 \frac{\varepsilon}{\|v\|_K^2} - \lambda\right) \\
&\leq \|f - v^*\|_K^2 - \lambda \varepsilon,
\end{aligned}$$

womit sich die Abschätzung

$$\|f - u\|_{\overline{U}}^2 \leq \|f - v^*\|_K^2 - \lambda \varepsilon$$

ergibt.

(ii) Ist $z \in B$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
|f(z) - u(z)| &\leq |f(z) - v^*(z)| + \lambda |v(z)| \\
&\leq \|f - v^*\|_B + \lambda \|v\|_K \\
&\leq \|f - v^*\|_K - \delta + \lambda \|v\|_K \\
&\leq \|f - v^*\|_K - \frac{\delta}{2}
\end{aligned}$$

und damit die Abschätzung

$$\|f - u\|_B \leq \|f - v^*\|_K - \frac{\delta}{2}.$$

Zusammenfassend ergibt sich also

$$\|f - u\|_K = \max\{\|f - u\|_{\overline{U}}, \|f - u\|_B\} < \|f - v^*\|_K$$

im Widerspruch dazu, dass v^* eine Bestapproximation an f aus V ist.

„ \Leftarrow “: Sei nun für alle $v \in V$ die Bedingung

$$\max_{z \in E(f - v^*, K)} \operatorname{Re}((f(z) - v^*(z))\overline{v(z)}) \geq 0$$

erfüllt. Für alle $v \in V$ gilt damit nach Voraussetzung

$$\max_{z \in E(f - v^*, K)} \operatorname{Re}((f(z) - v^*(z))\overline{u(z)}) \geq 0$$

für $u := v^* - v \in V$, d.h. es gibt ein $z_0 \in E(f - v^*, K)$, für welches

$$\operatorname{Re}((f(z_0) - v^*(z_0))\overline{u(z_0)}) \geq 0$$

gilt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \|f - v\|_K^2 &\geq |f(z_0) - v(z_0)|^2 \\ &= |(f(z_0) - v^*(z_0)) + u(z_0)|^2 \\ &= \underbrace{|f(z_0) - v^*(z_0)|^2}_{=\|f-v^*\|_K^2} + \underbrace{2 \operatorname{Re}((f(z_0) - v^*(z_0))\overline{u(z_0)})}_{\geq 0} + \underbrace{|u(z_0)|^2}_{\geq 0} \\ &\geq \|f - v^*\|_K^2, \end{aligned}$$

womit v^* eine Bestapproximation an f aus V darstellt. \square

Die durch das Kolmogorov-Kriterium 3.12 gegebene Charakterisierung von Bestapproximationen lässt sich nun in eine für uns sehr günstige Form bringen. Hierfür klären wir zunächst:

DEFINITION 3.13. Sei X eine beliebige nichtleere Menge.

(i) Ist $\omega : X \rightarrow \mathbb{K}$ eine Abbildung, so nennen wir

$$\operatorname{supp}(\omega) := \{x \in X; \omega(x) \neq 0\}$$

den **Träger von ω** .

(ii) Unter einer **endlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung auf X** verstehen wir eine Abbildung $\omega : X \rightarrow [0, 1]$ deren Träger $\operatorname{supp}(\omega)$ eine endliche Teilmenge von X ist und die die Bedingung

$$\sum_{x \in X} \omega(x) = 1$$

erfüllt. Die Menge aller endlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf X bezeichnen wir mit $\mathcal{W}(X)$.

Ferner bemerken wir:

LEMMA 3.14. Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und X eine beliebige Teilmenge. Dann ist die **konvexe Hülle** $\operatorname{conv}(X)$ (also die kleinste konvexe Menge, welche X enthält) gegeben durch

$$\operatorname{conv}(X) = \left\{ \sum_{x \in X} \omega(x)x; \omega \in \mathcal{W}(X) \right\}$$

Wir können nun die nachfolgende Charakterisierung von Bestapproximationen zeigen. Dabei orientieren wir uns im Wesentlichen an dem entsprechenden Beweis in Kapitel 2 von [Mö105].

SATZ 3.15 (von Rivlin-Shapiro, Theorem 2.5 in [Riv90]). Sei V ein endlichdimensionaler Untervektorraum von $C(K)$. Zu $f \in C(K)$ ist $v^* \in V$ genau dann eine Bestapproximation, wenn es eine endliche Wahrscheinlichkeitsverteilung $\lambda : E(f - v^*, K) \rightarrow [0, 1]$ gibt, sodass für alle $v \in V$ gilt

$$\sum_{z \in E(f - v^*, K)} \lambda(z)(f(z) - v^*(z))\overline{v(z)} = 0.$$

Beweis. Sei $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V . Wir definieren dann die Abbildung

$$\Psi : E(f - v^*, K) \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad z \mapsto \begin{pmatrix} (f(z) - v^*(z))\overline{v_1(z)} \\ \vdots \\ (f(z) - v^*(z))\overline{v_n(z)} \end{pmatrix}$$

und damit die Menge

$$Y := \text{conv}\{\Psi(z); z \in E(f - v^*, K)\} \subset \mathbb{C}^n.$$

Unter Beachtung von Lemma 3.14 ist mit diesen Bezeichnungen die Existenz einer endlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung $\lambda : E(f - v^*, K) \rightarrow [0, 1]$, welche der Bedingung

$$\sum_{z \in E(f - v^*, K)} \lambda(z)(f(z) - v^*(z))\overline{v(z)} = 0 \quad \text{für alle } v \in V$$

oder gleichbedeutend der Bedingung

$$\sum_{z \in E(f - v^*, K)} \lambda(z)(f(z) - v^*(z))\overline{v_j(z)} = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

genügt, offenbar dazu äquivalent, dass $0 \in Y$ gilt.

„ \Rightarrow “: Sei also $v^* \in V$ eine Bestapproximation an f . Machen wir die Annahme $0 \notin Y$, so können wir die definitionsgemäß konvexe Menge Y nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach durch eine Hyperebene vom Punkt 0 trennen, d.h. es gibt einen Vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ mit

$$\text{Re}\langle y, a \rangle < 0 \quad \text{für alle } y \in Y.$$

Setzen wir $v := \sum_{j=1}^n a_j v_j \in V$, so können wir damit für alle $z \in E(f - v^*, K)$ unter Beachtung von $\Psi(z) \in Y$ nachrechnen

$$\text{Re}((f(z) - v^*(z))\overline{v(z)}) = \text{Re}\left(\sum_{j=1}^n \overline{a_j}(f(z) - v^*(z))\overline{v_j(z)}\right) = \text{Re}\langle \Psi(z), a \rangle < 0,$$

womit sich aber der Widerspruch

$$\max_{z \in E(f - v^*, K)} \text{Re}((f(z) - v^*(z))\overline{v(z)}) < 0$$

zum Kolmogorov-Kriterium 3.12 ergibt. Die Annahme war also falsch, d.h. es muss $0 \in Y$ gelten.

„ \Leftarrow “: Sei nun umgekehrt eine endliche Wahrscheinlichkeitsverteilung λ auf $E(f - v^*, K)$ gegeben, sodass für alle $v \in V$ gilt

$$\sum_{z \in E(f - v^*, K)} \lambda(z)(f(z) - v^*(z))\overline{v(z)} = 0.$$

Insbesondere erhalten wir damit

$$\max_{z \in E(f-v^*, K)} \operatorname{Re}((f(z)-v^*(z))\overline{v(z)}) \geq \sum_{z \in E(f-v^*, K)} \lambda(z) \operatorname{Re}((f(z)-v^*(z))\overline{v(z)}) = 0,$$

womit nach v^* dem Kolmogorov-Kriterium 3.12 eine Bestapproximation an f aus V sein muss. \square

Aufbauend auf diesen Satz führt Rivlin in seinem Buch [Riv90] den Begriff der Signatur ein.

DEFINITION 3.16. Eine **Signatur in K** ist eine stetige Abbildung $\Sigma : \sigma(\Sigma) \rightarrow \mathbb{T}$ auf einer abgeschlossenen Teilmenge $\sigma(\Sigma)$ von K . In diesem Fall nennen wir $\sigma(\Sigma)$ die **Basis der Signatur Σ** .

- Sind Σ und Σ' Signaturen in K , dann heißt Σ' eine **Subsignatur von Σ** , falls $\sigma(\Sigma') \subseteq \sigma(\Sigma)$ und $\Sigma|_{\sigma(\Sigma')} = \Sigma'$ gilt.
- Eine Signatur Σ heißt **assoziiert mit $0 \neq g \in C(K)$** , falls $\sigma(\Sigma) \subseteq E(g, K)$ erfüllt ist und

$$\Sigma(z) = \operatorname{sgn} g(z) = \frac{g(z)}{|g(z)|}$$

für alle $z \in \sigma(\Sigma)$ gilt.

- Ist V ein endlichdimensionaler Untervektorraum von $C(K)$, so heißt eine Signatur Σ in K **extremal für V** , falls es eine Subsignatur Σ' von Σ mit endlicher Basis $\sigma(\Sigma) = \{z_1, \dots, z_n\}$ und Zahlen $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt, sodass $\overline{\Sigma(z_j)} = \operatorname{sgn} \zeta_j$ für $j = 1, \dots, n$ und

$$\sum_{j=1}^n \zeta_j v(z_j) = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

- Eine extremale Signatur heißt **primitiv**, falls es keine echte extremale Subsignatur gibt.

Mit diesen Begriffen lässt sich Satz 3.15 wie folgt formulieren:

KOROLLAR 3.17 (Theorem 2.6 in [Riv90]). *Sei V ein endlichdimensionaler Untervektorraum von $C(K)$ und sei $f \in C(K) \setminus V$. Dann ist $v^* \in V$ genau dann eine Bestapproximation an f aus V , wenn eine mit $f - v^*$ assoziierte, extremale Signatur für V existiert.*

Beweis. Nach Satz 3.15 ist $v^* \in V$ genau dann eine Bestapproximation an f aus V , wenn es eine endliche Wahrscheinlichkeitsverteilung λ auf $E(f-v^*, K)$ gibt mit der Eigenschaft

$$(3.1) \quad \sum_{z \in E(f-v^*, K)} \lambda(z) (f(z) - v^*(z)) \overline{v(z)} = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

„ \Rightarrow “: Ist $\lambda \in \mathcal{W}(E(f-v^*, K))$ mit der Eigenschaft (3.1) gegeben, so stellt

$$\Sigma : \sigma(\Sigma) \rightarrow \mathbb{T}, \quad z \mapsto \frac{f(z) - v^*(z)}{|f(z) - v^*(z)|} = \frac{f(z) - v^*(z)}{\|f - v^*\|_K}$$

mit der endlichen Basis $\sigma(\Sigma) := \text{supp}(\lambda)$ eine mit $f - v^*$ assoziierte Signatur dar. Nummerieren wir $\text{supp}(\lambda) = \{z_1, \dots, z_n\}$ und setzen weiter

$$\zeta_j := \lambda(z_j) \overline{\Sigma(z_j)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

so sehen wir mit

$$\overline{\Sigma(z_j)} = \text{sgn}(\zeta_j) \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

ein, dass Σ auch eine extremale Signatur für V ist. Denn nach Voraussetzung an λ gilt für alle $v \in V$:

$$\sum_{j=1}^n \zeta_j v(z_j) = \frac{1}{\|f - v^*\|_K} \overline{\sum_{z \in E(f-v^*, K)} \lambda(z)(f(z) - v^*(z))v(z)} = 0$$

„ \Leftarrow “: Ist umgekehrt $\Sigma : \sigma(\Sigma) \rightarrow \mathbb{T}$ eine mit $f - v^*$ assoziierte extremale Signatur für V , so nummerieren wir die endliche Basis in der Form $\sigma(\Sigma) = \{z_1, \dots, z_n\}$ und wählen die zugehörigen $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$\frac{\overline{f(z_j) - v^*(z_j)}}{\|f - v^*\|_K} = \overline{\Sigma(z_j)} = \text{sgn}(\zeta_j) = \frac{\zeta_j}{|\zeta_j|} \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

und

$$\sum_{j=1}^n \zeta_j v(z_j) = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

Setzen wir anschließend

$$s := \sum_{j=1}^n |\zeta_j| \neq 0,$$

so erhalten wir durch

$$\lambda : E(f - v^*, K) \rightarrow [0, 1], \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{|\zeta_j|}{s}, & \text{falls } z = z_j \text{ für ein } j \in \{1, \dots, n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine endliche Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $\text{supp}(\lambda) = \sigma(\Sigma)$, die darüber hinaus der Bedingung (3.1) genügt. In der Tat ist dann für alle $v \in V$

$$\sum_{z \in E(f-v^*, K)} \lambda(z)(f(z) - v^*(z))\overline{v(z)} = \frac{\|f - v^*\|_K}{s} \overline{\sum_{j=1}^n \zeta_j v(z_j)} = 0.$$

Zusammenfassend ist die Behauptung vollständig bewiesen. \square

Allerdings erlaubt Satz 3.15 auch eine Formulierung, die den von uns in Definition 3.8 eingeführten Begriff der Faber-Sesquilinearform verwendet.

KOROLLAR 3.18. *Sei V ein endlichdimensionaler Untervektorraum von $C(K)$ und sei $f \in C(K) \setminus V$. Für $v^* \in V$ sind dann die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) v^* ist eine Bestapproximation an f aus V .

(ii) Es gibt eine Faber-Sesquilinearform $B : \mathcal{A}(V, f) \times \mathcal{A}(V, f) \rightarrow \mathbb{C}$ zu (V, f, v^*) der Form

$$B(v_1, v_2) := \sum_{z \in E(f-v^*, K)} \lambda(z) v_1(z) \overline{v_2(z)} \quad \text{für } v_1, v_2 \in \mathcal{A}(V, f),$$

wobei $\lambda : E(f - v^*, K) \rightarrow [0, 1]$ eine endliche Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

(iii) Es gibt eine Faber-Sesquilinearform zu (V, f, v^*) .

Beweis. Ist nun v^* eine Bestapproximation aus V an f , dann gibt es nach dem Satz von Rivlin-Shapiro 3.15 eine endliche Wahrscheinlichkeitsverteilung $\lambda : E(f - v^*, K) \rightarrow [0, 1]$ mit

$$\sum_{z \in E(f-v^*, K)} \lambda(z) (f(z) - v^*(z)) \overline{v(z)} = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

Definieren wir nun $B : \mathcal{A}(V, f) \times \mathcal{A}(V, f) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$B(v_1, v_2) := \sum_{z \in E(f-v^*, K)} \lambda(z) v_1(z) \overline{v_2(z)} \quad \text{für } v_1, v_2 \in \mathcal{A}(V, f),$$

so stellt B offensichtlich eine (hermitesche) Sesquilinearform dar, welche mit

- Für alle $v \in \mathcal{A}(V, f)$ gilt

$$B(v, v) = \sum_{z \in E(f-v^*, K)} \lambda(z) |v(z)|^2 \geq 0.$$

- Für alle $v \in V$ gilt

$$B(f - v^*, v) = \sum_{z \in E(f-v^*, K)} \lambda(z) (f(z) - v^*(z)) \overline{v(z)} = 0$$

und (da B hermitesch ist) auch $B(v, f - v^*) = 0$.

- Für alle $v \in \mathcal{A}(V, f)$ gilt

$$B(v, v) = \sum_{z \in E(f-v^*, K)} \lambda(z) |v(z)|^2 \leq \|v\|_K^2.$$

- Es ist

$$B(f - v^*, f - v^*) = \sum_{z \in E(f-v^*, K)} \lambda(z) |f(z) - v^*(z)|^2 = \|f - v^*\|_K^2.$$

die nach Definition 3.8 charakterisierenden Eigenschaften (i) bis (iv) einer Faber-Sesquilinearform zu (V, f, v^*) hat, d.h. es gilt „(i) \Rightarrow (ii)“.

Die Implikation „(ii) \Rightarrow (iii)“ ist trivial erfüllt und „(iii) \Rightarrow (i)“ ergibt sich unmittelbar nach Satz 3.9. \square

Zur Beantwortung der für uns relevanten Eindeutigkeitsfrage benötigen wir die in der folgenden Definition formulierte Haar-Bedingung, welche sich etwa in Chap. 3 Sect. 4 in [Che66] oder (in einer äquivalenten Formulierung als Tschebyscheff-Bedingung) in Definition 2.9 in [Riv90] findet.

DEFINITION 3.19. Ein endliches System $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ von Funktionen aus $C(K)$ erfüllt die **Haar-Bedingung** oder ist ein **Haar-System**, falls die **Haar-Determinante**

$$D_{\mathcal{V}}(z_1, \dots, z_n) := \det \begin{pmatrix} v_1(z_1) & \dots & v_n(z_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1(z_n) & \dots & v_n(z_n) \end{pmatrix}$$

für keine Wahl $z_1, \dots, z_n \in K$ von n paarweise verschiedenen Punkten aus K verschwindet. Zusätzlich fordern wir, dass K aus mindestens $n + 1$ verschiedenen Punkten besteht¹.

Wir bemerken, dass ein endliches System von Funktionen aus $C(K)$, welches der Haar-Bedingung genügt, insbesondere linear unabhängig sein muss. In Anlehnung an Theorem 2.7 in [Riv90] können wir nun zeigen:

KOROLLAR 3.20. Sei \mathcal{V} ein System von n Funktionen aus $C(K)$, welches der Haar-Bedingung genügt und sei $V = \text{LH}(\mathcal{V})$ der von diesem erzeugte n -dimensionale Untervektorraum von $C(K)$. Ist v^* eine Bestapproximation aus V an eine Funktion $f \in C(K) \setminus V$, dann gilt:

- (i) $E(f - v^*, K)$ besteht aus mindestens $n + 1$ verschiedenen Punkten.
- (ii) Die Basis $\sigma(\Sigma)$ einer extremalen Signatur Σ für V enthält mindestens $n + 1$ verschiedene Punkte.
- (iii) Ist $B : \mathcal{A}(V, f) \times \mathcal{A}(V, f) \rightarrow \mathbb{C}$ eine Faber-Sesquilinearform zu (V, f, v^*) der Form

$$B(v_1, v_2) := \sum_{z \in E(f - v^*, K)} \lambda(z) v_1(z) \overline{v_2(z)} \quad \text{für } v_1, v_2 \in \mathcal{A}(V, f)$$

mit einer endlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung λ auf $E(f - v^*, K)$, dann besteht der Träger $\text{supp}(\lambda)$ von λ aus mindestens $n + 1$ verschiedenen Punkten.

Beweis. (i) Nehmen wir an, dass $E(f - v^*, K)$ aus höchstens n verschiedenen Punkten besteht, so können wir n paarweise verschiedene Punkte z_1, \dots, z_n aus K mit der Eigenschaft $E(f - v^*, K) \subseteq \{z_1, \dots, z_n\}$ wählen. Da $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ die Haar-Bedingung erfüllt, also $D_{\mathcal{V}}(z_1, \dots, z_n) \neq 0$ gilt, finden wir eine Lösung $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} v_1(z_1) & \dots & v_n(z_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1(z_n) & \dots & v_n(z_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f(z_1) - v^*(z_1) \\ \vdots \\ f(z_n) - v^*(z_n) \end{pmatrix}.$$

Setzen wir $v := \sum_{j=1}^n a_j v_j \in V$, so gilt daher

$$(f(z_j) - v^*(z_j)) \overline{v(z_j)} = -|f(z_j) - v^*(z_j)|^2 \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

¹Damit die Bedingung an die Determinante nicht leer ist, würden bereits n verschiedene Punkte genügen. Wir werden aber sehen (vgl. Korollar 3.20), dass $n + 1$ verschiedene Punkte nötig sind, um die Eindeutigkeit der Bestapproximation zu erreichen.

und damit insbesondere

$$\max_{z \in E(f-v^*, K)} \operatorname{Re}((f(z) - v^*(z))\overline{v(z)}) = -\|f - v^*\|_K^2 < 0,$$

was aber im Widerspruch zum Kolmogorov-Kriterium 3.12 steht.

(ii) Wir nehmen an, dass $\Sigma : \sigma(\Sigma) \rightarrow \mathbb{T}$ eine extremale Signatur für V ist, deren Basis $\sigma(\Sigma)$ aus $m \leq n$ verschiedenen Punkten besteht. Wir können dann n paarweise verschiedene Punkte $z_1, \dots, z_n \in K$ wählen mit $\sigma(\Sigma) = \{z_1, \dots, z_m\}$. Weiter seien $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Gewichte zu Σ , d.h. $\overline{\Sigma(z_j)} = \operatorname{sgn}(\zeta_j)$ für $j = 1, \dots, m$.

Da $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ die Haar-Bedingung erfüllt, also $D_{\mathcal{V}}(z_1, \dots, z_n) \neq 0$ gilt, finden wir eine Lösung $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} v_1(z_1) & \dots & v_n(z_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1(z_n) & \dots & v_n(z_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir $v := \sum_{j=1}^n a_j v_j \in V$, so gilt

$$v(z_1) = 1 \quad \text{und} \quad v(z_j) = 0 \quad \text{für } j = 2, \dots, n$$

und erhalten, weil Σ extremal für V ist,

$$0 = \sum_{j=1}^m \zeta_j v(z_j) = \zeta_1$$

im Widerspruch zur Wahl von ζ_1 .

(iii) Angenommen, $B : \mathcal{A}(V, f) \times \mathcal{A}(V, f) \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine Faber-Sesquilinearform zu (V, f, v^*) der Form

$$B(v_1, v_2) := \sum_{z \in E(f-v^*, K)} \lambda(z) v_1(z) \overline{v_2(z)} \quad \text{für } v_1, v_2 \in \mathcal{A}(V, f)$$

mit einer endlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung λ auf $E(f - v^*, K)$, deren Träger aus höchstens n verschiedenen Punkten besteht. Wie im Beweis zu Korollar 3.17 bestimmen wir eine zu $f - v^*$ assoziierte extremale Signatur $\Sigma : \sigma(\Sigma) \rightarrow \mathbb{T}$ für V , welche zudem $\sigma(\Sigma) = \operatorname{supp}(\lambda)$ erfüllt. Da aber die Basis von Σ somit höchstens n verschiedene Punkte enthält, steht dies im Widerspruch zu (ii). \square

Damit erhalten wir den folgenden Eindeutigkeitsatz, der sich etwa in Chap. 3 Sect. 5 von [Che66] und als Theorem 2.8 in [Riv90] findet.

SATZ 3.21 (Eindeutigkeitsatz von Haar). *Sei \mathcal{V} ein endliches System von Funktionen aus $C(K)$, welches der Haar-Bedingung genügt und sei $V = \operatorname{LH}(\mathcal{V})$ der von diesem erzeugte endlichdimensionale Untervektorraum von $C(K)$. Dann besitzt jedes $f \in C(K) \setminus V$ genau eine Bestapproximation aus V .*

Beweis. Sei $f \in C(K)$ beliebig vorgegeben. Nach Satz 3.2 existiert eine Bestapproximation v^* an f aus V . Die Charakterisierung in Korollar 3.18 liefert dann die Existenz einer Faber-Sesquilinearform $B : \mathcal{A}(V, f) \times \mathcal{A}(V, f) \rightarrow \mathbb{C}$ der Form

$$B(u_1, u_2) = \sum_{z \in E(f-v^*, K)} \lambda(z) u_1(z) \overline{u_2(z)} \quad \text{für } u_1, u_2 \in \mathcal{A}(V, f)$$

mit einer endlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung λ auf $E(f - v^*, K)$. Nach Satz 3.10 genügt es für die behauptete Eindeutigkeitsaussage zu zeigen, dass B auf V positiv definit ist.

Hierzu geben wir uns ein beliebiges $v \in V$ mit $B(v, v) = 0$ vor. Nach Wahl von B gilt somit

$$0 = B(v, v) = \sum_{z \in E(f-v^*, K)} \lambda(z) |v(z)|^2.$$

Nach Satz 3.20 (iii) enthält $\text{supp}(\lambda)$ mindestens $n + 1$ verschiedene Punkte, sodass v an (diesen) $n + 1$ verschiedenen Punkten verschwinden muss. Wählen wir n dieser Nullstellen, etwa $z_1, \dots, z_n \in K$, aus, so liefert die Basisdarstellung $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$ mit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ die aufgrund der Haar-Bedingung eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} v_1(z_1) & \dots & v_n(z_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1(z_n) & \dots & v_n(z_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h. es gilt $(a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$ und damit, wie gewünscht, $v = 0$. \square

4. Approximation bezüglich Halbnormen

In den bisherigen Abschnitten haben wir uns mit der Approximation bezüglich Normen beschäftigt. In vielen Situationen ist man aber an Bestapproximationen bezüglich Halbnormen interessiert.

DEFINITION 3.22. Sei (X, p) ein mit einer Halbnorm p versehener \mathbb{K} -Vektorraum X und sei $V \subseteq X$ ein Untervektorraum. Zu $x \in X$ nennen wir $v^* \in V$ eine **Bestapproximation an x aus V bezüglich p** , wenn gilt

$$p(x - v^*) = \inf_{v \in V} p(x - v).$$

Mit $P(p, V, x)$ bezeichnen wir die Menge aller Bestapproximationen an x aus V bezüglich p .

Dies lässt sich mit dem folgenden Satz auf das Approximationsproblem bezüglich einer Norm zurückführen.

SATZ 3.23. Sei (X, p) ein mit einer Halbnorm p versehener \mathbb{K} -Vektorraum X . Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) $N := p^{-1}(\{0\}) \subseteq X$ ist ein Untervektorraum von X .

(ii) Auf dem Quotientenvektorraum X/N wird durch

$$p^*(x + N) := \inf_{y \in N} p(x + y) \quad \text{für } x + N \in X/N$$

eine Norm p^* definiert.

(iii) Bezeichnet $\pi : X \rightarrow X/N$ den kanonischen Epimorphismus, dann gilt

$$P(p, V, x) = \pi^{-1}(P(p^*, \pi(V), \pi(x)))$$

also insbesondere $P(p, V, x) \neq \emptyset$ für jeden endlichdimensionalen Untervektorraum V von X und jedes $x \in X$.

Beweis. (i) Dass $N = p^{-1}(\{0\})$ einen Untervektorraum von X darstellt, rechnet man unmittelbar nach: Sind $x, y \in N$ gegeben, so folgt mit der Dreiecksungleichung $0 \leq p(x + y) \leq p(x) + p(y) = 0$ und damit $p(x + y) = 0$ bzw. $x + y \in N$. Sind $x \in N$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gegeben, so gilt $p(\lambda x) = |\lambda|p(x) = 0$ bzw. $\lambda x \in N$. Insbesondere ist natürlich $0 \in N$.

(ii) Zunächst stellen wir fest, dass die im Satz angegebene Abbildung $p^* : X/N \rightarrow [0, \infty)$ wohldefiniert ist. Für $x_1 + N = x_2 + N \in X/N$ erhalten wir nämlich aufgrund von $x_1 - x_2 \in N$ und der Vektorraumstruktur von N unmittelbar

$$\inf_{y \in N} p(x_1 + y) = \inf_{y \in N} p(x_2 + \underbrace{(x_1 - x_2) + y}_{\in N}) = \inf_{y \in N} p(x_2 + y).$$

Sei nun $x + N \in X/N$ mit $p^*(x + N) = 0$ gegeben. Da aufgrund der Dreiecksungleichung

$$p(x) = p((x + y) - y) \leq p(x + y) + p(-y) = p(x + y) \quad \text{für alle } y \in N$$

gilt, erhalten wir und damit $p(x) = 0$ bzw. $x + N = 0 \in X/N$. Also ist p^* positiv definit.

Weiter rechnet man nach, dass für alle $x + N \in X/N$ und alle $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ die Identität

$$\begin{aligned} p^*(\lambda(x + N)) &= p^*(\lambda x + N) \\ &= \inf_{y \in N} p(\lambda x + y) \\ &= \inf_{y \in N} p(\lambda(x + y)) \\ &= |\lambda| \inf_{y \in N} p(x + y) \\ &= |\lambda| p^*(x + N) \end{aligned}$$

gilt. Im Spezialfall $\lambda = 0$ ist diese natürlich ebenfalls richtig. Sind $x_1 + N, x_2 + N \in X/N$ gegeben, so erhalten wir die Dreiecksungleichung für p^* gemäß

$$\begin{aligned} p^*((x_1 + N) + (x_2 + N)) &= p^*((x_1 + x_2) + N) \\ &= \inf_{y \in N} p(x_1 + x_2 + y) \\ &= \inf_{y_1, y_2 \in N} p((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) \\ &\leq \inf_{y_1 \in N} p(x_1 + y_1) + \inf_{y_2 \in N} p(x_2 + y_2) \\ &= p^*(x_1 + N) + p^*(x_2 + N). \end{aligned}$$

(iii) Die Rechnungen in (i) zeigen insbesondere, dass

$$p(x) \leq \inf_{y \in N} p(x + y) \quad \text{für alle } x \in X$$

und damit wegen $0 \in N$ sogar

$$p(x) = \inf_{y \in N} p(x + y) = p^*(x + N) = p^*(\pi(x)) \quad \text{für alle } x \in X$$

erfüllt ist, d.h. wir haben den Zusammenhang $p = p^* \circ \pi$. Ist nun V ein beliebiger endlichdimensionaler Untervektorraum von X (damit ist natürlich auch $\pi(V)$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum von X/N) und $x \in X$, dann können wir einerseits für $v^* \in P(p, V, x)$ nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} p^*(\pi(x) - \pi(v^*)) &= p^*(\pi(x - v^*)) = p(x - v^*) = \inf_{v \in V} p(x - v) \\ &= \inf_{v \in V} p^*(\pi(x - v)) = \inf_{v \in V} p^*(\pi(x) - \pi(v)) \\ &= \inf_{w \in \pi(V)} p^*(\pi(x) - w) \end{aligned}$$

und damit $\pi(v^*) \in P(p^*, \pi(V), \pi(x))$ gilt, und andererseits für ein Element $v^* \in \pi^{-1}(P(p^*, \pi(V), \pi(x)))$ nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} p(x - v^*) &= p^*(\pi(x - v^*)) = p^*(\pi(x) - \pi(v^*)) = \inf_{w \in \pi(V)} p^*(\pi(x) - w) \\ &= \inf_{v \in V} p^*(\pi(x) - \pi(v)) = \inf_{v \in V} p^*(\pi(x - v)) \\ &= \inf_{v \in V} p(x - v) \end{aligned}$$

und damit $v^* \in P(p, V, x)$ gilt. Zusammenfassend ergibt sich also die behauptete Gleichheit

$$P(p, V, x) = \pi^{-1}(P(p^*, \pi(V), \pi(x))).$$

Da nach Satz 3.2 in dem normierten Raum $(X/N, p^*)$ der Punkt $\pi(x)$ mindestens eine Bestapproximation aus dem endlichdimensionalen Untervektorraum $\pi(V)$ besitzt, gilt $P(p^*, \pi(V), \pi(x)) \neq \emptyset$ und aufgrund der Surjektivität von π auch $P(p, V, x) \neq \emptyset$, womit der Satz vollständig bewiesen ist. \square

Denkbar sind etwa die folgenden Situationen:

BEISPIEL 3.24. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und sei $Y \subseteq X'$ eine beliebige beschränkte Teilmenge des topologischen Dualraums X' zu X , d.h. es gilt

$$C := \sup_{y \in Y} \|y\|_{X'} < \infty,$$

wobei wir mit $\|\cdot\|_{X'}$ die von $\|\cdot\|$ auf X' induzierte Norm bezeichnen. Dann lässt sich durch

$$\|x\|_* := \sup_{y \in Y} |y(x)| \quad \text{für alle } x \in X$$

eine Halbnorm $\|\cdot\|_*$ auf X definieren, welche zudem die Bedingung $\|x\|_* \leq C\|x\|$ für alle $x \in X$ erfüllt.

BEISPIEL 3.25. Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine normierte komplexe Algebra mit Einselement 1 und $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ der \mathbb{C} -Vektorraum aller holomorphen Polynome. Für $x \in \mathfrak{R}$ erhalten wir dann einen Homomorphismus

$$\Phi_x : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{R}, \quad p \mapsto p(x).$$

Damit können wir durch

$$\|p\|_* := \|\Phi_x(p)\| \quad \text{für alle } p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$$

eine Halbnorm $\|\cdot\|_*$ auf X einführen.

Zur Charakterisierung der Bestapproximationen können wir erneut das Konzept der Faber-Sesquilinearformen verwenden.

DEFINITION 3.26. Sei (X, p) ein mit einer Halbnorm p versehener \mathbb{K} -Vektorraum X und V ein beliebiger Untervektorraum von X . Sind $x \in X$ und $v^* \in V$ gegeben, so nennen wir eine Sesquilinearform (bzw. eine Bilinearform im reellen Fall)

$$B : \mathcal{A}(V, x) \times \mathcal{A}(V, x) \rightarrow \mathbb{K},$$

welche die Eigenschaften

- (i) Für alle $y \in \mathcal{A}(V, x)$ gilt $B(y, y) \geq 0$.
- (ii) Für alle $y \in V$ gilt $B(x - v^*, y) = 0$ und $B(y, x - v^*) = 0$.
- (iii) Für alle $y \in \mathcal{A}(V, x)$ gilt $B(y, y) \leq p(y)^2$.
- (iv) Es ist $B(x - v^*, x - v^*) = p(x - v^*)^2$.

hat, eine **Faber-Sesquilinearform zu** (p, V, x, v^*) .

Wir erhalten:

SATZ 3.27. Sei (X, p) ein mit einer Halbnorm p versehener \mathbb{K} -Vektorraum X und V ein beliebiger Untervektorraum von X . Sind $x \in X$ und $v^* \in V$ gegeben, sodass es eine Faber-Sesquilinearform zu (p, V, x, v^*) gibt, dann ist v^* eine Bestapproximation an x aus V bezüglich p .

Beweis. Verfolgen wir den Beweis zu Satz 3.9, so stellen wir fest, dass dieser nur die Halbnormeigenschaften von $\|\cdot\|$ verwendet, sich also wörtlich auf den Fall einer Halbnorm p anstelle der Norm $\|\cdot\|$ übertragen lässt. \square

5. Ausblick

Mit dem Satz von Rivlin-Shapiro 3.15 haben wir in den vorangegangenen Abschnitten gesehen, dass wir zu Bestapproximationen in $(C(K), \|\cdot\|_K)$ aus endlichdimensionalen Unterräumen immer eine Faber-Sesquilinearform angeben können. Da wir bei deren Konstruktion explizit die Struktur des Raums $(C(K), \|\cdot\|_K)$ ausgenutzt haben, ist auf den ersten Blick nicht klar, wie sich die Situation in allgemeineren normierten Räumen darstellt.

Sei nun $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum. Wir bezeichnen dann mit

- $B(X')$ die abgeschlossene Einheitskugel in X' , d.h. es ist

$$B(X') := \{\phi \in X'; \|\phi\| \leq 1\},$$

- $\text{ext } B(X')$ die Menge aller Extrempunkte von $B(X')$ (vgl. etwa Definition VIII.4.1 in [Wer07]),
- $E(x, X)$ für ein $x \in X$ die Menge aller $\phi \in \text{ext } B(X')$, die die Bedingung $|\phi(x)| = \|x\|$ erfüllen.

Ist $V \subseteq X$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum von X mit einer Basis $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und ist $v^* \in V$ eine Bestapproximation aus V an einen Punkt $x \in X$, so definieren wir die Abbildung

$$\Psi : E(x - v^*, X) \rightarrow \mathbb{K}^n, \phi \mapsto \begin{pmatrix} \phi(x - v^*)\overline{\phi(v_1)} \\ \vdots \\ \phi(x - v^*)\overline{\phi(v_n)} \end{pmatrix}$$

und damit

$$Y := \text{conv} \{ \Psi(\phi); \phi \in E(x - v^*, X) \}$$

Der Satz von Cheney-Ikebe-Singer (siehe Seite 85 in [Hol72]) besagt dann, dass $0 \in Y$ erfüllt sein muss, womit sich die Existenz einer endlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung λ auf $E(x - v^*, X)$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{\phi \in E(x - v^*, X)} \lambda(\phi) \phi(x - v^*) \overline{\phi(v)} = 0 \quad \text{für alle } v \in V$$

ergibt. Setzen wir also

$$B(w_1, w_2) := \sum_{\phi \in E(x - v^*, X)} \lambda(\phi) \phi(w_1) \overline{\phi(w_2)} \quad \text{für alle } w_1, w_2 \in \mathcal{A}(V, x),$$

so rechnet man unmittelbar nach, dass hierdurch eine Faber-Sesquilinearform

$$B : \mathcal{A}(V, x) \times \mathcal{A}(V, x) \rightarrow \mathbb{K}$$

zu (V, x, v^*) im Sinne von Definition 3.8 gegeben ist.

Der Bezug zu unserer Konstruktion wird deutlich, wenn man

$$\text{ext } B(C(K)') = \{\zeta \delta_z; \zeta \in \mathbb{T}, z \in K\}$$

beachtet (vgl. Satz 16.28 in [Alb08]). Hierbei ist δ_z für $z \in K$ definiert durch

$$\delta_z : C(K) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(z).$$

Minimalpolynome und Tschebyscheffpolynome

1. Der polynomiale Approximationsraum und Minimalfunktionen

Sei E eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{C} . Wir bezeichnen mit

- $\mathcal{P}(E)$ den \mathbb{C} -Vektorraum der auf E eingeschränkten holomorphen Polynome,
- $\mathcal{P}_{\leq n}(E)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ den \mathbb{C} -Vektorraum der auf E eingeschränkten holomorphen Polynome vom Grad $\leq n$,
- $\mathcal{P}_n(E)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge aller auf E eingeschränkten holomorphen Polynome vom Grad n ,
- $\mathcal{P}_n^1(E)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge aller auf E eingeschränkten holomorphen Polynome vom Grad n mit führendem Koeffizienten 1.

Wir versehen E mit der Relativtopologie von \mathbb{C} und definieren weiter:

DEFINITION 4.1. Für $f \in C(E)$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{A}_n(f) := \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\leq n-1}(E), f) = \{\lambda f + p; p \in \mathcal{P}_{\leq n-1}(E), \lambda \in \mathbb{C}\}$$

den n -ten **polynomialen Approximationsraum zu f** . Ferner setzen wir

$$\mathcal{A}_n^1(f) := \{f + p; p \in \mathcal{P}_{\leq n-1}(E)\}.$$

Speziell ist

$$\mathcal{A}_n(e_n) = \mathcal{P}_{\leq n}(E) \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_n^1(e_n) = \mathcal{P}_n^1(E),$$

was die obige Notation motiviert.

DEFINITION 4.2. Sind $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C(E)$ gegeben und ist $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf $\mathcal{A}_n(f)$, so nennen wir eine Funktion $P \in \mathcal{A}_n^1(f)$ mit

$$\|P\| = \inf_{p \in \mathcal{A}_n^1(f)} \|p\|$$

eine **Minimalfunktion für $(\mathcal{A}_n^1(f), \|\cdot\|)$** . Im Spezialfall $f = e_n$ nennen wir eine Minimalfunktion P für $(\mathcal{P}_n^1(E), \|\cdot\|)$ aus naheliegenden Gründen auch ein **Minimalpolynom für $(\mathcal{P}_n^1(E), \|\cdot\|)$** .

Sind $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C(E)$ gegeben und ist $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf $\mathcal{A}_n(f)$, so lässt sich jede Funktion p aus $\mathcal{A}_n^1(f)$ in der Form $p = f - p^*$ mit einem Polynom $p^* \in \mathcal{P}_{\leq n-1}(E)$ darstellen. Genauer haben wir eine Bijektion

$$\mathcal{P}_{\leq n-1}(E) \rightarrow \mathcal{A}_n^1(f), \quad p^* \mapsto f - p^*,$$

weshalb offenbar

$$\inf_{p^* \in \mathcal{P}_{\leq n-1}(E)} \|f - p^*\| = \inf_{p \in \mathcal{A}_n^1(f)} \|p\|$$

gilt. Wir erhalten nun unmittelbar

LEMMA 4.3. Sind $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C(E)$ gegeben und ist $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf $\mathcal{A}_n(f)$, so ist $P \in \mathcal{A}_n^1(f)$ eine Minimalfunktion für $(\mathcal{A}_n^1(f), \|\cdot\|)$ genau dann, wenn das durch $P = f - P^*$ bestimmte Polynom $P^* \in \mathcal{P}_{\leq n-1}(E)$ eine Bestapproximation an f aus $\mathcal{P}_{\leq n-1}(E)$ bezüglich $\|\cdot\|$ ist. Insbesondere gibt es nach Satz 3.23 mindestens eine Minimalfunktion für $(\mathcal{A}_n^1(f), \|\cdot\|)$.

Zur Charakterisierung der Minimalfunktionen lässt sich natürlich Satz 3.27 verwenden. Aufgrund der besonderen Bedeutung, die diesem Argument im Folgenden zukommen wird, wollen wir an dieser Stelle die Notation etwas anpassen.

DEFINITION 4.4. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C(E)$ gegeben und sei $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf $\mathcal{A}_n(f)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n^1(f)$ gegeben, so nennen wir eine Sesquilinearform

$$B : \mathcal{A}_n(f) \times \mathcal{A}_n(f) \rightarrow \mathbb{C},$$

welche die Eigenschaften

- (i) Für alle $p \in \mathcal{A}_n(f)$ gilt $B(p, p) \geq 0$.
- (ii) Für alle $p \in \mathcal{P}_{\leq n-1}(E)$ gilt $B(P, p) = 0$ und $B(p, P) = 0$.
- (iii) Für alle $p \in \mathcal{A}_n(f)$ gilt $B(p, p) \leq \|p\|^2$.
- (iv) Es ist $B(P, P) = \|P\|^2$.

hat, eine **Faber-Sesquilinearform zu $(\mathcal{A}_n^1(f), \|\cdot\|, P)$** .

Offensichtlich ist eine Faber-Sesquilinearform zu $(\mathcal{A}_n^1(f), \|\cdot\|, P)$ auch eine Faber-Sesquilinearform zu $(\|\cdot\|, \mathcal{P}_{\leq n-1}(E), f, f - P)$ und umgekehrt. Nach Satz 3.27 ergibt sich also unmittelbar

SATZ 4.5. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C(E)$ gegeben und sei $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf $\mathcal{A}_n(f)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n^1(f)$ gegeben, sodass es eine Faber-Sesquilinearform zu $(\mathcal{A}_n^1(f), \|\cdot\|, P)$ gibt, dann ist P eine Minimalfunktion für $(\mathcal{A}_n^1(f), \|\cdot\|)$.

2. Definition der Tschebyschefffunktionen

In diesem Abschnitt sei K eine nichtleere, kompakte Teilmenge von \mathbb{C} . Wir wollen uns nun auf das Approximationsproblem bezüglich der Norm $\|\cdot\|_K$ beschränken.

SATZ 4.6. Besteht K aus mindestens $n + 1$ verschiedenen Punkten für ein $n \in \mathbb{N}$, so gibt es für alle $f \in C(K) \setminus \mathcal{P}_{\leq n-1}(K)$ genau eine Minimalfunktion für $(\mathcal{A}_n^1(f), \|\cdot\|_K)$, die n -te **Tschebyschefffunktion T_n^f für f** . Für diese gilt

$$T_n^f = f - p_n^*(f)$$

wobei wir mit $p_n^*(f)$ die eindeutig bestimmte Bestapproximation an die Funktion f aus $\mathcal{P}_{\leq n-1}(K)$ bezüglich $\|\cdot\|_K$ bezeichnen. Ferner besteht in diesem Fall die Menge

$$E(T_n^f, K) = \{z \in K; |T_n^f(z)| = \|T_n^f\|_K\}$$

aus mindestens $n + 1$ verschiedenen Punkten.

Beweis. Wie oben bereits festgestellt, ist $P \in \mathcal{A}_n^1(f)$ genau dann ein Minimalfunktion für $(\mathcal{A}_n^1(f), \|\cdot\|_K)$, wenn $P^* \in \mathcal{P}_{\leq n-1}(K)$ mit $P = f - P^*$ eine Bestapproximation an f aus $\mathcal{P}_{\leq n-1}(K)$ bezüglich $\|\cdot\|_K$ ist. Nach Satz 3.21 existiert aber genau eine solche Bestapproximation (welche wir mit $p_n^*(f)$ bezeichnen wollen), womit auch die Minimalfunktion eindeutig bestimmt sein muss. Hierzu beachten wir, dass das System $\mathcal{E} = \{e_0|_K, \dots, e_{n-1}|_K\}$ mit $\mathcal{P}_{\leq n-1}(K) = \text{LH}(\mathcal{E})$ der Haar-Bedingung aus Definition 3.19 genügt. In der Tat ergibt sich für paarweise verschiedene Punkte $z_1, \dots, z_n \in K$ über die Vandermonde-Determinante (vgl. etwa Beispiel 3.2.7 in [Fis05])

$$D_{\mathcal{E}}(z_1, \dots, z_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq k < l \leq n} (z_l - z_k) \neq 0.$$

Insbesondere erhalten wir die behauptete Darstellung $T_n^f = f - p_n^*(f)$. Ferner enthält die Menge $E(T_n^f, K)$ nach Korollar 3.20 mindestens $n + 1$ verschiedene Punkte. \square

Besteht K aus mindestens $n + 1$ verschiedenen Punkten für ein $n \in \mathbb{N}$, so nennen wir $T_n^{e_n} \in \mathcal{A}_n^1(e_n) = \mathcal{P}_n^1(K)$ das n -te **Tschebyscheffpolynom für K** und bezeichnen es mit T_n^K .

BEISPIEL 4.7 (abgeschlossene Einheitskreisscheibe). Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$T_n^{\overline{\mathbb{D}}}(w) = w^n \quad \text{und} \quad T_n^{\partial\mathbb{D}}(w) = w^n \quad \text{für alle } w \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Beweis. Wir zeigen hierzu, dass

$$\|p\|_{\partial\mathbb{D}} \geq 1 \quad \text{bzw.} \quad \|p\|_{\overline{\mathbb{D}}} \geq 1 \quad \text{für alle } p \in \mathcal{P}_n^1(\partial\mathbb{D}) \text{ bzw. } p \in \mathcal{P}_n^1(\overline{\mathbb{D}})$$

gilt. Nach dem Identitätssatz ist die Restriktionsabbildung

$$\mathcal{P}_n^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}_n^1(\partial\mathbb{D}), \quad p \mapsto p|_{\partial\mathbb{D}} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{P}_n^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}_n^1(\overline{\mathbb{D}}), \quad p \mapsto p|_{\overline{\mathbb{D}}}$$

injektiv, sodass wir $p \in \mathcal{P}_n^1(\partial\mathbb{D})$ bzw. $p \in \mathcal{P}_n^1(\overline{\mathbb{D}})$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit seiner eindeutigen Fortsetzung auf \mathbb{C} identifizieren können. Da p ein normiertes Polynom vom Grad n ist, gilt $p^{(n)}(0) = n!$, sodass die Cauchysche Integralformel

$$n! = p^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial_+\mathbb{D}} \frac{p(z)}{z^{n+1}} dz$$

liefert. Unter Verwendung des Maximumprinzips erhalten wir

$$n! \leq \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial_+\mathbb{D}} \frac{p(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq n! \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} \left| \frac{p(z)}{z^{n+1}} \right| = n! \|p\|_{\partial\mathbb{D}} = \|p\|_{\overline{\mathbb{D}}},$$

womit sich schließlich die gewünschte Abschätzung $\|p\|_{\partial\mathbb{D}} \geq 1$ bzw. $\|p\|_{\overline{\mathbb{D}}} \geq 1$ ergibt. Beachten wir nun, dass e_n diese Bedingungen mit Gleichheit erfüllt, so können wir aus der Eindeutigkeit des Tschebyscheffpolynoms für $\partial\mathbb{D}$ bzw. $\overline{\mathbb{D}}$ die behauptete Darstellung $T_n^{\overline{\mathbb{D}}} = e_n$ folgern. \square

3. Berechnung der Minimalpolynome

Da die Berechnung der Minimalpolynome meist mühsam ist, lohnt es, sich eingehender mit deren Transformationsverhalten zu beschäftigen.

LEMMA 4.8. *Seien $E, F \subset \mathbb{C}$ nicht leer und $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\|\cdot\|_1$ eine Halbnorm auf $\mathcal{P}_{\leq m}(E)$ und $\|\cdot\|_2$ eine Halbnorm auf $\mathcal{P}_{\leq n}(F)$. Ferner sei*

$$\tau : \mathcal{P}_m^1(E) \rightarrow \mathcal{P}_n^1(F)$$

eine beliebige Abbildung mit

$$\|\tau(p)\|_2 \leq \|p\|_1 \quad \text{für alle } p \in \mathcal{P}_m^1(E).$$

Ist nun P_n^L ein Minimalpolynom für $(\mathcal{P}_n^1(F), \|\cdot\|_2)$, so ist jedes Polynom $P_m^K \in \mathcal{P}_m^1(E)$ mit

$$\|P_m^E\|_1 = \|P_n^F\|_2$$

ein Minimalpolynom für $(\mathcal{P}_m^1(E), \|\cdot\|_1)$.

Beweis. Für alle $p \in \mathcal{P}_m^1(E)$ gilt

$$\|P_m^E\|_1 = \|P_n^F\|_2 \leq \|\tau(p)\|_2 \leq \|p\|_1$$

und damit wegen $P_m^K \in \mathcal{P}_m^1(E)$ auch

$$\|P_m^E\|_1 = \inf_{p \in \mathcal{P}_m^1(E)} \|p\|_1,$$

d.h. P_m^E ist ein Minimalpolynom für $(\mathcal{P}_{\leq m}(E), \|\cdot\|_1)$ □

Wie bereits der sehr kurze und einfache Beweis vermuten lässt, liegt die Bedeutung dieses Lemmas nicht in der Aussage selbst, sondern vielmehr in seinem konzeptionellen Charakter.

Wir ergänzen noch die folgende, ebenfalls einfache aber nützliche Beobachtung:

LEMMA 4.9. *Sei $E \subset \mathbb{C}$ nicht leer und $n \in \mathbb{N}$. Ist $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf $\mathcal{P}_{\leq n}(E)$ und $r > 0$, so ist $P \in \mathcal{P}_n^1(E)$ genau dann ein Minimalpolynom für $(\mathcal{P}_n^1(E), \|\cdot\|)$, wenn P auch ein Minimalpolynom für $(\mathcal{P}_n^1(E), r\|\cdot\|)$ ist.*

Beweis. Ein Polynom $P \in \mathcal{P}_n^1(E)$ ist definitionsgemäß genau dann ein Minimalpolynom für $(\mathcal{P}_n^1(E), \|\cdot\|)$, wenn

$$\|P\| = \inf_{p \in \mathcal{P}_n^1(E)} \|p\|$$

gilt. Dies ist offensichtlich äquivalent dazu, dass

$$r\|P\| = \inf_{p \in \mathcal{P}_n^1(E)} r\|p\|$$

erfüllt bzw. P ein Minimalpolynom für $(\mathcal{P}_n^1(E), r\|\cdot\|)$ ist. □

Damit können wir zeigen:

LEMMA 4.10. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\#K \geq n + 1$.*

(i) *Sind $a \in \mathbb{C}$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ gegeben, so gilt*

$$T_n^{a+\lambda K}(w) = \lambda^n T_n^K\left(\frac{w-a}{\lambda}\right), \quad w \in a + \lambda K.$$

(ii) Sei $K^* := \{\bar{z}; z \in K\}$. Dann gilt

$$T_n^{K^*}(w) = \overline{T_n^K(\bar{w})}, \quad w \in K^*.$$

Beweis. (i) Für $a \in \mathbb{C}$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ definieren wir die offenbar bijektive Abbildung

$$\tau : \mathcal{P}_n^1(K) \rightarrow \mathcal{P}_n^1(a + \lambda K)$$

durch

$$\tau(p)(w) := \lambda^n p\left(\frac{w - a}{\lambda}\right), \quad w \in a + \lambda K.$$

Wir wählen die Normen

$$\|\cdot\|_1 := |\lambda|^n \|\cdot\|_K \quad \text{und} \quad \|\cdot\|_2 := \|\cdot\|_{a + \lambda K}$$

und erhalten für alle $p \in \mathcal{P}_n^1(K)$

$$\|\tau(p)\|_2 = \|\tau(p)\|_{a + \lambda K} = |\lambda|^n \|p\|_K = \|p\|_1.$$

Nach Lemma 4.8 ist daher $\tau^{-1}(T_n^{a + \lambda K})$ ein Minimalpolynom für $(\mathcal{P}_n^1(K), \|\cdot\|_1)$ und nach Lemma 4.9 auch für $(\mathcal{P}_n^1(K), \|\cdot\|_K)$. Die Eindeutigkeitsaussage in Satz 4.6 zeigt nun, dass bereits $\tau^{-1}(T_n^{a + \lambda K}) = T_n^K$ gelten muss. Also ist

$$T_n^{a + \lambda K} = \tau(T_n^K),$$

was nach Definition der Abbildung τ die unter (i) behauptete Formel zeigt.

(ii) Wir definieren eine offenbar bijektive Abbildung

$$\tau : \mathcal{P}_n^1(K) \rightarrow \mathcal{P}_n^1(K^*)$$

durch

$$\tau(p)(w) := \overline{p(\bar{w})}, \quad w \in K^*.$$

Man stellt unmittelbar fest, dass diese

$$\|\tau(p)\|_{K^*} = \|p\|_K$$

für alle $p \in \mathcal{P}_n^1(K)$ erfüllt. Gemäß Lemma 4.8 liefert $\tau^{-1}(T_n^{K^*})$ daher ein Minimalpolynom für $(\mathcal{P}_{\leq n}(K), \|\cdot\|_K)$. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage in Satz 4.6 können wir nun $\tau^{-1}(T_n^{K^*}) = T_n^K$ folgern. Also erhalten wir

$$T_n^{K^*} = \tau(T_n^K),$$

womit nach Definition der Abbildung τ die in (ii) behauptete Identität bewiesen ist. \square

Als weiteres, durchaus interessantes Anwendungsbeispiel wollen wir uns nun den Tschebyscheffpolynomen für Elemente aus normierten komplexen Banachalgebren zuwenden. Ist $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ eine komplexe Banachalgebra mit Einselement 1, so können wir zu $x \in \mathfrak{X}$ analog zu Beispiel 3.25 die durch den Algebrenhomomorphismus

$$\Phi_x : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{X}, \quad p \mapsto p(x).$$

auf $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ induzierte Halbnorm $\|\cdot\|_*$ betrachten, d.h. es gilt

$$\|p\|_* := \|\Phi_x(p)\| \quad \text{für alle } p \in \mathcal{P}(\mathbb{C}).$$

In dieser Situation nennen wir ein Minimalpolynom P für $(\mathcal{P}_n^1(\mathbb{C}), \|\cdot\|_*)$ (man beachte, dass nach Lemma 4.3 mindestens ein solches existiert) auch ein **n -tes Tschebyscheffpolynom zu x** . Diese, zweifelsohne funktionalanalytisch interessanten Polynome wurden bereits von P. Halmos in seiner 1971 erschienenen Arbeit [Hal71] eingeführt.

Reichhaltig ist deren Theorie insbesondere im Fall $\mathfrak{A} = \text{Mat}(n, \mathbb{C})$, d.h. für die komplexe Algebra der $(n \times n)$ -Matrizen über \mathbb{C} , welche wir bekanntlich mit $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ identifizieren und auf diese Weise zu einer komplexen Banachalgebra machen können. Beispielsweise behandeln A. Greenbaum und L. N. Trefethen in ihrer gemeinsamen Arbeit [GT94] von 1994 die Existenz- und Eindeutigkeitsfragen dieses und weiterer, damit in Beziehung stehender Approximationsprobleme. In der Zusammenarbeit von K.-C. Toh und L. N. Trefethen entstand dann bis 1998 die Arbeit [TT98], welche einen Algorithmus zur numerischen Bestimmung derartiger Polynome liefert. Verbessert und verallgemeinert wurden die Eindeutigkeitsaussagen von E. Albrecht in seiner 2009 erschienenen Arbeit [Alb09]. Dort findet sich etwa

SATZ 4.11 (Theorem 2 in [Alb09]). *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein gleichmäßig konvexer normierter Raum (vgl. Definition 3.5). Für $A \in \mathcal{L}(X)$ setzen wir*

$$\deg(A) := \inf\{n \in \mathbb{N}; \exists p \in \mathcal{P}_n^1(\mathbb{C}) : p(A) = 0\}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n < \deg(A)$ existiert dann ein eindeutig bestimmtes Tschebyscheffpolynom vom Grad n für A .

Mit unseren bisherigen Methoden ergibt sich in diesem Zusammenhang der folgende Satz:

SATZ 4.12. *Sei $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|)$ eine C^* -Algebra mit Einselement 1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und jedes normale Element $x \in \mathfrak{A}$ dessen Spektrum $\sigma_{\mathfrak{A}}(x)$ aus mindestens $n+1$ Punkten besteht, ist das Tschebyscheffpolynom für x eindeutig bestimmt und gegeben durch $T_n^{\sigma_{\mathfrak{A}}(x)}$.*

Beweis. Zu einem normalen Element $x \in \mathfrak{A}$ betrachten wir den stetigen Funktionalkalkül, also den isometrischen $*$ -Isomorphismus

$$\Phi_x : C(\sigma_{\mathfrak{A}}(x)) \rightarrow \mathfrak{A},$$

der den eingangs definierten polynomialen Funktionalkalkül fortsetzt. Da $\sigma_{\mathfrak{A}}(x)$ nach Voraussetzung aus mindestens $n+1$ verschiedenen Punkten besteht, ist die Restriktionsabbildung

$$\rho_n : \mathcal{P}_{\leq n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}_{\leq n}(\sigma_{\mathfrak{A}}(x)), p \mapsto p|_{\sigma_{\mathfrak{A}}(x)}$$

bijektiv. Mit den obigen Bezeichnungen erhalten wir dann unmittelbar

$$\|p\|_* = \|\Phi_x(\rho_n(p))\| \quad \text{für alle } p \in \mathcal{P}_{\leq n}(\mathbb{C}).$$

Da Φ_x isometrisch ist, gilt ferner

$$\|\rho_n(p)\|_{\sigma_{\mathfrak{A}}(x)} = \|\Phi_x(\rho_n(p))\| = \|p\|_* \quad \text{für alle } p \in \mathcal{P}_{\leq n}(\mathbb{C}),$$

sodass

$$\rho_n : (\mathcal{P}_{\leq n}(\mathbb{C}), \|\cdot\|_*) \rightarrow (\mathcal{P}_{\leq n}(\sigma_{\mathfrak{A}}(x)), \|\cdot\|_{\sigma_{\mathfrak{A}}(x)})$$

einen isometrischen Vektorraumisomorphismus darstellt. Da $\sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ aus mindestens $n + 1$ verschiedenen Punkten besteht, ist das Minimalpolynom $T_n^{\sigma_{\mathfrak{R}}(x)}$ für $(\mathcal{P}_{\leq n}(\sigma_{\mathfrak{R}}(x)), \|\cdot\|_{\sigma_{\mathfrak{R}}(x)})$ nach Satz 4.6 eindeutig bestimmt.

Zudem stellt dieses Tschebyscheffpolynom $T_n^{\sigma_{\mathfrak{R}}(x)}$ nach Lemma 4.8 ein Minimalpolynom für $(\mathcal{P}_{\leq n}(\mathbb{C}), \|\cdot\|_*)$ dar, d.h. $T_n^{\sigma_{\mathfrak{R}}(x)}$ ist ein Tschebyscheffpolynom für x . Umgekehrt ist aber jedes Tschebyscheffpolynom für x ein Minimalpolynom für $(\mathcal{P}_{\leq n}(\mathbb{C}), \|\cdot\|_*)$ und daher nach Lemma 4.8 auch ein Minimalpolynom für $(\mathcal{P}_{\leq n}(\sigma_{\mathfrak{R}}(x)), \|\cdot\|_{\sigma_{\mathfrak{R}}(x)})$, muss also bereits mit $T_n^{\sigma_{\mathfrak{R}}(x)}$ übereinstimmen. \square

4. Eigenschaften der Tschebyscheffpolynome

Wir wollen uns nun den Eigenschaften der Tschebyscheffpolynome zuwenden.

4.1. Symmetrieeigenschaften. Weist das betrachtete Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ eine der Symmetrien aus Definition 2.25 auf, so zeigen die zugehörigen Tschebyscheffpolynome spezielle Invarianzeigenschaften.

KOROLLAR 4.13. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\#K \geq n + 1$.*

- (i) *Ist K für ein $k \in \mathbb{N}$ k -fach zentralsymmetrisch für ein $k \in \mathbb{N}$ die Menge $\mu_k(\mathbb{C})$ der k -ten Einheitswurzeln durch Multiplikation auf K , d.h.*

$$\mu_k(\mathbb{C}) \times K \rightarrow K, (\zeta, z) \mapsto \zeta z$$

ist wohldefiniert, dann gilt für alle $\zeta \in \mu_k(\mathbb{C})$

$$T_n^K(\zeta w) = \zeta^n T_n^K(w), \quad w \in K.$$

Insbesondere verschwinden dann gemäß Lemma A.4 einige der Koeffizienten von T_n^K .

- (i) *Ist $K^* = K$, so gilt*

$$T_n^K(\bar{w}) = \overline{T_n^K(w)}, \quad w \in K.$$

Insbesondere besitzen dann alle Tschebyscheffpolynome reelle Koeffizienten.

Beweis. (i) Für jedes $\zeta \in \mu_k(\mathbb{C})$ gilt nach Voraussetzung $\zeta^{-1}K = K$ und daher nach Lemma 4.10 (i) für alle $w \in K$

$$T_n^K(w) = T_n^{\zeta^{-1}K}(w) = \zeta^{-n} T_n^K(\zeta w) \quad \text{bzw.} \quad T_n^K(\zeta w) = \zeta^n T_n^K(w),$$

womit (i) gezeigt ist.

- (ii) Nach Lemma 4.10 (ii) erhalten wir für alle $w \in K$, wie behauptet,

$$T_n^K(\bar{w}) = T_n^{K^*}(\bar{w}) = \overline{T_n^K(w)}.$$

Der Zusatz ist damit offensichtlich. \square

4.2. Transfinites Durchmesser. Wir führen zunächst einen weiteren Kapazitätsbegriff ein:

DEFINITION 4.14 (Definition 5.1.1 in [Ran95]). Die **logarithmische Kapazität** $c(E)$ einer Menge $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$c(E) := \sup_{\mu \in \mathcal{B}^1(E)} e^{I(\mu)},$$

wobei wir $e^{-\infty} = 0$ vereinbaren und

- mit $\mathcal{B}^1(E)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße mit kompaktem Träger in E bezeichnen.
- für alle endlichen Borelmaße μ auf \mathbb{C} mit kompaktem Träger die **Energie** $I(\mu)$ von μ durch

$$I(\mu) := \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} \log |z - w| d\mu(z) d\mu(w)$$

definieren (vgl. Definition 3.2.1 in [Ran95]).

In Korollar 2.8 haben wir bereits gesehen, dass der transfinite Durchmesser eines zulässigen Kompaktums mit dessen analytischer Kapazität übereinstimmt. Diese Beobachtung ergänzen wir um die beiden folgenden Sätze:

SATZ 4.15 (Corollary 5.2.2 in [Ran95]). *Für alle $w \in \mathbb{C}$ und alle $r > 0$ gilt*

$$c(\overline{D(w, r)}) = r.$$

SATZ 4.16 (Theorem 5.2.3 in [Ran95]). *Seien K_1, K_2 nichtleere kompakte Teilmengen von \mathbb{C} . Ist $f : \Omega(K_1) \rightarrow \Omega(K_2)$ eine holomorphe Funktion (zwischen Riemannschen Flächen) mit der Eigenschaft*

$$f(z) = z + O(1) \quad \text{für } z \rightarrow \infty,$$

dann gilt

$$c(K_2) \leq c(K_1).$$

Ist $f : \Omega(K_1) \rightarrow \Omega(K_2)$ sogar eine biholomorphe Abbildung, dann gilt

$$c(K_2) = c(K_1).$$

Damit können wir nun folgern:

KOROLLAR 4.17. *Ist $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum, dann stimmen die folgenden Größen überein:*

- Der transfinite Durchmesser $r(K)$,
- die analytische Kapazität $\gamma(K)$ und
- die logarithmische Kapazität $c(K)$.

Beweis. Die Gleichheit von $r(K)$ und $\gamma(K)$ haben wir, wie oben schon erwähnt, bereits in Korollar 2.8 gesehen. Es genügt also zu zeigen, dass auch der transfinite Durchmesser $r(K)$ und die logarithmische Kapazität $c(K)$ übereinstimmen.

Da K zulässig ist, stellt die zu K gehörende Abbildung $\psi_K : \Delta_{r(K)} \rightarrow \Omega(K)$

eine biholomorphe Abbildung zwischen $\Omega(\overline{D(0, r(K))}) = \Delta_{r(K)}$ und $\Omega(K)$ dar, welche nach Satz 2.5 die Bedingung

$$\psi_K(z) = z + O(1) \quad \text{für } z \rightarrow \infty$$

erfüllt. Nach Satz 4.16 und Satz 4.15 gilt also

$$c(K) = c(\overline{D(0, r(K))}) = r(K),$$

womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Da für die Berechnung der logarithmischen Kapazität durchaus praktikable Verfahren zur Verfügung stehen (etwa über Greensche Funktionen, vgl. Theorem 5.2.1 in [Ran95] oder [RR07]), bietet sich damit auch die Möglichkeit zur Berechnung des transfiniten Durchmessers. Beispielsweise erhält man:

SATZ 4.18 (Theorem 5.2.5 in [Ran95]). *Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei q ein beliebiges holomorphes Polynom der Form*

$$q(z) = \sum_{j=0}^d a_j z^j, \quad z \in \mathbb{C}$$

mit $a_d \neq 0$. Dann gilt

$$c(q^{-1}(K)) = \left(\frac{c(K)}{|a_d|} \right)^{\frac{1}{d}}.$$

An dieser Stelle sei darüber hinaus auf die Tabelle 5.1 in [Ran95] verwiesen, wo sich neben einigen uns bereits bekannten Werten noch weitere interessante Beispiele finden.

Ferner liefert dies auch eine Interpretation des Begriffs „transfiniten Durchmessers“. Hierzu benötigen wir allerdings

DEFINITION 4.19 (Definition 5.5.1 in [Ran95]). Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei $n \geq 2$. Wir nennen dann die Zahl

$$\delta_n(K) := \sup_{w_1, \dots, w_n \in K} \prod_{1 \leq k < l \leq n} |w_l - w_k|^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

den **n -ten Durchmesser von K** . Ein n -Tupel $(w_1, \dots, w_n) \in K^n$, für welches das obige Supremum angenommen wird, heißt ein **Fekete n -Tupel für K** . Ein Polynom der Form

$$q(z) = \prod_{j=1}^n (z - w_j)$$

heißt **Feketepolynom für K** , falls (w_1, \dots, w_n) ein Fekete n -Tupel für K ist.

Der folgende Satz gibt nun die angekündigte Interpretation.

SATZ 4.20 (von Fekete-Szegő, Theorem 5.5.2 in [Ran95]). *Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Die Folge $(\delta_n(K))_{n=2}^{\infty}$ der n -ten Durchmesser von K ist monoton fallend und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(K) = c(K).$$

Damit sehen wir nun unter Beachtung von Korollar 4.17: Im Falle eines zulässigen Kompaktums ist der transfinite Durchmesser der Grenzwert der n -ten Durchmesser.

An dieser Stelle ist für uns aber ein Zusammenhang zu Tschebyscheffpolynomen von Interesse, welcher sich aus dem folgenden Satz ergibt.

SATZ 4.21 (Theorem 5.5.4 in [Ran95]). Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Dann gilt:

- (i) Ist q ein normiertes Polynom vom Grad $n \geq 1$, so gilt $\|q\|_K^{\frac{1}{n}} \geq c(K)$.
- (ii) Ist q ein Feketepolynom vom Grad $n \geq 2$, so gilt $\|q\|_K^{\frac{1}{n}} \leq \delta_n(K)$.

Wir erhalten das folgende bemerkenswerte Korollar:

KOROLLAR 4.22 (Corollary 5.5.5 in [Ran95]). Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei

$$m_n(K) := \inf_{p \in \mathcal{P}_n^1(K)} \|p\|_K,$$

dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(K)^{\frac{1}{n}} = c(K).$$

Besteht K aus unendlich vielen Punkten, so ergibt sich insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n^K\|_K^{\frac{1}{n}} = c(K).$$

Auf überraschende Weise tragen daher die Tschebyscheffpolynome eines zulässigen Kompaktums eine auf den ersten Blick rein analytische Information über das Kompaktum, die uns im Zusammenhang mit Faberpolynomen begegnet ist. Dies nährt den Verdacht, dass diese beiden Klassen von Polynomen enger verwandt sind, als die sehr unterschiedlichen Ursprünge vermuten lassen. Dieses Phänomen soll in den folgenden Kapiteln genauer studiert werden.

5. Beispiele

In diesem Abschnitt wollen wir nun einige Beispiele für Tschebyscheffpolynome kennen lernen. Dabei wollen wir insbesondere die Tauglichkeit von Faber-Sesquilinearformen bei deren Bestimmung erproben.

In Beispiel 4.7 haben wir bereits gesehen, dass das n -te Tschebyscheffpolynom $T_n^{\overline{\mathbb{D}}}$ für die abgeschlossene Einheitskreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}$ durch das Monom e_n gegeben ist. Während wir dort einen direkten Beweis gegeben haben, wollen wir nun auch einen Nachweis mittels einer geeigneten Faber-Sesquilinearform führen.

BEISPIEL 4.23 (abgeschlossene Einheitskreisscheibe). Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$T_n^{\overline{\mathbb{D}}}(w) = w^n \quad \text{für alle } w \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Beweis. Wir betrachten die durch

$$B(p, q) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(e^{it}) \overline{q(e^{it})} dt \quad \text{für } p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$$

definierte hermitesche Sesquilinearform

$$B : \mathcal{P}(\overline{\mathbb{D}}) \times \mathcal{P}(\overline{\mathbb{D}}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ liefert die Restriktion $B_n := B|_{\mathcal{P}_{\leq n}(\overline{\mathbb{D}}) \times \mathcal{P}_{\leq n}(\overline{\mathbb{D}})}$ eine hermitesche Sesquilinearform

$$B_n : \mathcal{P}_{\leq n}(\overline{\mathbb{D}}) \times \mathcal{P}_{\leq n}(\overline{\mathbb{D}}) \rightarrow \mathbb{C},$$

welche die folgenden Eigenschaften hat:

(i) Für alle $p \in \mathcal{P}_{\leq n}(\overline{\mathbb{D}})$ ist

$$B_n(p, p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p(e^{it})|^2 dt \geq 0.$$

(ii) Für alle $\mu, \nu \in \{0, \dots, n\}$ gilt

$$B_n(e_\mu, e_\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_\mu(e^{it}) \overline{e_\nu(e^{it})} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\mu-\nu)t} dt = \delta_{\mu\nu}$$

und damit insbesondere

$$B_n(e_n, e_k) = 0 \quad \text{bzw.} \quad B_n(e_k, e_n) = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1.$$

(iii) Für alle $p \in \mathcal{P}_{\leq n}(\overline{\mathbb{D}})$ erhalten wir unter Beachtung des Maximumprinzips

$$B_n(p, p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p(e^{it})|^2 dt \leq \left(\max_{0 \leq t \leq 2\pi} |p(e^{it})| \right)^2 = \|p\|_{\overline{\mathbb{D}}}^2.$$

(iv) Die Rechnung in (ii) zeigt ferner, dass

$$B_n(e_n, e_n) = 1 = \|e_n\|_{\overline{\mathbb{D}}}^2.$$

Gemäß Definition 4.4 liefert B_n eine Faber-Sesquilinearform für $(\mathcal{P}_n^1(\overline{\mathbb{D}}), \|\cdot\|_{\overline{\mathbb{D}}}, e_n)$, d.h. nach Satz 4.5 gilt $T_n^{\overline{\mathbb{D}}} = e_n$. \square

Ein interessanteres Beispiel stellen Ellipsen dar.

BEISPIEL 4.24 (Ellipse). In Beispiel 2.20 haben wir zu $E = [-2, 2]$ mit $r(E) = 1$ die biholomorphe Abbildung

$$\psi_E : \Delta_1 \rightarrow \Omega(E), \quad z \mapsto z + \frac{1}{z}$$

angegeben, welche sich in naheliegender Weise zu einer holomorphen Funktion $\psi_E : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ fortsetzen lässt. Ferner hatten wir gesehen, dass die Faberpolynome zu E die Eigenschaft

$$(F_n^E \circ \psi_E)(z) = z^n + \frac{1}{z^n} \quad \text{für alle } z \in \Delta_1^* \text{ und alle } n \in \mathbb{N}$$

besitzen. Für $r \geq 1$ hatten wir mit E_r das durch $\psi_E(\Delta_r) = \Omega(E_r)$ bestimmte zulässige Kompaktum bezeichnet, d.h. es ist $E_1 = E$. Hierbei lässt sich ∂E_r für $r \geq 1$ durch den Weg $t \mapsto \psi_E(re^{it})$ parametrisieren.

Für alle $r \geq 1$ und alle $t \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$F_n^E(\psi_E(re^{it})) = r^n e^{int} + \frac{1}{r^n} e^{-int} = \left(r^n + \frac{1}{r^n} \right) \cos(nt) + i \left(r^n - \frac{1}{r^n} \right) \sin(nt)$$

und daher

$$\begin{aligned}
|F_n^E(\psi_E(re^{it}))|^2 &= \left(r^n + \frac{1}{r^n}\right)^2 \cos^2(nt) + \left(r^n - \frac{1}{r^n}\right)^2 \sin^2(nt) \\
&= r^{2n} + \frac{1}{r^{2n}} + 2(\cos^2(nt) - \sin^2(nt)) \\
&= r^{2n} + \frac{1}{r^{2n}} + \underbrace{2 \cos(2nt)}_{\leq 1} \\
&\leq \left(r^n + \frac{1}{r^n}\right)^2.
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$|F_n^E(\psi_E(re^{it}))| \leq r^n + \frac{1}{r^n}$$

mit Gleichheit genau für $t = \theta_k := \frac{k\pi}{n}$ mit $k = 0, \dots, 2n-1$. Insbesondere ist für $k = 0, \dots, 2n-1$ (im Fall $r > 1$ nach dem Maximumprinzip für holomorphe Funktionen)

$$\|F_n^E\|_{E_r} = \|F_n^E\|_{\partial E_r} = \max_{t \in [0, 2\pi]} |F_n^E(\psi_E(re^{it}))| = |F_n^E(\psi_E(re^{i\theta_k}))|$$

und daher insbesondere

$$E(F_n^E, E_r) = \{\psi_E(re^{i\theta_k}); k = 0, \dots, 2n-1\}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir nun eine Sesquilinearform

$$B : \mathcal{P}_{\leq n}(E_r) \times \mathcal{P}_{\leq n}(E_r) \rightarrow \mathbb{C}$$

durch

$$B(p, q) := \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} p(\psi_E(re^{i\theta_k})) \overline{q(\psi_E(re^{i\theta_k}))}, \quad \text{für } p, q \in \mathcal{P}_{\leq n}(E_r)$$

und rechnen nach, dass diese die folgenden Eigenschaften hat:

(i) Für alle $p \in \mathcal{P}_{\leq n}(E_r)$ ist

$$B(p, p) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} |p(\psi_E(re^{i\theta_k}))|^2 \geq 0.$$

(ii) Die Faberpolynome erfüllen für alle $\mu, \nu \in \{0, \dots, n\}$ die Bedingung

$$\begin{aligned}
&B(F_\mu^E, F_\nu^E) \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} F_\mu^E(\psi_E(re^{i\theta_k})) \overline{F_\nu^E(\psi_E(re^{i\theta_k}))} \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \left(r^\mu e^{i\mu\theta_k} + \frac{1}{r^\mu} e^{-i\mu\theta_k} \right) \overline{\left(r^\nu e^{i\nu\theta_k} + \frac{1}{r^\nu} e^{-i\nu\theta_k} \right)} \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \left(r^{\mu+\nu} e^{i(\mu-\nu)\theta_k} + \frac{1}{r^{\mu+\nu}} e^{-i(\mu-\nu)\theta_k} + r^{\mu-\nu} e^{i(\mu+\nu)\theta_k} + \frac{1}{r^{\mu-\nu}} e^{-i(\mu+\nu)\theta_k} \right).
\end{aligned}$$

Da ferner nach Lemma A.3 für alle $\omega \in \{-2n, -2n+1, \dots, 2n-1, 2n\}$

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} e^{i\omega\theta_k} = \frac{1}{2n} \sum_{\zeta \in \mu_{2n}(\mathbb{C})} \zeta^\omega = \begin{cases} 0, & \omega \neq 0, \pm 2n \\ 1, & \omega = 0, \pm 2n \end{cases}$$

gilt, erhalten wir für alle $\mu, \nu \in \{0, \dots, n\}$ wegen $\pm(\mu + \nu), \pm(\mu - \nu) \in \{-2n, \dots, 2n\}$

$$B(F_\mu^K, F_\nu^K) = \begin{cases} (r^{2\nu} + \frac{1}{r^{2\nu}})\delta_{\mu\nu}, & \mu + \nu \neq 0, 2n \\ 4, & \mu + \nu = 0 \\ r^{2n} + 2 + \frac{1}{r^{2n}}, & \mu + \nu = 2n \end{cases}.$$

Insbesondere folgt für alle $p \in \mathcal{P}_{\leq n-1}(E_r) = \text{LH}\{F_0^E|_{E_r}, \dots, F_{n-1}^E|_{E_r}\}$

$$B(F_n^E, p) = 0 \quad \text{und} \quad B(p, F_n^E) = 0.$$

(iii) Für alle $p \in \mathcal{P}_n(E_r)$ gilt

$$B(p, p) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \underbrace{|p(\psi_E(re^{i\theta_k}))|^2}_{\leq \|p\|_{E_r}^2} \leq \|p\|_{E_r}^2.$$

(iv) Nach (ii) ergibt sich speziell

$$B(F_n^E, F_n^E) = r^{2n} + 2 + \frac{1}{r^{2n}} = \left(r^n + \frac{1}{r^n}\right)^2 = \|F_n^E\|_{E_r}^2.$$

Mit Satz 4.5 stellt daher F_n^E das n -te Tschebyscheffpolynom für E_r dar.

Die im obigen Beispiel angegebene Herleitung der Tschebyscheffpolynome für die Kompakta E_r mit $r \geq 1$ basiert auf der Arbeit **[Fab20]** von G. Faber, durch welche letztlich das von uns verwendete Konzept der Faber-Sesquilinearform motiviert wird. Dieses Beispiel macht also nachträglich unsere ungewohnte Namensgebung verständlich.

BEISPIEL 4.25. Wie in Beispiel 2.19 bezeichnen wir für $2 \leq n \in \mathbb{N}$ mit H_n die Hypocycloide mit n Spitzen. Ist $r \geq r(H_n) = 1$ gegeben, so definieren wir das Polynom

$$P_{n,r}(w) := w^n - a_n(r), \quad w \in \mathbb{C}$$

mit der Konstanten

$$a_n(r) := \frac{1}{2} r^n \left(\left(1 + \frac{1}{n-1} \frac{1}{r^n}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{n-1} \frac{1}{r^n}\right)^n \right).$$

Ist in dieser Situation die Bedingung

$$(4.1) \quad \|P_{n,r}\|_{(H_n)_r} \leq m_n(r)$$

mit der Konstanten

$$m_n(r) := \frac{1}{2} r^n \left(\left(1 + \frac{1}{n-1} \frac{1}{r^n}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{n-1} \frac{1}{r^n}\right)^n \right).$$

erfüllt, so ergibt sich

$$T_n^{(H_n)r} = P_{n,r} \quad \text{und} \quad \|T_n^{(H_n)r}\|_{(H_n)r} = m_n(r)$$

und es gilt darüber hinaus

$$E(T_n^{(H_n)r}, (H_n)r) \supseteq \{\psi_{H_n}(r\zeta); \zeta \in \mu_{2n}(\mathbb{C})\}.$$

Beispielsweise erhalten wir

$$T_n^{(H_3)r}(w) = w^3 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{8r^6}\right), \quad w \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst die im Anhang definierte Sesquilinearform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{2n} : C(\mathbb{T}) \times C(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Nach dem dortigen Lemma A.3 gilt für alle $k, l \in \mathbb{Z}$

$$\langle e_k, e_l \rangle_{2n} = \begin{cases} 1, & k \equiv l \pmod{2n} \\ 0, & k \not\equiv l \pmod{2n} \end{cases}.$$

Sind nun $k, l \in \{0, \dots, n\}$ gegeben, so ist damit

$$\langle e_{k-n\mu}, e_{l-n\nu} \rangle_{2n} = \begin{cases} 1, & n(\mu - \nu) \equiv k - l \pmod{2n} \\ 0, & n(\mu - \nu) \not\equiv k - l \pmod{2n} \end{cases}$$

für alle $\mu \in \{0, \dots, k\}$ und $\nu \in \{0, \dots, l\}$ erfüllt. Wir nehmen nun an, für $\mu \in \{0, \dots, k\}$ und $\nu \in \{0, \dots, l\}$ gilt

$$n(\mu - \nu) \equiv k - l \pmod{2n}.$$

FALL 1: Gilt $\mu \equiv \nu \pmod{2}$, so ist insbesondere die Bedingung

$$0 \equiv n(\mu - \nu) \equiv k - l \pmod{2n} \quad \text{also} \quad k - l \equiv 0 \pmod{2n}$$

erfüllt. Da nach Voraussetzung aber $k - l \in \{-n, \dots, n\}$ ist, muss daher bereits $k = l$ gelten.

FALL 2: Gilt $\mu \not\equiv \nu \pmod{2}$, so ist offenbar $\mu - \nu \equiv 1 \pmod{2}$ und damit auch

$$n \equiv n(\mu - \nu) \equiv k - l \pmod{2n}.$$

Da nach Voraussetzung aber $k, l \in \{0, \dots, n\}$ gilt, ist dies nur möglich, falls $(k, l) = (n, 0)$ oder $(k, l) = (0, n)$ ist.

Damit sehen wir, dass der Ausdruck $\langle e_{k-n\mu}, e_{l-n\nu} \rangle_{2n}$ genau dann nicht verschwindet, wenn

- entweder $k = l$ und $\mu \equiv \nu \pmod{2}$
- oder $(k, l) \in \{(n, 0), (0, n)\}$ und $\mu \equiv \nu \pmod{2}$

erfüllt ist.

Wir definieren nun für $r > r(K)$ eine Sesquilinearform

$$B_{n,r} : \mathcal{P}_{\leq n}((H_n)r) \times \mathcal{P}_{\leq n}((H_n)r) \rightarrow \mathbb{C}$$

durch

$$B_{n,r}(p, q) := \frac{1}{2n} \sum_{\zeta \in \mu_{2n}(\mathbb{C})} p(\psi_n(r\zeta)) \overline{q(\psi_n(r\zeta))} \quad \text{für } p, q \in \mathcal{P}_{\leq n}((H_n)_r),$$

wobei wir mit ψ_n die in Beispiel 2.19 angegebene holomorphe Abbildung von $\widehat{\mathbb{C}}$ nach $\widehat{\mathbb{C}}$ bezeichnen. Wir erinnern uns daran, dass zudem $\psi_{(H_n)_r} = \psi_n|_{\Delta_r}$ gilt. Wir zeigen nun, dass diese die Bedingung $B_{n,r}(P_{n,r}, p) = 0$ für alle $p \in \mathcal{P}_{\leq n-1}((H_n)_r)$ erfüllt. Wegen

$$\mathcal{P}_{\leq n-1}((H_n)_r) = \text{LH}\{e_l|_{(H_n)_r}; l = 0, \dots, n-1\}$$

genügt es hierfür zu zeigen, dass diese die Eigenschaft $B_{n,r}(P_{n,r}, e_l) = 0$ für $l = 0, \dots, n-1$ hat. Mit obigen Beobachtungen rechnen wir hierfür zunächst nach, dass für alle $k, l \in \{0, \dots, n\}$ die folgende Beziehung gilt:

$$\begin{aligned} & B_{n,r}(e_k, e_l) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{\zeta \in \mu_{2n}(\mathbb{C})} e_k(\psi_n(r\zeta)) \overline{e_l(\psi_n(r\zeta))} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{\zeta \in \mu_{2n}(\mathbb{C})} \left(r\zeta + \frac{1}{n-1} \frac{1}{(r\zeta)^{n-1}} \right)^k \left(r\bar{\zeta} + \frac{1}{n-1} \frac{1}{(r\bar{\zeta})^{n-1}} \right)^l \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{\zeta \in \mu_{2n}(\mathbb{C})} r^{k+l} \zeta^{k-l} \left(1 + \frac{1}{n-1} \frac{1}{(r\zeta)^n} \right)^k \left(1 + \frac{1}{n-1} \frac{1}{(r\bar{\zeta})^n} \right)^l \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{\zeta \in \mu_{2n}(\mathbb{C})} r^{k+l} \zeta^{k-l} \left(\sum_{\mu=0}^k \binom{k}{\mu} \frac{1}{(n-1)^\mu} \frac{1}{(r\zeta)^{n\mu}} \right) \left(\sum_{\nu=0}^l \binom{l}{\nu} \frac{1}{(n-1)^\nu} \frac{1}{(r\bar{\zeta})^{n\nu}} \right) \\ &= \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^l \binom{k}{\mu} \binom{l}{\nu} \frac{1}{(n-1)^{\mu+\nu}} r^{(k+l)-n(\mu+\nu)} \left(\frac{1}{2n} \sum_{\zeta \in \mu_{2n}(\mathbb{C})} \zeta^{k-n\mu} \bar{\zeta}^{l-n\nu} \right) \\ &= \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^l \binom{k}{\mu} \binom{l}{\nu} \frac{1}{(n-1)^{\mu+\nu}} r^{(k+l)-n(\mu+\nu)} \langle e_{k-n\mu}, e_{l-n\nu} \rangle_{2n} \end{aligned}$$

Nach dieser Vorüberlegung können wir speziell

$$\begin{aligned} B_{n,r}(e_n, e_0) &= r^n \sum_{\substack{\mu \neq 0 \\ \mu \equiv 0 \pmod{2}}} \binom{n}{\mu} \frac{1}{(n-1)^\mu} \frac{1}{r^{n(\mu-1)}} \\ &= r^n \sum_{\mu=0}^n \frac{1 - (-1)^\mu}{2} \binom{n}{\mu} \frac{1}{(n-1)^\mu} \frac{1}{r^{n(\mu-1)}} \\ &= \frac{1}{2} r^n \left(\left(1 + \frac{1}{n-1} \frac{1}{r^n} \right)^n - \left(1 - \frac{1}{n-1} \frac{1}{r^n} \right)^n \right) \\ &= a_n(r) \end{aligned}$$

und

$$B_{n,r}(e_n, e_l) = 0 \quad \text{und} \quad B_{n,r}(e_0, e_l) = 0 \quad \text{für } l = 1, \dots, n-1$$

sowie

$$B_{n,r}(e_0, e_0) = 1$$

bestimmen. Es folgt also unmittelbar

$$B_{n,r}(P_{n,r}, e_l) = B_{n,r}(e_n - a_n(r)e_0, e_l) = B_{n,r}(e_n, e_l) - a_n(r)B_{n,r}(e_0, e_l) = 0$$

für $l = 1, \dots, n-1$ und zudem

$$B_{n,r}(P_{n,r}, e_0) = B_{n,r}(e_n - a_n(r)e_0, e_0) = B_{n,r}(e_n, e_0) - a_n(r)B_{n,r}(e_0, e_0) = 0,$$

womit die behauptete Eigenschaft von $B_{n,r}$ gezeigt ist. Die offenbar hermitesche Sesquilinearform $B_{n,r}$ erfüllt also die Bedingung (ii) aus Definition 4.4 einer Faber-Sesquilinearform für $(\mathcal{P}_n^1((H_n)_r), \|\cdot\|_{(H_n)_r}, P_{n,r})$.

Sei nun $\zeta \in \mu_{2n}(\mathbb{C})$ beliebig vorgegeben. Wir halten fest, dass damit $\zeta^n \in \mu_2(\mathbb{C}) = \{-1, 1\}$ gilt. Weiter rechnen wir nach, dass dann

$$P_{n,r}(\psi_n(r\zeta)) = \left(r\zeta + \frac{1}{n-1} \frac{1}{(r\zeta)^{n-1}} \right)^n - a_n(r) = (r\zeta)^n \left(1 + \frac{1}{n-1} \frac{1}{(r\zeta)^n} \right)^n - a_n(r)$$

gilt, womit sich im Fall $\zeta^n = 1$ unmittelbar

$$P_{n,r}(\psi_n(r\zeta)) = r^n \left(1 + \frac{1}{n-1} \frac{1}{r^n} \right)^n - a_n(r) = m_n(r)$$

und im Fall $\zeta^n = -1$ unmittelbar

$$P_{n,r}(\psi_n(r\zeta)) = -r^n \left(1 - \frac{1}{n-1} \frac{1}{r^n} \right)^n - a_n(r) = -m_n(r)$$

ergibt. Aufgrund der Voraussetzung (4.1) haben wir damit

$$\{\psi_n(r\zeta); \zeta \in \mu_{2n}(\mathbb{C})\} \subseteq E(P_{n,r}, (H_n)_r)$$

und

$$\|P_{n,r}\|_{(H_n)_r} = m_n(r)$$

gezeigt. Ferner erhalten wir nun

$$B_{n,r}(P_{n,r}, P_{n,r}) = \|P_{n,r}\|_{(H_n)_r}^2,$$

also die Bedingung (iv) aus Definition 4.4 einer Faber-Sesquilinearform für $(\mathcal{P}_n^1((H_n)_r), \|\cdot\|_{(H_n)_r}, P_{n,r})$.

Weil darüber hinaus offensichtlich auch die übrigen Eigenschaften (i) und (iii) aus Definition 4.4 erfüllt sind, stellt $B_{n,r}$ tatsächlich eine Faber-Sesquilinearform für $(\mathcal{P}_n^1((H_n)_r), \|\cdot\|_{(H_n)_r}, P_{n,r})$ dar, womit sich nach Satz 4.5 die Behauptung

$$T_n^{(H_n)_r} = P_{n,r}$$

und somit auch der Zusatz

$$\|T_n^{(H_n)_r}\|_{(H_n)_r} = m_n(r) \quad \text{und} \quad \{\psi_{H_n}(r\zeta); \zeta \in \mu_{2n}(\mathbb{C})\} \subseteq E(T_n^{(H_n)_r}, (H_n)_r)$$

ergibt.

Wir zeigen nun, dass im Spezialfall $n = 3$ die Bedingung (4.1) für alle $r > 1$ erfüllt ist. Hierzu geben wir uns $t \in \mathbb{R}$ beliebig vor und berechnen zunächst

$$\begin{aligned} P_{3,r}(\psi_3(re^{it})) &= \left(re^{it} + \frac{1}{2r^2}e^{-2it} \right)^3 - \frac{1}{2}r^3 \left(\left(1 + \frac{1}{2r^3} \right)^3 - \left(1 - \frac{1}{2r^3} \right)^3 \right) \\ &= r^3 e^{3it} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4r^3}e^{-3it} + \frac{1}{8r^6}e^{-6it} - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{8r^6} \right) \\ &= r^3 e^{3it} + \frac{3}{4r^3}e^{-3it} + \frac{1}{8r^6}e^{-6it} - \frac{1}{8r^6} \end{aligned}$$

und damit unter Verwendung von $e^{3it} = \cos(3t) + i \sin(3t)$

$$\begin{aligned} P_{3,r}(\psi_3(re^{it})) &= r^3 (\cos(3t) + i \sin(3t)) + \frac{3}{4r^3} (\cos(3t) - i \sin(3t)) \\ &\quad + \frac{1}{8r^6} (\cos(3t) - i \sin(3t))^2 - \frac{1}{8r^6} \\ &= \left(r^3 \cos(3t) + \frac{3}{4r^3} \cos(3t) + \frac{1}{8r^6} (\cos^2(3t) - \sin^2(3t)) - \frac{1}{8r^6} \right) \\ &\quad + i \left(r^3 \sin(3t) - \frac{3}{4r^3} \sin(3t) + \frac{1}{4r^6} \sin(3t) \cos(3t) \right) \\ &= \left(\left(r^3 + \frac{3}{4r^3} \right) \cos(3t) - \frac{1}{4r^6} \sin^2(3t) \right) \\ &\quad + i \left(\left(r^3 - \frac{3}{4r^3} \right) \sin(3t) + \frac{1}{4r^6} \sin(3t) \cos(3t) \right). \end{aligned}$$

Wir erhalten weiter

$$\begin{aligned} |P_{3,r}(\psi_3(re^{it}))|^2 &= \left(\left(r^3 + \frac{3}{4r^3} \right) \cos(3t) - \frac{1}{4r^6} \sin^2(3t) \right)^2 \\ &\quad + \left(\left(r^3 - \frac{3}{4r^3} \right) \sin(3t) + \frac{1}{4r^6} \sin(3t) \cos(3t) \right)^2 \\ &= \left(r^3 + \frac{3}{4r^3} \right)^2 \cos^2(3t) + \left(r^3 - \frac{3}{4r^3} \right)^2 \sin^2(3t) \\ &\quad + \frac{1}{16r^{12}} \sin^2(3t) - \frac{9}{4r^9} \cos(3t) \sin^2(3t) \\ &= -\sin^2(3t) \underbrace{\left(3 - \frac{1}{16r^{12}} - \frac{3}{4r^9} \cos(3t) \right)}_{<0} + \left(r^3 + \frac{3}{4r^3} \right)^2 \\ &\leq \left(r^3 + \frac{3}{4r^3} \right)^2 = m_3(r)^2, \end{aligned}$$

wobei Gleichheit in $[0, 2\pi]$ genau für $t \in \{\frac{k\pi}{3}; k = 0, \dots, 5\}$ eintritt. Nach dem Maximumprinzip für holomorphe Funktionen können wir somit folgern

$$\|P_{3,r}\|_{(H_3)_r} = \|P_{3,r}\|_{\partial(H_3)_r} = \max_{t \in [0, 2\pi]} |P_{3,r}(\psi_3(re^{it}))| = m_3(r),$$

womit, wie behauptet, die Bedingung (4.1) erfüllt ist. Es gilt also auch

$$T_3^{(H_3)^r}(w) = w^3 - a_3(r) = w^3 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{8r^6}\right), \quad w \in \mathbb{C},$$

womit nun alle Aussagen des Beispiels bewiesen sind. \square

BEISPIEL 4.26. Wie in Beispiel 2.43 definieren wir für $2 \leq m \in \mathbb{N}$ den **m -Stern**

$$\mathcal{S}_m := \{t\zeta; \zeta \in \mu_m(\mathbb{C}), t \in [0, 4^{\frac{1}{m}}]\}.$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt dann offenbar

$$\mathcal{S}_{2m} = \{t\zeta; \zeta \in \mu_{2m}(\mathbb{C}), t \in [0, 2^{\frac{1}{m}}]\} = e_m^{-1}([-2, 2]).$$

Weiter definieren wir für $m \in \mathbb{N}$ den **variieren m -Stern**

$$\mathcal{S}_m := \{t\zeta; \zeta \in \mu_m(\mathbb{C}), t \in [0, 1]\}.$$

Dieser erfüllt offensichtlich für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{S}_{2m} = \{t\zeta; \zeta \in \mu_{2m}(\mathbb{C}), t \in [0, 1]\} = e_m^{-1}([-1, 1]).$$

In Abbildung 4.1 sind die m -Sterne \mathcal{S}_m und in Abbildung 4.2 die variieren m -Sterne \mathcal{S}_m jeweils für $m = 3, 4, 5, 11$ dargestellt.

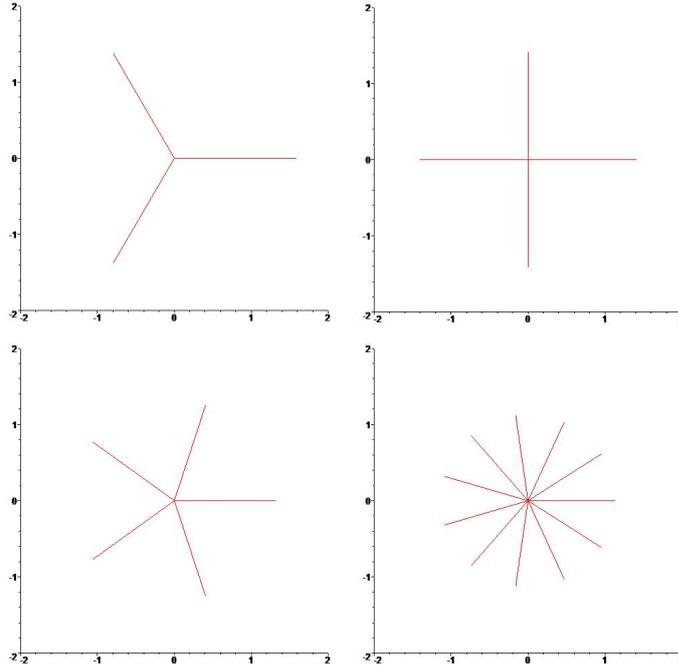


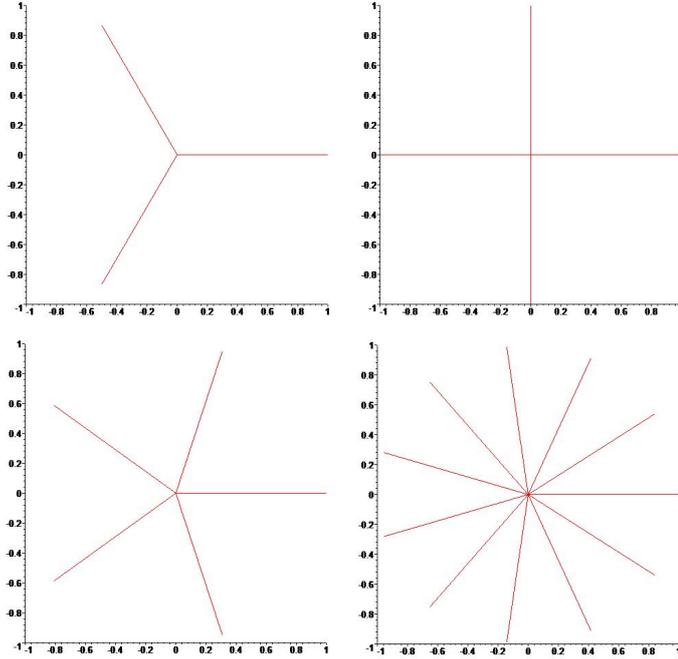
ABBILDUNG 4.1. \mathcal{S}_m für $m = 3, 4, 5, 11$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$T_m^{\mathcal{S}_m}(w) = w^m - \frac{1}{2}, \quad w \in \mathcal{S}_m,$$

wobei

$$\|T_m^{\mathcal{S}_m}\|_{\mathcal{S}_m} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad E(T_m^{\mathcal{S}_m}, \mathcal{S}_m) = \{0\} \cup \mu_m(\mathbb{C}).$$

ABBILDUNG 4.2. \mathcal{S}_m für $m = 3, 4, 5, 11$

Wegen $S_m = 4^{\frac{1}{m}} \mathcal{S}_m$ erhalten wir nach Satz 4.10 unmittelbar die Beziehung

$$T_m^{\mathcal{S}_m}(w) = 4T_m^{\mathcal{S}_m}\left(4^{-\frac{1}{m}}w\right) = w^m - 2, \quad w \in \mathcal{S}_m.$$

Speziell ergibt sich die folgende bemerkenswerte Beziehung

$$T_m^{\mathcal{S}_{2m}}(w) = w^{2m} - 2 = (w^m)^2 - 2 = (T_2^{[-2,2]} \circ e_m)(w), \quad w \in \mathcal{S}_m.$$

Beweis. Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir das Polynom $P_m \in \mathcal{P}_m^1(\mathcal{S}_m)$ durch

$$P_m(w) := w^m - \frac{1}{2} \quad \text{für alle } w \in \mathcal{S}_m.$$

Man überzeugt sich leicht, dass für alle $\zeta \in \mu_m(\mathbb{C})$ und alle $t \in [0, 1]$

$$P_m(t\zeta) = \left| (t\zeta)^m - \frac{1}{2} \right| = \left| t^m - \frac{1}{2} \right| \begin{cases} = \frac{1}{2}, & t \in \{0, 1\} \\ < \frac{1}{2}, & t \in (0, 1) \end{cases}$$

erfüllt ist. Es gilt also

$$\|P_m\|_{\mathcal{S}_m} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad E(P_m, \mathcal{S}_m) = \{0\} \cup \mu_m(\mathbb{C}).$$

Wir definieren nun eine Sesquilinearform $B_m : \mathcal{P}_{\leq m}(\mathcal{S}_m) \times \mathcal{P}_{\leq m}(\mathcal{S}_m) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$B_m(p, q) := \frac{1}{2} \left(p(0)\overline{q(0)} + \frac{1}{m} \sum_{\zeta \in \mu_m(\mathbb{C})} p(\zeta)\overline{q(\zeta)} \right)$$

für alle $p, q \in \mathcal{P}_{\leq m}(\mathcal{S}_m)$. Die Sesquilinearform B_m erfüllt dann

$$B_m(p, p) = \frac{1}{2} \left(|p(0)|^2 + \frac{1}{m} \sum_{\zeta \in \mu_m(\mathbb{C})} |p(\zeta)|^2 \right)$$

für alle $p \in \mathcal{P}_{\leq m}(\mathcal{S}_m)$ und damit insbesondere

- $0 \leq B_m(p, p) \leq \|p\|_{\mathcal{S}_m}^2$ für alle $p \in \mathcal{P}_{\leq m}(\mathcal{S}_m)$
- $B_m(P_m, P_m) = \|P_m\|_{\mathcal{S}_m}^2$

Weiter können wir nachrechnen, dass

$$B_m(e_0, P_m) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{e_0(0) \overline{P_m(0)}}_{=-\frac{1}{2}} + \frac{1}{m} \sum_{\zeta \in \mu_m(\mathbb{C})} \underbrace{e_0(\zeta) \overline{P_m(\zeta)}}_{=\frac{1}{2}} \right) = 0$$

und zudem für $k = 1, \dots, m-1$

$$\begin{aligned} B_m(e_k, P_m) &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{e_k(0) \overline{P_m(0)}}_{=0} + \frac{1}{m} \sum_{\zeta \in \mu_m(\mathbb{C})} e_k(\zeta) \underbrace{\overline{P_m(\zeta)}}_{=\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{4m} \sum_{\zeta \in \mu_m(\mathbb{C})} e_k(\zeta) = \frac{1}{4m} \sum_{\zeta \in \mu_m(\mathbb{C})} \zeta^k = 0, \end{aligned}$$

wobei wir auf die Ergebnisse aus Lemma A.3 zurückgegriffen haben. Also gilt $B_m(e_k, P_m) = 0$ für alle $k = 0, \dots, m-1$ und daher wegen

$$\mathcal{P}_{\leq m-1}(\mathcal{S}_m) = \text{LH}\{e_k|_{\mathcal{S}_m}; k = 0, \dots, m-1\}$$

auch $B_m(p, P_m) = 0$ (bzw. $B_m(P_m, p) = 0$, da B_m nach Definition offensichtlich hermitesch ist) für alle $p \in \mathcal{P}_{\leq m-1}(\mathcal{S}_m)$. Gemäß Satz 4.5 und der Eindeutigkeit des Tschebyscheffpolynoms (vgl. Satz 4.6) gilt $P_m = T_m^{\mathcal{S}_m}$ und damit die Behauptung. \square

Diese Beispiele stehen programmatisch für unsere weiteren Untersuchungen. Wir werden daher zu gegebener Zeit auf diese verweisen.

Faberpolynome als Tschebyscheffpolynome

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir einige strukturelle Zusammenhänge zwischen den Faber- und Tschebyscheffpolynomen erarbeitet: So zeigen etwa Satz 2.23 und Satz 4.10, dass sich diese Polynome ähnlich verhalten, wenn wir das zugrunde liegende Kompaktum affin linearen Transformationen oder Spiegelungen an der reellen Achse unterwerfen. Darüber hinaus haben wir in Satz 4.22 gesehen, dass die Tschebyscheffpolynome eine Information über die analytische Kapazität und damit (nach Satz 4.17) über den transfiniten Durchmesser tragen, also über eine rein analytische Größe, die uns erstmals bei der Konstruktion der Faberpolynome begegnet ist.

Diese Beobachtungen lassen einen „tieferen“ Zusammenhang zwischen diesen beiden Klassen von Polynomen vermuten, welchem wir uns in diesem Kapitel etwas annähern wollen.

1. Problemstellung

Wir erinnern uns zunächst an die folgenden Ergebnisse

- In Beispiel 2.15 haben wir die Faberpolynome zur abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}$ bestimmt und später in Beispiel 4.7 (bzw. 4.23) gesehen, dass diese mit den zugehörigen Tschebyscheffpolynomen übereinstimmen.
- In Beispiel 2.20 haben wir die Faberpolynome zu den Ellipsen E_r mit $r \geq 1$ charakterisiert und dann in Beispiel 4.24 festgestellt, dass diese ebenfalls mit den entsprechenden Tschebyscheffpolynomen übereinstimmen.

Diese Beispiele können wir durch die folgende einfache Feststellung ergänzen:

SATZ 5.1. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ zulässig und k -fach zentralsymmetrisch (vgl. Definition 2.25). Dann stimmen die ersten k Faberpolynome F_0^K, \dots, F_{k-1}^K für K mit den ersten k Tschebyscheffpolynomen T_0^K, \dots, T_{k-1}^K für K überein.*

Beweis. Da K nach Voraussetzung k -fach zentralsymmetrisch ist, erhalten wir gemäß Korollar 2.26 die Beziehung

$$(5.1) \quad F_n^K(\zeta w) = \zeta^n F_n^K(w), \quad w \in K$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $\zeta \in \mu_k(\mathbb{C})$. Sei nun $0 \leq n \leq k-1$ beliebig vorgegeben. Wir wählen dann ein $w_n \in E(F_n^K, K)$ und definieren durch

$$B_n(p, q) := \frac{1}{k} \sum_{\zeta \in \mu_k(\mathbb{C})} p(\zeta w_n) \overline{q(\zeta w_n)}$$

eine Sesquilinearform $B_n : \mathcal{P}_{\leq n}(K) \times \mathcal{P}_{\leq n}(K) \rightarrow \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $p \in \mathcal{P}_{\leq n}(K)$ ist

$$B(p, p) = \frac{1}{k} \sum_{\zeta \in \mu_k(\mathbb{C})} |p(\zeta w_n)|^2 \geq 0$$

(ii) Da gemäß Lemma A.3 für alle $\mu, \nu \in \mathbb{N}_0$ die Beziehung

$$\frac{1}{k} \sum_{\zeta \in \mu_k(\mathbb{C})} \zeta^{\mu-\nu} = \begin{cases} 0, & \mu \not\equiv \nu \pmod{k} \\ 1, & \mu \equiv \nu \pmod{k} \end{cases}$$

gilt, erhalten wir für alle $\mu, \nu \in \{0, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} B_n(F_\mu^K, F_\nu^K) &= \frac{1}{k} \sum_{\zeta \in \mu_k(\mathbb{C})} F_\mu^K(\zeta w_n) \overline{F_\nu^K(\zeta w_n)} \\ &\stackrel{(5.1)}{=} \frac{1}{k} \sum_{\zeta \in \mu_k(\mathbb{C})} \zeta^\mu F_\mu^K(w_n) \overline{\zeta^\nu F_\nu^K(w_n)} \\ &= \left(\frac{1}{k} \sum_{\zeta \in \mu_k(\mathbb{C})} \zeta^{\mu-\nu} \right) F_\mu^K(w_n) \overline{F_\nu^K(w_n)} \\ &= \begin{cases} 0, & \mu \not\equiv \nu \pmod{k} \\ F_\mu^K(w_n) \overline{F_\nu^K(w_n)}, & \mu \equiv \nu \pmod{k} \end{cases} \end{aligned}$$

Da für $\mu, \nu \in \{0, \dots, n\}$ wegen $n \leq k-1$ offensichtlich $\mu \equiv \nu \pmod{k}$ genau dann erfüllt ist, falls $\mu = \nu$ gilt, folgt

$$\forall \mu, \nu \in \{0, \dots, n\}, \mu \neq \nu : \quad B_n(F_\mu^K, F_\nu^K) = 0.$$

(iii) Für alle $p \in \mathcal{P}_n^1(K)$ gilt

$$B_n(p, p) = \frac{1}{k} \sum_{\zeta \in \mu_k(\mathbb{C})} \underbrace{|p(\zeta w_n)|^2}_{\leq \|p\|_K^2} \leq \|p\|_K^2.$$

(iv) Mit der Rechnung in (ii) erhalten wir auch

$$B_n(F_n^K, F_n^K) = |F_n^K(w_n)|^2 = \|F_n^K\|_K^2.$$

Mit Satz 4.5 erhalten wir somit, dass F_n^K mit dem n -ten Tschebyscheffpolynom T_n^K für K übereinstimmt. Da $0 \leq n \leq k-1$ beliebig vorgegeben war, folgt die Behauptung. \square

Diese Beobachtungen bestärken den zu Beginn des Kapitels formulierten Verdacht, dass zwischen den Faber- und Tschebyscheffpolynomen enge Verbindungen bestehen.

Ein abgrenzendes Beispiel liefert hingegen das von der Hypocycloiden mit n

Spitzen umrandete Kompaktum H_n mit $n \geq 3$. Für dieses erhalten wir gemäß Beispiel 2.19 das n -te Faberpolynom

$$F_n^{H_n}(w) = w^n - \frac{n}{n-1}.$$

Als ganze Funktion muss $F_n^{H_n}$ auf Rand des Gebietes $\text{int}(H_n)$ sein Maximum annehmen, d.h. es gilt

$$\|F_n^{H_n}\|_{H_n} = \|F_n^{H_n}\|_{\partial H_n} = \max_{t \in [0, 2\pi]} |F_n^{H_n}(\psi_{H_n}(e^{it}))|,$$

wobei wir beachten, dass die zu H_n gehörende biholomorphe Abbildung $\psi_{H_n} : \Delta_1 \rightarrow \Omega(H_n)$ nach Fortsetzung auf $\overline{\Delta_1}$ eine Parametrisierung der Hypocycloiden ∂H_n liefert. In Abbildung 5.1 ist der Graph der Funktion

$$h_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto |F_n^{H_n}(\psi_{H_n}(e^{it}))|$$

für $n = 3$ und $n = 4$ dargestellt.

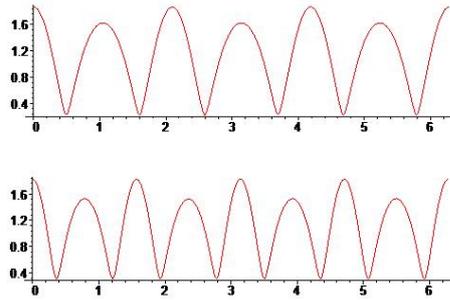


ABBILDUNG 5.1. Graph von h_n für $n = 3$ (oben) und $n = 4$ (unten)

Bereits diese Darstellung zeigt, dass $F_n^{H_n}$ im Allgemeinen nicht die für Tschebyscheffpolynome nach Satz 4.6 nötige Anzahl von $n + 1$ Maximumstellen haben kann. Dies veranschaulicht, warum wir (zumindest, wenn die Bedingung (4.1) erfüllt ist) in Beispiel 4.25 von den Faberpolynomen verschiedene Tschebyscheffpolynome $P_{n,1}$ gefunden haben. Die Graphen der Funktion

$$h_n^* : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto |P_{n,1}(\psi_{H_n}(e^{it}))|$$

für $n = 3$ und $n = 4$ in Abbildung 5.2 weisen im Gegensatz dazu sogar $2n$ Maximumstellen auf. Für den Fall $n = 3$ konnten wir tatsächlich nachrechnen, dass $P_{3,1} = T_3^{H_3}$ gilt. In Abbildung 5.3 ist schließlich die analytische Landschaft des Polynoms $P_{n,1}$ auf H_n für $n = 3$ und $n = 4$ dargestellt.

Wir können also festhalten, dass, trotz einer Vielzahl an Gemeinsamkeiten, die Faber- und Tschebyscheffpolynome im Allgemeinen nicht übereinstimmen müssen.

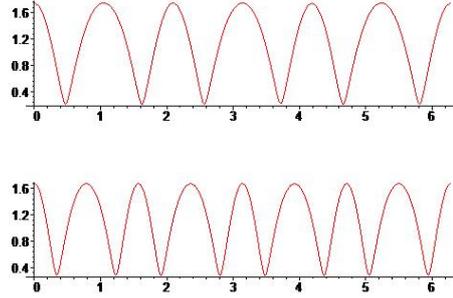


ABBILDUNG 5.2. Graph von h_n^* für $n = 3$ (oben) und $n = 4$ (unten)

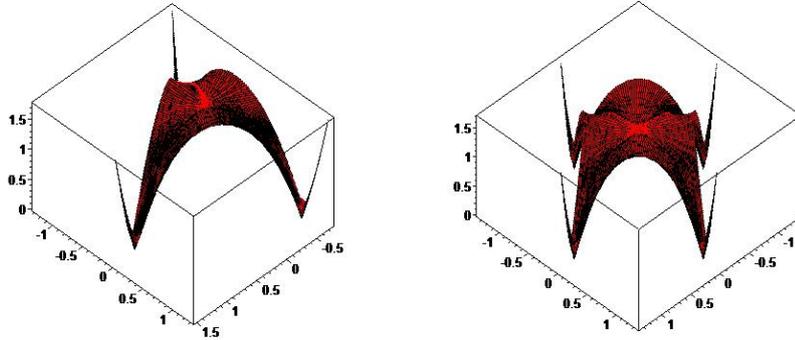


ABBILDUNG 5.3. analytische Landschaft von $P_{n,1}$ auf H_n für $n = 3$ (links) und $n = 4$ (rechts)

2. Die Sätze von Heuser-Mohr

Ist $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum, so setzen wir für $r > r(K)$ in diesem Abschnitt

$$\Gamma_r(K) := \psi_K(\partial D(0, r)) \quad \text{und} \quad \Gamma'_r(K) := \frac{1}{r} \psi_K(\partial D(0, r)).$$

Wir wollen nun für ein zulässiges Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ bei festem $n \in \mathbb{N}$ das Verhalten der Tschebyscheffpolynome $T_n^{\Gamma_r(K)}$ und $T_n^{\Gamma'_r(K)}$ für $r \rightarrow \infty$ studieren. Die Frage nach dem Verhalten von $T_n^{\Gamma_r(K)}$ für $r \rightarrow \infty$ wurde von P. Heuser in seiner 1949 erschienenen Arbeit [Heu49] behandelt. Den sehr mühevollen Beweis des dortigen Hauptresultats konnte dann E. Mohr in seiner 1952 erschienenen Arbeit [Moh52] erheblich verkürzen. Sein Zugang ermöglicht zugleich auch eine Antwort auf die Frage nach dem Verhalten von $T_n^{\Gamma'_r(K)}$ für $r \rightarrow \infty$. Im Folgenden werden wir diese beiden Ergebnisse, welche wir als ersten und zweiten Satz von Heuser-Mohr bezeichnen wollen, anhand der Arbeit [Moh52] vorstellen.

2.1. Erster Satz von Heuser-Mohr. Für den Beweis des ersten Satzes von Heuser-Mohr beschränken wir uns zunächst auf zentrierte Kompakta.

DEFINITION 5.2. Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum. Wir nennen K **zentriert**, falls die zugehörige biholomorphe Abbildung $\psi_K : \Delta_{r(K)} \rightarrow \Omega(K)$ in ihrer nach Satz 2.5 bestimmten Laurententwicklung um ∞

$$\psi_K(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad z \in \Delta_{r(K)}^*$$

die Bedingung $b_0 = 0$ erfüllt.

Da sich aber offensichtlich jedes zulässige Kompaktum durch Translation zentrieren lässt, werden wir anschließend unsere Ergebnisse auf beliebige zulässige Kompakta verallgemeinern können.

Sei also nun $K \subset \mathbb{C}$ ein zentriertes zulässiges Kompaktum. Für $n \in \mathbb{N}$ und $r > r(K)$ erhalten wir wegen $\Gamma_r'(K) = \frac{1}{r}\Gamma_r(K)$ nach Lemma 4.10 unmittelbar die Beziehung

$$(5.2) \quad T_n^{\Gamma_r'(K)}(z) = \frac{1}{r^n} T_n^{\Gamma_r(K)}(rz) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Als normiertes Polynom vom Grad n lässt sich $T_n^{\Gamma_r(K)}$ gemäß dem Fundamentalsatz der Algebra 1.14 darstellen als

$$(5.3) \quad T_n^{\Gamma_r(K)}(z) = \prod_{\nu=1}^n (z - \alpha_\nu(r)), \quad z \in \mathbb{C},$$

wobei $\alpha_1(r), \dots, \alpha_n(r) \in \mathbb{C}$ die nicht notwendig verschiedenen Nullstellen von $T_n^{\Gamma_r(K)}$ sind. Aus (5.2) ergibt sich dann

$$T_n^{\Gamma_r'(K)}(z) = \frac{1}{r^n} T_n^{\Gamma_r(K)}(rz) = \frac{1}{r^n} \prod_{\nu=1}^n (rz - \alpha_\nu(r)) = \prod_{\nu=1}^n (z - \alpha'_\nu(r)),$$

wobei $\alpha'_\nu(r) := \frac{1}{r}\alpha_\nu(r)$ für $\nu = 1, \dots, n$ definiert wird.

LEMMA 5.3. Wir finden ein $R_1 > r(K)$ und ein $a > 0$ mit $R_1 - \frac{a}{R_1} > 0$, sodass

$$\Gamma_r(K) \subseteq A(a, r) := \left\{ z \in \mathbb{C}; r - \frac{a}{r} < |z| < r + \frac{a}{r} \right\}$$

und

$$\Gamma_r'(K) \subseteq A'(r, a) := \left\{ z \in \mathbb{C}; 1 - \frac{a}{r^2} < |z| < 1 + \frac{a}{r^2} \right\}$$

für alle $r > R_1$ erfüllt ist.

Beweis. Nach der obigen Bedingung an K erhalten wir durch

$$f : D\left(0, \frac{1}{r(K)}\right) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n-1}$$

eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(D(0, \frac{1}{r(K)}))$, für die

$$\psi_K(z) = z + \frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \Delta_{r(K)}^*$$

erfüllt ist. Wir setzen $a := 1 + |f(0)| > 0$ und wählen hierzu ein $R_1 > r(K)$ mit

$$R_1 - \frac{a}{R_1} > 0 \quad \text{und} \quad \left| f\left(\frac{1}{z}\right) - f(0) \right| < 1 \quad \text{für alle } z \in \Delta_{R_1}^*.$$

Damit gilt nun

$$\left| f\left(\frac{1}{z}\right) \right| \leq \left| f\left(\frac{1}{z}\right) - f(0) \right| + |f(0)| < 1 + |f(0)| = a$$

und ferner

$$\left| |\psi_K(z)| - |z| \right| \leq |\psi_K(z) - z| = \left| \frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right) \right| < \frac{a}{|z|} \quad \text{für alle } z \in \Delta_{R_1}^*$$

Ist nun $r > R_1$ gegeben, so ergibt sich für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$

$$\left| |\psi_K(z)| - r \right| < \frac{a}{r}$$

bzw.

$$r - \frac{a}{r} < |\psi_K(z)| < r + \frac{a}{r},$$

womit auch $\psi_K(z) \in A(a, r)$ gezeigt ist. Zusammenfassend erhalten wir

$$\Gamma_r(K) = \psi_K(\partial D(0, r)) \subseteq A(a, r)$$

und somit die erste Inklusion. Wegen $\Gamma_r'(K) = \frac{1}{r} \Gamma_r(K)$ und $A_n'(r, a) = \frac{1}{r} A_n(r, a)$ ist dann die zweite Inklusion offensichtlich. \square

PROPOSITION 5.4. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

- (i) *Es existiert ein $R_2 > R_1$, sodass für alle $\nu = 1, \dots, n$ und alle $r > R_2$ die Abschätzung*

$$|\alpha'_\nu(r)| < 4$$

gilt.

- (ii) *Für alle $\nu = 1, \dots, n$ ist*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha'_\nu(r) = 0.$$

Beweis. (i) Wir wählen ein $R_2 > R_1$, sodass

$$1 + \frac{a}{r^2} < 2 \quad \text{für alle } r > R_2$$

erfüllt ist. Für ein beliebiges $r > R_2$ machen wir die

ANNAHME: Es gilt $|\alpha'_\nu(r)| \geq 4$ für ein $\nu \in \{1, \dots, n\}$.

Dann erhalten wir für alle $z \in \Gamma_r'(K)$ wegen $\Gamma_r'(K) \subseteq A'(r, a)$, dass

$$|z| < 1 + \frac{a}{r^2} < 2$$

und damit

$$|z - \alpha'_\nu(r)| \geq \left| |\alpha'_\nu(r)| - |z| \right| \geq 4 - 2 = 2 > |z|$$

gilt. Insbesondere ist also für alle $z \in \Gamma'_r(K) \setminus \{\alpha'_\mu(r); \mu = 1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} |T_n^{\Gamma'_r(K)}(z)| &= \left| \prod_{\mu=1}^n (z - \alpha'_\mu(r)) \right| \\ &= |z - \alpha'_\nu(r)| \left| \prod_{\substack{\mu=1, \dots, n \\ \mu \neq \nu}} (z - \alpha'_\mu(r)) \right| \\ &> |z| \left| \prod_{\substack{\mu=1, \dots, n \\ \mu \neq \nu}} (z - \alpha'_\mu(r)) \right| \\ &= |p(z)| \end{aligned}$$

mit einem normierten Polynom p vom Grad n . Für eine Maximumstelle $z_0 \in E(p, \Gamma'_r(K))$ (die dann natürlich in $\Gamma'_r(K) \setminus \{\alpha'_\mu(r); \mu = 1, \dots, n\}$ liegt) erhalten wir schließlich

$$\|T_n^{\Gamma'_r(K)}\|_{\Gamma'_r(K)} \geq |T_n^{\Gamma'_r(K)}(z_0)| > |p(z_0)| = \|p\|_{\Gamma'_r(K)}$$

im Widerspruch zur Minimalitätseigenschaft von $T_n^{\Gamma'_r(K)}$ auf $\Gamma'_r(K)$. Also war die Annahme falsch und es folgt die Behauptung (i).

(ii) Wir machen die

ANNAHME: $\alpha'(r) := (\alpha'_1(r), \dots, \alpha'_n(r))$ konvergiert nicht gegen $(0, \dots, 0)$ für $r \rightarrow \infty$.

Wir können dann ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(r_k)_{k=1}^\infty$ aus $(0, \infty)$ mit $r_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$ finden, sodass

$$\|\alpha'(r_k)\|_\infty = \max_{\nu=1, \dots, n} |\alpha'_\nu(r_k)| > \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

erfüllt ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir darüber hinaus annehmen, dass die Folge $(r_k)_{k=1}^\infty$ bereits in (R_2, ∞) liegt. Nach (i) gilt dann zudem

$$\|\alpha'(r_k)\|_\infty < 4 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

sodass die Folge $(\alpha'(r_k))_{k=1}^\infty$ ganz in

$$S := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n; \varepsilon \leq \|x\|_\infty \leq 4\}$$

enthalten ist. Aufgrund der Kompaktheit von S muss $(\alpha'(r_k))_{k=1}^\infty$ eine gegen ein Vektor $(A'_1, \dots, A'_n) \in S$ konvergente Teilfolge besitzen. Nach Übergang zu dieser Teilfolge können wir annehmen, dass bereits

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha'_1(r_k), \dots, \alpha'_n(r_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha'(r_k) = (A'_1, \dots, A'_n)$$

erfüllt ist. Daher konvergiert wegen

$$T_n^{\Gamma'_{r_k}(K)}(z) = \prod_{\mu=1}^n (z - \alpha'_\mu(r_k)), \quad z \in \mathbb{C}$$

die Folge $(T_n^{\Gamma'_{r_k}(K)})_{k=1}^\infty$ kompakt auf \mathbb{C} gegen ein Polynom T_n mit

$$(5.4) \quad T_n(z) = \prod_{\mu=1}^n (z - A'_\mu), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Wir zeigen nun, dass $\|T_n\|_{\partial\mathbb{D}} \leq 1$ erfüllt ist.

Für alle $k \in \mathbb{N}$ wählen wir uns hierzu ein $\xi_k \in \Gamma'_{r_k}(K)$ mit der Eigenschaft

$$\|T_n^{\Gamma'_{r_k}(K)}\|_{\Gamma'_{r_k}(K)} = |T_n^{\Gamma'_{r_k}(K)}(\xi_k)|$$

und setzen

$$d_k := \max_{z \in \Gamma'_{r_k}(K)} |z|.$$

Wegen $\Gamma'_{r_k}(K) \subseteq A'(r_k, a)$ nach Lemma 5.3 gilt dann $d_k \rightarrow 1$ für $k \rightarrow \infty$. Weiter finden wir $\eta' \in \partial\mathbb{D}$ mit

$$\|T_n\|_{\partial\mathbb{D}} = |T_n(\eta')|.$$

Weil die Familie $(K_{r_k})_{k \in \mathbb{N}}$ nach Lemma 2.10 eine kompakte Ausschöpfung von \mathbb{C} darstellt, weshalb ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $0 \in \text{int}(K_{r_k})$ für alle $k \geq k_0$. Wir können dann für alle $k \geq k_0$ ein

$$\eta'_k \in \{t\eta'; t > 0\} \cap \Gamma'_{r_k}(K)$$

finden. Man beachte hierbei, dass der unbeschränkte Weg

$$\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto t\eta'$$

nicht ganz im Kompaktum $\frac{1}{r_k}K_{r_k}$ verlaufen kann, also den Punkt $0 \in \text{int}(\frac{1}{r_k}K_{r_k})$ mit einem Punkt aus $\mathbb{C} \setminus (\frac{1}{r_k}K_{r_k})$ verbindet, d.h. es gibt ein $t_k \in (0, \infty)$ mit $\eta'_k := t_k\eta' \in \partial(\frac{1}{r_k}K_{r_k}) = \Gamma'_{r_k}(K)$. Insbesondere erhalten wir wegen $\eta'_k \in \Gamma'_{r_k}(K) \subseteq A'(r_k, a)$ für alle $k \geq k_0$, dass $t_k = |\eta'_k| \rightarrow 1$ für $k \rightarrow \infty$ und somit auch $\eta'_k = t_k\eta' \rightarrow \eta'$ für $k \rightarrow \infty$ gelten muss.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir finden dann ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $k_\varepsilon \geq k_0$, sodass

$$\begin{aligned} |T_n(\eta')| &= \prod_{\mu=1}^n |\eta' - A'_\mu| \\ &\leq \prod_{\mu=1}^n (|\eta' - \eta'_k| + |\eta'_k - \alpha'_\mu(r_k)| + |\alpha'_\mu(r_k) - A'_\mu|) \\ &\leq \left| \prod_{\mu=1}^n (\eta'_k - \alpha'_\mu(r_k)) \right| + \varepsilon \\ &= |T_n^{\Gamma'_{r_k}(K)}(\eta'_k)| + \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $k \geq k_\varepsilon$ gilt. Hierbei beachte man, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta'_k = \eta' \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha'_\mu(r_k) = A'_\mu, \quad \mu = 1, \dots, n$$

und damit ferner

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |\eta'_k - \alpha'_\mu(r_k)| < M \quad \text{für alle } \mu = 1, \dots, n$$

mit einer von k und μ unabhängigen Konstanten $M > 0$ gilt. Da nun aufgrund der Minimaleigenschaft der Tschebyscheffpolynome

$$|T_n^{\Gamma'_{r_k}(K)}(\eta'_k)| \leq \|T_n^{\Gamma'_{r_k}(K)}\|_{\Gamma'_{r_k}(K)} \leq \|e_n\|_{\Gamma'_{r_k}(K)} = d_k^n$$

für alle $k \geq k_\varepsilon$ erfüllt ist, folgt zusammenfassend

$$|T_n(\eta')| \leq d_k^n + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben war und $d_k \rightarrow 1$ für $k \rightarrow \infty$ gilt, folgt schließlich

$$\|T_n\|_{\partial\mathbb{D}} = |T_n(\eta')| \leq 1.$$

Nach Beispiel 4.7 ist aber $T_n^{\partial\mathbb{D}} = e_n$ und $\|T_n^{\partial\mathbb{D}}\|_{\partial\mathbb{D}} = 1$, sodass aufgrund der Eindeutigkeit des Tschebyscheffpolynoms für $\partial\mathbb{D}$ bereits $T_n = T_n^{\partial\mathbb{D}} = e_n$ erfüllt sein muss. Aus (5.4) erhalten wir den Widerspruch

$$(0, \dots, 0) = (A'_1, \dots, A'_n) \in S$$

zur Definition von S . Also war unsere Annahme falsch, womit auch die Behauptung (ii) gezeigt ist. \square

Als direkte Folgerung erhalten wir

SATZ 5.5 (erster Satz von Heuser-Mohr). *Ist $K \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges zulässiges Kompaktum und $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt, so konvergiert $T_n^{\Gamma'_r(K)}$ auf \mathbb{C} kompakt gegen e_n für $r \rightarrow \infty$ und es gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|e_n - T_n^{\Gamma'_r(K)}\|_{\Gamma'_r(K)} = 0.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall eines zentrierten zulässiges Kompaktums $K \subset \mathbb{C}$. Stellen wir $T_n^{\Gamma'_r(K)}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $r > r(K)$ in der Form

$$T_n^{\Gamma'_r(K)}(z) = \prod_{\mu=1}^n (z - \alpha'_\mu(r)) \quad z \in \mathbb{C}$$

dar, so folgt nach Proposition 5.4

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\alpha'_1(r), \dots, \alpha'_n(r)) = 0.$$

Damit konvergiert $T_n^{\Gamma'_r(K)}$ für $r \rightarrow \infty$ kompakt gegen e_n . Da $\Gamma'_r(K)$ nach Lemma 5.3 für genügend große $r > r(K)$ in $A_n(r, a)$ enthalten ist und ferner

$$A_n(r, a) \subseteq \overline{D(0, \rho)} \quad \text{mit } \rho := 1 + \frac{a}{r(K)}$$

gilt, erhalten wir

$$\|e_n - T_n^{\Gamma'_r(K)}\|_{\Gamma'_r(K)} \leq \|e_n - T_n^{\Gamma'_r(K)}\|_{\overline{D(0, \rho)}} \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty$$

und damit schließlich

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|e_n - T_n^{\Gamma_r'(K)}\|_{\Gamma_r'(K)} = 0,$$

womit die Behauptung in diesem Spezialfall bewiesen ist. Ist nun $K \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges zulässiges Kompaktum, für welches die Laurententwicklung um ∞ der zugehörigen biholomorphen Abbildung $\psi_K : \Delta_{r(K)} \rightarrow \Omega(K)$ die Gestalt

$$\psi_K(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad z \in \Delta_{r(K)}^*$$

besitzt, so stellt $L := K - b_0$ ebenfalls ein zulässiges Kompaktum dar, zu welchem nach dem Beweis zu Satz 2.23 die durch

$$(5.5) \quad \psi_L(z) := \psi_K(z) - b_0 \quad \text{für } z \in \Delta_{r(L)} = \Delta_{r(K)}$$

bestimmte biholomorphe Abbildung $\psi_L : \Delta_{r(K)} \rightarrow \Omega(L)$ gehört, d.h. L ist zentriert. Gemäß dem obigen Ergebnis gilt daher

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|e_n - T_n^{\Gamma_r'(L)}\|_{\Gamma_r'(L)} = 0$$

Der in (5.5) formulierte Zusammenhang zwischen ψ_L und ψ_K liefert ferner für alle $r > r(K) = r(L)$

$$\Gamma_r(K) = \Gamma_r(L) + b_0 \quad \text{und} \quad \Gamma_r'(K) = \Gamma_r'(L) + \frac{b_0}{r},$$

sodass wir nach Satz 4.10

$$\begin{aligned} \|e_n - T_n^{\Gamma_r'(K)}\|_{\Gamma_r'(K)} &= \sup_{z \in \Gamma_r'(K)} |e_n(z) - T_n^{\Gamma_r'(K)}(z)| \\ &= \sup_{z \in \Gamma_r'(K)} \left| e_n(z) - T_n^{\Gamma_r'(L)}\left(z - \frac{b_0}{r}\right) \right| \\ &= \sup_{z \in \Gamma_r'(L)} \left| e_n\left(z + \frac{b_0}{r}\right) - T_n^{\Gamma_r'(L)}(z) \right| \\ &\leq \sup_{z \in \overline{D(0, \rho)}} \left| e_n\left(z + \frac{b_0}{r}\right) - e_n(z) \right| + \|e_n - T_n^{\Gamma_r'(L)}\|_{\Gamma_r'(L)} \end{aligned}$$

erhalten, wobei verwendet wurde, dass wir nach Lemma 5.3 für das zentrierte Kompaktum L eine Zahl $a > 0$ und damit $\rho := 1 + \frac{a}{r(K)}$ finden können, sodass für hinreichend große $r > r(L)$ die Inklusion $\Gamma_r'(L) \subset A(a, r) \subset \overline{D(0, \rho)}$ erfüllt ist. Nach Wahl von L konvergiert nun der zweite Summand auf der rechten Seite gegen 0. Da offenbar auch

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{z \in \overline{D(0, \rho)}} \left| e_n\left(z + \frac{b_0}{r}\right) - e_n(z) \right| = 0$$

gilt, ergibt sich schließlich

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|e_n - T_n^{\Gamma_r'(K)}\|_{\Gamma_r'(K)} = 0,$$

womit die Behauptung vollständig bewiesen ist. \square

Die Aussage des ersten Satzes von Heuser-Mohr stimmt mit der Intuition überein: Für genügend große $r > r(K)$ sind für ein zulässiges Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ die Kurven $\Gamma_r'(K)$ der Kreislinie $\partial\mathbb{D}$ immer ähnlicher, sodass man erwarten kann, dass sich auch die Tschebyscheffpolynome zu $\Gamma_r'(K)$ und $\partial\mathbb{D}$ immer weniger voneinander unterscheiden.

Dass diese Vorstellung allerdings auch sehr täuschen kann, zeigt der zweite Satz von Heuser-Mohr, dessen Beweis wir nun in Angriff nehmen wollen.

2.2. Zweiter Satz von Heuser-Mohr. Sei wieder $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum und $n \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben. Für alle $r > r(K)$ finden wir zu $T_n^{\Gamma_r(K)}$ gemäß Satz 2.31 eine Darstellung der Form

$$(5.6) \quad T_n^{\Gamma_r(K)} = F_n^K + \sum_{\nu=1}^n c_\nu^K(T_n^{\Gamma_r(K)}) F_\nu^K = F_n^K + \sum_{\nu=1}^n b_\nu(r) F_{n-\nu}^K,$$

wobei wir für $\nu = 1, \dots, n$ die Bezeichnung

$$b_\nu(r) := c_{n-\nu}^K(T_n^{\Gamma_r(K)})$$

verwenden. Nach Satz 2.36 finden wir für $\nu = 1, \dots, n$ Funktionen $f_\nu^K \in \mathcal{O}(D(0, \frac{1}{r(K)}))$, sodass

$$(5.7) \quad (F_\nu^K \circ \psi_K)(z) = z^\nu + \frac{1}{z} f_\nu^K\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{für alle } z \in \Delta_{r(K)}$$

erfüllt ist. Damit erhalten wir mit (5.6) für alle $z \in \Delta_{r(K)}$

$$\begin{aligned} T_n^{\Gamma_r(K)}(\psi_K(z)) &= (F_n^K \circ \psi_K)(z) + \sum_{\nu=1}^n b_\nu(r) (F_{n-\nu}^K \circ \psi_K)(z) \\ &= \left(z^n + \sum_{\nu=1}^n b_\nu(r) z^{n-\nu} \right) + \frac{1}{z} \left(f_n^K\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{\nu=1}^n b_\nu(r) f_{n-\nu}^K\left(\frac{1}{z}\right) \right) \end{aligned}$$

bzw. für alle $z = \frac{r}{\zeta}$ mit $r > r(K)$ und $\zeta \in \partial\mathbb{D}$

$$\frac{\zeta^n}{r^n} T_n^{\Gamma_r(K)}\left(\psi_K\left(\frac{r}{\zeta}\right)\right) = \left(1 + \sum_{\nu=1}^n \frac{b_\nu(r)}{r^\nu} \zeta^\nu \right) + \frac{\zeta^{n+1}}{r^{n+1}} \left(f_n^K\left(\frac{\zeta}{r}\right) + \sum_{\nu=1}^n b_\nu(r) f_{n-\nu}^K\left(\frac{\zeta}{r}\right) \right),$$

sodass insbesondere

$$\left| \frac{1}{r^n} T_n^{\Gamma_r(K)}\left(\psi_K\left(\frac{r}{\zeta}\right)\right) \right| = \left| 1 + \frac{1}{r^n} \Phi(r, \zeta) \right|$$

mit

$$(5.8) \quad \Phi(r, \zeta) := \sum_{\nu=1}^n b_\nu(r) r^{n-\nu} \zeta^\nu + \frac{\zeta^{n+1}}{r} \left(f_n^K\left(\frac{\zeta}{r}\right) + \sum_{\nu=1}^n b_\nu(r) f_{n-\nu}^K\left(\frac{\zeta}{r}\right) \right)$$

erfüllt ist. Wir zeigen nun das folgende

LEMMA 5.6. *Es gibt ein $R > r(K)$ und eine Konstante $C_n > 0$ mit der Eigenschaft, dass*

$$\|T_n^{\Gamma_r(K)}\|_{\Gamma_r(K)} \leq \|F_n^K\|_{\Gamma_r(K)} < r^n + \frac{C_n}{r}$$

für alle $r > R$ erfüllt ist.

Beweis. Wir betrachten die Darstellung in (5.7) und wählen ein $R > r(K)$, sodass

$$\sup_{z \in D(0, \frac{1}{R})} |f_n^K(z) - f_n^K(0)| < 1$$

und daher auch

$$\sup_{z \in D(0, \frac{1}{R})} |f_n^K(z)| < 1 + |f_n^K(0)| =: C_n$$

mit der Konstanten $C_n > 0$ erfüllt ist. Für alle $r > R$ gilt also

$$\|F_n^K \circ \psi_K\|_{\partial D(0,r)} = \max_{z \in \partial D(0,r)} \left| z^n + \frac{1}{z} f_n^K\left(\frac{1}{z}\right) \right| < r^n + \frac{C_n}{r}$$

und damit aufgrund der Minimaleigenschaft der Tschebyscheffpolynome

$$\|T_n^{\Gamma_r(K)}\|_{\Gamma_r(K)} \leq \|F_n^K\|_{\Gamma_r(K)} = \|F_n^K \circ \psi_K\|_{\partial D(0,r)} < r^n + \frac{C_n}{r},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Damit ergibt sich zusammenfassend, dass

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \max_{\zeta \in \partial \mathbb{D}} \left| 1 + \frac{1}{r^n} \Phi(r, \zeta) \right| &= \frac{1}{r^n} \max_{\zeta \in \partial \mathbb{D}} \left| T_n^{\Gamma_r(K)}\left(\psi_K\left(\frac{r}{\zeta}\right)\right) \right| \\ &= \frac{1}{r^n} \|T_n^{\Gamma_r(K)}\|_{\Gamma_r} < 1 + \frac{C_n}{r^{n+1}} \end{aligned}$$

für alle $r > R$ gilt.

Wir definieren nun für alle $r > r(K)$

$$B(r) := \max_{\nu=1, \dots, n} |b_\nu(r)| r^{n-\nu}$$

und zeigen die folgende

PROPOSITION 5.7. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 0.$$

Beweis. Nehmen wir an, die Behauptung wäre falsch, dann müsste es ein $\gamma > 0$ und eine Folge $(r_k)_{k=1}^\infty$ aus $(r(K), \infty)$ geben mit $r_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$ und $B(r_k) > \gamma$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten dann die durch

$$\beta_k := \frac{1}{B(r_k)} \begin{pmatrix} b_1(r_k) r_k^{n-1} \\ b_2(r_k) r_k^{n-2} \\ \vdots \\ b_n(r_k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}$$

bestimmte Folge $(\beta_k)_{k=1}^\infty$ in \mathbb{C}^n . Nach Definition von B folgt unmittelbar

$$\|\beta_k\|_\infty = \max_{\nu=1,\dots,n} \frac{b_\nu(r_k)r_k^{n-\nu}}{B(r_k)} = 1$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge $(\beta_k)_{k=1}^\infty$ liegt in der kompakten Menge

$$S := \{v \in \mathbb{C}^n; \|v\|_\infty = 1\}$$

und besitzt daher eine gegen einen Vektor $(B_1, \dots, B_n) \in S$ konvergente Teilfolge. Nach Übergang zu dieser Teilfolge können wir annehmen, dass bereits die ganze Folge $(\beta_k)_{k=1}^\infty$ gegen (B_1, \dots, B_n) konvergiert. Für $\nu = 1, \dots, n$ gilt also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_\nu(r_k)r_k^{n-\nu}}{B(r_k)} = B_\nu.$$

Wir definieren dann ein Polynom ϕ^* durch

$$\phi^*(z) := \sum_{\nu=1}^n B_\nu z^\nu, \quad z \in \mathbb{C},$$

welches offensichtlich $\phi^*(0) = 0$ erfüllt und wegen $(B_1, \dots, B_n) \in S_\infty^n$ nicht konstant sein kann. Weiter stellen wir fest, dass

- die Folge der Abbildungen

$$\zeta \mapsto \sum_{\nu=1}^n \frac{b_\nu(r_k)r_k^{n-\nu}}{B(r_k)} \zeta^\nu$$

für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf $\partial\mathbb{D}$ gegen $\phi^*|_{\partial\mathbb{D}}$ konvergiert.

- für $\nu = 1, \dots, n$ die Folge der Abbildungen

$$\zeta \mapsto f_{n-\nu}\left(\frac{\zeta}{r_k}\right)$$

für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf $\partial\mathbb{D}$ gegen $f_{n-\nu}(0)$ konvergiert und somit wegen

$$\left| \frac{b_\nu(r_k)}{B(r_k)r_k} \right| = \underbrace{\left| \frac{b_\nu(r_k)r_k^{n-\nu}}{B(r_k)} \right|}_{\leq 1} \frac{1}{r_k^{n-\nu+1}} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

auch die Folge der Abbildungen

$$\zeta \mapsto \frac{b_\nu(r_k)}{B(r_k)r_k} f_{n-\nu}\left(\frac{\zeta}{r_k}\right)$$

für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf $\partial\mathbb{D}$ gegen 0 konvergiert.

- ebenso auch die Folge der Abbildungen

$$\zeta \mapsto f_n\left(\frac{\zeta}{r_k}\right)$$

für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf $\partial\mathbb{D}$ gegen $f_n(0)$ konvergiert, sodass wegen

$$\frac{1}{B(r_k)r_k} \leq \frac{1}{\gamma r_k} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

auch die Folge der Abbildungen

$$\zeta \mapsto \frac{1}{B(r_k)r_k} f_n\left(\frac{\zeta}{r_k}\right)$$

für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf $\partial\mathbb{D}$ gegen 0 konvergiert.

Setzen wir nun $\Phi^*(r_k, \zeta) := \frac{1}{B(r_k)} \Phi(r_k, \zeta)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, so rechnen wir mit (5.8) nach, dass Φ^* die Darstellung

$$\Phi^*(r_k, \zeta) = \sum_{\nu=1}^n \frac{b_\nu(r_k)r_k^{n-\nu}}{B(r_k)} \zeta^\nu + \zeta^{n+1} \left(\frac{1}{B(r_k)r_k} f_n^K\left(\frac{\zeta}{r_k}\right) + \sum_{\nu=1}^n \frac{b_\nu(r_k)}{B(r_k)r_k} f_{n-\nu}^K\left(\frac{\zeta}{r_k}\right) \right)$$

besitzt, weshalb mit obigen Feststellungen die Folge der hierdurch definierten Abbildungen $\Phi^*(r_k, \cdot)$ für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf $\partial\mathbb{D}$ gegen $\phi^*|_{\partial\mathbb{D}}$ konvergiert. Da nun ϕ^* eine nicht konstante holomorphe Funktion darstellt, welche $\phi^*(0) = 0$ erfüllt, ist nach dem Satz von der Gebietstreue mit \mathbb{D} auch $\phi^*(\mathbb{D})$ ein Gebiet in \mathbb{C} , welches den Punkt 0 enthält und offenbar beschränkt ist. Der Weg unbeschränkte

$$\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t$$

kann also nicht vollständig in $\phi^*(\mathbb{D})$ verlaufen, muss also insbesondere einen Punkt aus $\partial\phi^*(\mathbb{D}) = \phi^*(\partial\mathbb{D})$ enthalten, d.h. es gibt ein $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ mit $\phi^*(\zeta) \in (0, \infty)$.

Da $\Phi^*(r_k, \zeta) \rightarrow \phi^*(\zeta)$ für $k \rightarrow \infty$ gilt, finden wir insbesondere ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|\Phi^*(r_k, \zeta) - \phi^*(\zeta)| < \frac{1}{2} \phi^*(\zeta)$$

alle $k \geq k_0$ erfüllt ist. Durch eventuelles Vergrößern von k_0 können wir wegen $r_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$ erreichen, dass zudem $r_k > R$ für alle $k \geq k_0$ gilt. Wir rechnen nun nach, dass

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\gamma}{2r_k^n} \phi^*(\zeta) &< 1 + \frac{B(r_k)}{2r_k^n} \phi^*(\zeta) \\ &= \left| 1 + \frac{B(r_k)}{r_k^n} \phi^*(\zeta) \right| - \frac{1}{2} \phi^*(\zeta) \frac{B(r_k)}{r_k^n} \\ &< \left| 1 + \frac{B(r_k)}{r_k^n} \phi^*(\zeta) \right| - |\Phi^*(r_k, \zeta) - \phi^*(\zeta)| \frac{B(r_k)}{r_k^n} \\ &\leq \left| \left(1 + \frac{B(r_k)}{r_k^n} \phi^*(\zeta) \right) - \frac{B(r_k)}{r_k^n} (\phi^*(\zeta) - \Phi^*(r_k, \zeta)) \right| \\ &= \left| 1 + \frac{1}{r_k^n} \Phi(r_k, \zeta) \right| \\ &\stackrel{(5.9)}{<} 1 + \frac{C_n}{r_k^{n+1}} \end{aligned}$$

und damit

$$r_k < \frac{2C_n}{\gamma \phi^*(\zeta)} < \infty$$

für alle $k \geq k_0$ erfüllt sein muss, was aber wegen $r_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$ nicht möglich ist. Die obige Annahme war also falsch, womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Wir können nun den folgenden Satz beweisen:

SATZ 5.8 (zweiter Satz von Heuser-Mohr). *Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|F_n^K - T_n^{\Gamma_r(K)}\|_{\Gamma_r(K)} = 0.$$

Insbesondere konvergiert $T_n^{\Gamma_r(K)}$ auf \mathbb{C} kompakt gegen F_n^K für $r \rightarrow \infty$.

Beweis. Sei also $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Für alle $r > r(K)$ gilt dann nach (5.6)

$$T_n^{\Gamma_r(K)} = F_n^K + \sum_{\nu=1}^n b_\nu(r) F_{n-\nu}^K$$

und daher nach Lemma 5.6 und Proposition 5.7 für alle $r > R$

$$\begin{aligned} \|T_n^{\Gamma_r(K)} - F_n^K\|_{\Gamma_r(K)} &\leq \sum_{\nu=1}^n |b_\nu(r)| \|F_{n-\nu}^K\|_{\Gamma_r(K)} \\ &\leq \sum_{\nu=1}^n |b_\nu(r)| \left(r^{n-\nu} + \frac{C_{n-\nu}}{r} \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^n |b_\nu(r)| r^{n-\nu} \left(1 + \frac{C_{n-\nu}}{r^{n+1-\nu}} \right) \\ &\leq B(r) \sum_{\nu=1}^n \left(1 + \frac{C_{n-\nu}}{r(K)^{n+1-\nu}} \right) \\ &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

womit der erste Teil der Behauptung bewiesen ist. Nach dem Maximumprinzip gilt nun

$$\|T_n^{\Gamma_r(K)} - F_n^K\|_{\Gamma_r(K)} = \|T_n^{\Gamma_r} - F_n^K\|_{K_r}$$

für alle $r > r(K)$ und damit, weil $(K_r)_{r > r(K)}$ nach Lemma 2.10 eine kompakte Ausschöpfung von \mathbb{C} liefert, auch der Zusatz. \square

Im Gegensatz zum ersten Satz von Heuser-Mohr 5.5 widerspricht der zweite Satz von Heuser-Mohr 5.8 der geometrischen Intuition: Auch wenn $\Gamma_r(K)$ für genügend große $r > r(K)$ kaum noch von $\partial D(0, r)$ unterschieden werden kann, enthalten die zugehörigen Tschebyscheffpolynome noch ausreichend viele Informationen über das Kompaktum K , damit im Grenzfall die Faberpolynome aus ihnen hervorgehen.

BEISPIEL 5.9. In Beispiel 4.25 haben wir gesehen, dass für das von der Hypocycloiden mit 3 Spitzen berandete Kompaktum H_3 für alle $r > 1$ die Beziehung

$$T_3^{(H_3)r}(w) = w^3 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{8r^6} \right), \quad w \in \mathbb{C}$$

gilt. In Beispiel 2.19 haben wir darüber hinaus schon festgehalten, dass

$$F_3^{H_3}(w) = w^3 - \frac{3}{2}, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Für alle $r > 1$ bemerken wir also

$$T_3^{(H_3)r} = F_3^{H_3} - \frac{1}{8r^6},$$

was nicht nur ein konkretes Beispiel für den zweiten Satz von Heuser-Mohr liefert, sondern auch zeigt, dass dabei durchaus beachtliche Konvergenzgeschwindigkeiten möglich sind.

KAPITEL 6

Lemniskaten

Wir haben gesehen, dass Faber- und Tschebyscheffpolynome unter affin linearen Abbildungen des Kompaktums und unter Spiegelungen des Kompaktums an der reellen Achse ein identisches Transformationsverhalten zeigen (vgl. Satz 2.23 und 4.10).

In diesem Kapitel wollen wir nun das Transformationsverhalten unter polynomialen Abbildungen des Kompaktums untersuchen. Den richtigen formalen Rahmen bilden hierzu die verallgemeinerten Lemniskaten.

1. Definition und erste Eigenschaften

In Beispiel 2.39 hatten wir bereits die **klassische Lemniskate**

$$L = \{z \in \mathbb{C}; |z^2 - 1| \leq 1\}$$

kennen gelernt, welche sich mit dem Polynom $Q(z) := z^2 - 1$ in der Form $L = Q^{-1}(\overline{\mathbb{D}})$ darstellen lässt. Dies veranlasst uns zu der folgenden

DEFINITION 6.1. Ist Q ein beliebiges komplexes holomorphes Polynom vom Grad $\deg(Q) \geq 1$, so nennen wir $Q^{-1}(\overline{\mathbb{D}})$ die **Lemniskate zu Q** .

Als weitere Verallgemeinerung dieser in der Literatur gängigen Definition wollen wir im Folgenden unter einer Lemniskaten ein polynomiales Urbild einer beliebigen kompakten Menge verstehen:

DEFINITION 6.2 (verallgemeinerte Lemniskaten). Sei $K \subset \mathbb{C}$ eine beliebige kompakte Menge und sei Q ein beliebiges komplexes holomorphes Polynom vom Grad $\deg(Q) \geq 1$. Dann nennen wir das Urbild $Q^{-1}(K)$ die **Lemniskate zu K unter Q** .

Bevor wir nun erste Eigenschaften verallgemeinerter Lemniskaten erarbeiten, halten wir zunächst die folgende einfache aber nützliche Hilfsaussage fest:

LEMMA 6.3. *Sei (X, τ) ein topologischer Hausdorffraum.*

- (i) *Sei Ω eine offene Teilmenge von X . Wird Ω mit der Relativtopologie $\tau|_{\Omega}$ von (X, τ) versehen, so ist eine Teilmenge $K \subseteq \Omega$ genau dann kompakt in $(\Omega, \tau|_{\Omega})$, wenn diese kompakt in (X, τ) ist.*
- (ii) *Ist (X, τ) kompakt und ist $f : X \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, so ist*

$$f|_{f^{-1}(\Omega)} : (f^{-1}(\Omega), \tau|_{f^{-1}(\Omega)}) \rightarrow (\Omega, \tau|_{\Omega})$$

für jede offene Teilmenge Ω von X eigentlich.

Beweis. (i) „ \Rightarrow “: Sei $K \subseteq \Omega$ kompakt in $(\Omega, \tau|_{\Omega})$ und sei $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige in (X, τ) offene Überdeckung von K . Wegen $K \subseteq \Omega$ ist dann auch $(U_i \cap \Omega)_{i \in I}$ eine Überdeckung von K durch (nach Definition der Relativtopologie) in $(\Omega, \tau|_{\Omega})$ offene Mengen. Da K in $(\Omega, \tau|_{\Omega})$ kompakt ist, existieren endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^n (U_{i_k} \cap \Omega) \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}.$$

Insbesondere ist also $(U_{i_k})_{k=1, \dots, n}$ eine endliche Teilüberdeckung von $(U_i)_{i \in I}$. Definitionsgemäß ist K in (X, τ) kompakt.

„ \Leftarrow “: Sei umgekehrt $K \subseteq \Omega$ kompakt in (X, τ) und $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige in $(\Omega, \tau|_{\Omega})$ offene Überdeckung von K . Nach Definition der Relativtopologie finden wir daher eine Familie $(V_i)_{i \in I}$ von in (X, τ) offenen Mengen, sodass $U_i = V_i \cap \Omega$ für alle $i \in I$ erfüllt ist. Insbesondere ist $(V_i)_{i \in I}$ eine in (X, τ) offene Überdeckung von K . Da K in (X, τ) kompakt ist, finden wir endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{i_k}$. Wegen $K \subseteq \Omega$ erhalten wir genauer

$$K \subseteq \Omega \cap \bigcup_{k=1}^n V_{i_k} = \bigcup_{k=1}^n (V_{i_k} \cap \Omega) = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k},$$

sodass $(U_{i_k})_{k=1, \dots, n}$ eine endliche Teilüberdeckung von $(U_i)_{i \in I}$ darstellt. Definitionsgemäß ist K in $(\Omega, \tau|_{\Omega})$ kompakt.

(ii) Sei $K \subseteq \Omega$ eine beliebige in $(\Omega, \tau|_{\Omega})$ kompakte Teilmenge. Nach (i) ist K auch in (X, τ) kompakt, also insbesondere abgeschlossen. Da $f : X \rightarrow X$ stetig ist, stellt $f^{-1}(K)$ eine in (X, τ) abgeschlossene Teilmenge dar, ist also (da (X, τ) kompakt ist) auch kompakt in (X, τ) . Wegen $K \subseteq \Omega$ gilt $f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}(\Omega)$, sodass gemäß (i)

$$(f|_{f^{-1}(\Omega)})^{-1}(K) = f^{-1}(K)$$

eine in $(f^{-1}(\Omega), \tau|_{f^{-1}(\Omega)})$ kompakte Menge darstellt. Also ist $f|_{f^{-1}(\Omega)}$ definitionsgemäß eigentlich. \square

LEMMA 6.4. *Ist Q ein komplexes holomorphes Polynom vom Grad $\deg(Q) \geq 1$, dann ist die durch Q gegebene Abbildung $Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eigentlich. Insbesondere ist die Lemniskate $Q^{-1}(K)$ zu einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{C}$ unter Q kompakt.*

Beweis. Wie im Beweis zum Fundamentalsatz der Algebra 1.14 angegeben induziert Q durch $Q(\infty) := \infty$ eine holomorphe Abbildung $Q : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, welche nach Lemma 6.3 auf $Q^{-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ eigentlich ist. Nach Definition 1.16 ist für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$ auch $Q^{-1}(K) \subset \mathbb{C}$ kompakt, womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Im Folgenden wird für uns unter anderem die Frage wichtig sein, ob die Lemniskate $Q^{-1}(\overline{\mathbb{D}})$ zu einem beliebigen komplexen holomorphen Polynom Q vom Grad $\deg(Q) \geq 1$ zusammenhängend ist. Hierzu gibt Ch. Pommerenke in [Pom61] dieses Kriterium an:

SATZ 6.5 (Theorem 10 in [Pom61]). Sei Q ein normiertes Polynom und seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ die (nicht notwendig paarweise verschiedenen) Nullstellen von Q , d.h. Q besitzt die Linearfaktorzerlegung

$$Q(z) = \prod_{\nu=1}^n (z - z_\nu).$$

Setzen wir nun

$$z_0 := \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n z_\nu \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n |z_\nu|^2,$$

so gelten im Fall $z_0 = 0$ die beiden folgenden Aussagen:

- (i) Gilt $|z_\nu| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $z_\nu \in [-1, 1]$ für alle $\nu = 1, \dots, n$, dann ist $Q^{-1}(\overline{\mathbb{D}})$ zusammenhängend.
- (ii) Ist $Q^{-1}(\overline{\mathbb{D}})$ zusammenhängend, dann gilt $|z_\nu| < 2$ für alle $\nu = 1, \dots, n$ und $\sigma < \sqrt{2}$.

In Abschnitt 83 von Kapitel 17 seines Buchs [Mar65] erörtert A. I. Markushevich die Gestalt der verallgemeinerten Lemniskaten $Q^{-1}(\overline{D(0, r)})$ bei festem Polynom $Q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ und variierendem $r > 0$. Als Anwendung des Maximumprinzips für holomorphe Funktionen zeigt er dabei die folgende Aussage, wobei deren Formulierung an unsere Situation angepasst ist:

LEMMA 6.6 (Chap. 17, Sec. 83 in [Mar65]). Sei $Q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ mit $n \geq 1$ gegeben. Ist $L := Q^{-1}(\overline{D(0, r)})$ für ein $r > 0$ zusammenhängend, dann ist L bereits einfach zusammenhängend und damit zulässig.

In Verbindung mit diesem Lemma 6.6 liefert Satz 6.5 ein Kriterium, mit dem überprüft werden kann, ob die Lemniskate zu einem vorgegebenen holomorphen Polynom zulässig ist.

BEISPIEL 6.7. Unter Verwendung dieses Kriteriums lassen sich eine Vielzahl von zulässigen Lemniskaten angeben. Eine kleine Auswahl findet sich in Tabelle 1. Wir verwenden dort die Abkürzungen $\alpha := \frac{1}{2}(1 + i)$ und $\beta := \frac{1}{2}\sqrt{2}i$.

Die Situation gestaltet sich natürlich schwieriger, wenn wir die Zulässigkeit beliebiger verallgemeinerter Lemniskaten nachweisen wollen. Uns stehen daher nur wenige Beispiele zur Verfügung: Neben dem m -Stern S_m aus Beispiel 2.43, von welchem wir unter 4.26 die Eigenschaft $S_m = e_m^{-1}([-2, 2])$ festgehalten haben, können wir an dieser Stelle noch das nachfolgende Beispiel geben:

BEISPIEL 6.8. Wir fixieren ein $0 < q < 3$ und betrachten das Polynom $Q \in \mathcal{P}_3^1(\mathbb{C})$, welches durch

$$Q(z) := z^3 - qz \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

gegeben ist. Eine einfache Kurvendiskussion der auf \mathbb{R} reellen Funktion Q zeigt:

- Die (reellen) Nullstellen der Funktion Q liegen bei 0 und $\pm\sqrt{q}$.

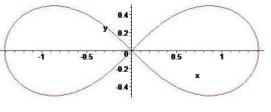
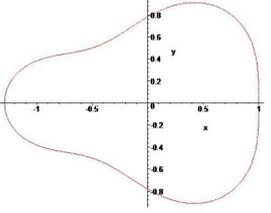
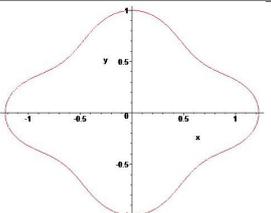
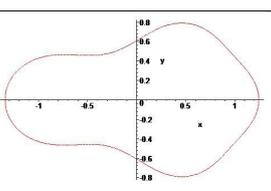
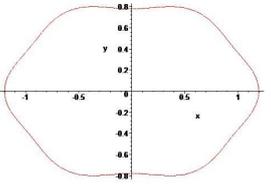
$n = \deg(Q)$	$Q(z)$	z_1, \dots, z_n	$Q^{-1}(\partial\mathbb{D})$
2	$z^2 - 1$	$-1, 1$	
3	$z^3 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$	$-1, \alpha, \bar{\alpha}$	
4	$z^4 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}$	$-1, 1, \beta, \bar{\beta}$	
5	$z^5 - \frac{3}{2}z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$	$-1, -1, 1, \alpha, \bar{\alpha}$	
6	$z^6 - z^4 + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{4}$	$-\alpha, -\bar{\alpha}, -1, 1, \alpha, \bar{\alpha}$	

TABELLE 1. zulässige Lemniskaten

• Es ist $Q'(t) = 3t^2 - q$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Als lokale Maximumstelle ergibt sich $-\sqrt{\frac{q}{3}}$ mit dem lokalen Maximum $2\left(\frac{q}{3}\right)^{\frac{3}{2}} < 2$. Als lokale Minimumstelle erhalten wir $\sqrt{\frac{q}{3}}$ mit dem lokalen Minimum $-2\left(\frac{q}{3}\right)^{\frac{3}{2}} > -2$. Es gibt also ein eindeutiges $d > \sqrt{q}$ mit $Q(d) = 2$, für welches die Bedingung

$$(6.1) \quad Q([-d, d]) = [-2, 2]$$

erfüllt ist. Damit definieren wir die stetigen Wege

$$\gamma_0 : [-d, d] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto t$$

und

$$\gamma_1 : [-d, d] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} \left(t + \sqrt{4q - 3t^2} \right), & 4q - 3t^2 \geq 0 \\ \frac{1}{2} \left(t + i\sqrt{3t^2 - 4q} \right), & 4q - 3t^2 < 0 \end{cases}$$

und

$$\gamma_2 : [-d, d] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} \left(t - \sqrt{4q - 3t^2} \right), & 4q - 3t^2 \geq 0 \\ \frac{1}{2} \left(t - i\sqrt{3t^2 - 4q} \right), & 4q - 3t^2 < 0 \end{cases}$$

Man rechnet leicht nach, dass damit

$$(6.2) \quad Q(\gamma_j(t)) = Q(t) \quad \text{für alle } t \in [-d, d]$$

für $j = 0, 1, 2$ gilt. Wegen (6.1) ist also insbesondere

$$\gamma_0([-d, d]) \cup \gamma_1([-d, d]) \cup \gamma_2([-d, d]) \subseteq Q^{-1}([-2, 2]).$$

Wir zeigen nun, dass hierbei sogar Gleichheit gilt: Ist $w \in [-2, 2]$ vorgegeben, so finden wir wegen (6.1) ein $t \in [-d, d]$ mit der Eigenschaft $Q(t) = w$. Nach (6.2) erhalten wir also

$$(6.3) \quad \{\gamma_j(t); j = 0, 1, 2\} \subseteq Q^{-1}(\{w\}).$$

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

FALL 1: Die Punkte $\gamma_0(t)$, $\gamma_1(t)$ und $\gamma_2(t)$ sind paarweise verschieden.

Da das Urbild $Q^{-1}(\{w\})$ nach dem Fundamentalsatz der Algebra 1.14 aus höchstens 3 verschiedenen Punkten bestehen kann, gilt in diesem Fall bei obiger Inklusion (6.3) offenbar Gleichheit und damit

$$Q^{-1}(\{w\}) \subseteq \gamma_0([-d, d]) \cup \gamma_1([-d, d]) \cup \gamma_2([-d, d]).$$

FALL 2: Es gilt $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$.

Im diesem Fall erhalten wir nach Definition der Wege γ_1 und γ_2 unmittelbar die Bedingung $4q - 3t^2 = 0$. Es ist also $t \neq 0$ und daher

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = \frac{t}{2} \neq t = \gamma_0(t).$$

Beachten wir, dass damit

$$Q'\left(\frac{t}{2}\right) = 3\left(\frac{t}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4}(3t^2 - 4q) = 0$$

gilt, so können wir folgern, dass $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ sogar eine doppelte Nullstelle des Polynoms $z \mapsto Q(z) - w$ ist, d.h. es gilt auch in diesem Fall in (6.3) Gleichheit und damit

$$Q^{-1}(\{w\}) \subseteq \gamma_0([-d, d]) \cup \gamma_1([-d, d]) \cup \gamma_2([-d, d]).$$

FALL 3: Es gilt $\gamma_0(t) = \gamma_1(t)$.

Nach Definition der Wege γ_0 und γ_1 ergibt sich in diesem Fall die Bedingung $t = \sqrt{4q - 3t^2}$, welche offenbar nur für $t = \sqrt{q}$ erfüllt ist. Damit können wir

$$w = Q(t) = t^3 - qt = 0.$$

folgern, womit sich nach dem Fundamentalsatz der Algebra 1.14 unmittelbar

$$Q^{-1}(\{w\}) = \{-\sqrt{q}, 0, \sqrt{q}\} = \{\gamma_0(-\sqrt{q}), \gamma_0(0), \gamma_0(\sqrt{q})\}$$

unter Beachtung von $\pm\sqrt{q} \in [-d, d]$ ergibt. Es folgt schließlich

$$Q^{-1}(\{w\}) \subseteq \gamma_0([-d, d]) \cup \gamma_1([-d, d]) \cup \gamma_2([-d, d]).$$

FALL 4: Es gilt $\gamma_0(t) = \gamma_2(t)$.

Nach Definition der Wege γ_0 und γ_2 ergibt sich in diesem Fall die Bedingung $t = -\sqrt{4q - 3t^2}$, welche offenbar nur für $t = -\sqrt{q}$ erfüllt ist. Wir können dann wieder

$$w = Q(t) = t^3 - qt = 0$$

nachrechnen, womit sich nach dem Fundamentalsatz der Algebra 1.14

$$Q^{-1}(\{w\}) = \{-\sqrt{q}, 0, \sqrt{q}\} = \{\gamma_0(-\sqrt{q}), \gamma_0(0), \gamma_0(\sqrt{q})\}$$

und damit, wie in Fall 3, die Inklusion

$$Q^{-1}(\{w\}) \subseteq \gamma_0([-d, d]) \cup \gamma_1([-d, d]) \cup \gamma_2([-d, d])$$

ergibt.

Da $w \in [-2, 2]$ beliebig vorgegeben war, folgt zusammenfassend die behauptete Gleichheit:

$$Q^{-1}([-2, 2]) = \gamma_0([-d, d]) \cup \gamma_1([-d, d]) \cup \gamma_2([-d, d])$$

Demnach lässt sich die verallgemeinerte Lemniskate $Q^{-1}([-2, 2])$ als Vereinigung der Spuren der Wege γ_0 , γ_1 und γ_2 beschreiben. In Abbildung 6.1 ist dies für verschiedene Werte $q \in (0, 3)$ dargestellt.

2. Tschebyscheffpolynome zu Lemniskaten

Sei K ein Kompaktum, welches aus mindestens $n + 1$ Punkten besteht und $Q^{-1}(K)$ die verallgemeinerte Lemniskate zu K unter einem normierten komplexen Polynom Q vom Grad $m := \deg(Q) \geq 1$. Besteht die Lemniskate $Q^{-1}(K)$ aus mindestens $mn + 1$ Punkten, so können wir uns die Frage stellen, ob es einen Zusammenhang zwischen den damit eindeutig bestimmten Tschebyscheffpolynomen $T_{nm}^{Q^{-1}(K)}$ und T_n^K gibt.

Zu diesem Problem wählen wir allerdings den etwas allgemeineren Zugang über Tschebyschefffunktionen (vgl. Definition 4.6), da sich dieser ohne Mehraufwand behandeln lässt: Ist nämlich $f \in C(K)$ gegeben, sodass sowohl $f \notin \mathcal{P}_{\leq n-1}(K)$ als auch $f \circ Q \notin \mathcal{P}_{\leq nm-1}(Q^{-1}(K))$ erfüllt ist, so können wir die entsprechende Frage stellen, welcher Zusammenhang zwischen T_n^f und $T_{nm}^{f \circ Q}$ besteht.

LEMMA 6.9. *Sei $Q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C})$ mit $m \geq 1$. Dann gibt es eine Familie von Polynomen $(P_n^Q)_{n=0}^\infty$, sodass für jedes $w \in \mathbb{C}$ die Funktion*

$$z \mapsto \frac{zQ'(z)}{Q(z) - w}$$

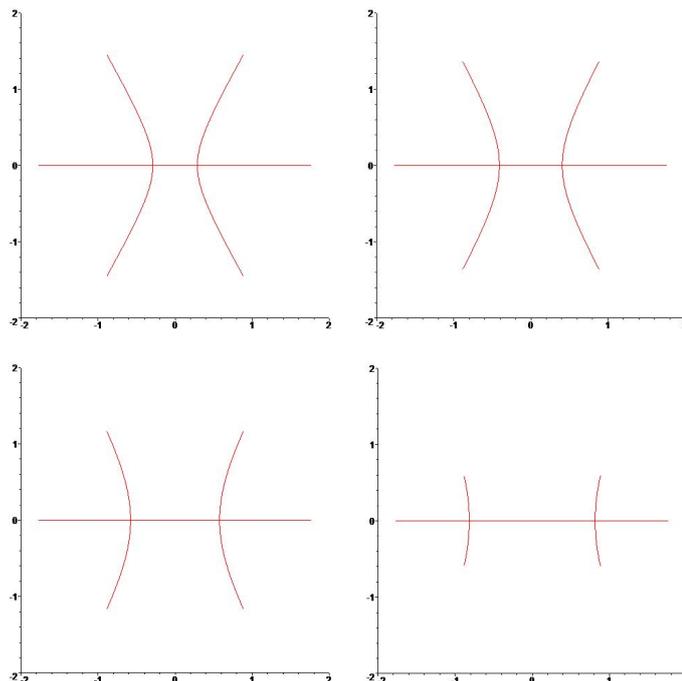


ABBILDUNG 6.1. $Q^{-1}([-2, 2])$ zu $Q(z) = z^3 - qz$ für $q = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2$

in einer Umgebung von ∞ eine Laurententwicklung der Form

$$\frac{zQ'(z)}{Q(z) - w} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^Q(w)z^{-n}$$

besitzt. Diese Polynome erfüllen ferner

$$(6.4) \quad \deg(P_n^Q) \leq \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Sei also $Q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C})$ für $m \geq 1$ mit einer Darstellung

$$Q(z) = q_m z^m + q_{m-1} z^{m-1} + \cdots + q_0$$

gegeben. Ist nun $w \in \mathbb{C}$ beliebig vorgegeben, so besitzt die Gleichung $Q(z) = w$ nur endlich viele Lösungen, d.h. wir können ein $r > 0$ wählen, sodass $z \mapsto Q(z) - w$ auf Δ_r^* keine Nullstellen besitzt. Insbesondere erhalten wir eine wohldefinierte holomorphe Funktion

$$f_w : \Delta_r^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{zQ'(z)}{Q(z) - w}.$$

Wegen

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{Q'(z)}{z^{m-1}} = mq_m \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{Q(z) - w}{z^m} = q_m$$

ist f_w nach dem Riemannsches Hebbarkeitssatz 1.8 im Punkt ∞ holomorph durch den Wert

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f_w(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{zQ'(z)}{Q(z) - w} = \frac{mq_m}{q_m} = m$$

ergänzt, d.h. wir erhalten eine holomorphe Funktion $f_w : \Delta_r \rightarrow \mathbb{C}$. Wir können daher f_w in einer Umgebung U_w von ∞ in eine gleichmäßig absolut konvergente Laurentreihe entwickeln:

$$\frac{zQ'(z)}{Q(z) - w} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^Q(w) z^{-n}, \quad z \in U_w^*$$

Für alle $z \in U_w^*$ rechnen wir nun nach, dass

$$\begin{aligned} & (Q(z) - w) \sum_{n=0}^{\infty} P_n^Q(w) z^{-n} \\ &= \left(\sum_{k=0}^m q_k z^k - w \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n^Q(w) z^{-n} \right) \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^{\infty} q_k P_n^Q(w) z^{-n+k} - \sum_{n=0}^{\infty} w P_n^Q(w) z^{-n} \\ &= \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k-n=l} q_k P_n^Q(w) \right) z^l + \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{n-k=l} q_k P_n^Q(w) - w P_l^Q(w) \right) z^{-l} \\ &= \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=0}^{m-l} q_{k+l} P_k^Q(w) \right) z^l + \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m q_k P_{k+l}^Q(w) - w P_l^Q(w) \right) z^{-l} \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit

$$zQ'(z) = z \left(\sum_{l=1}^m l q_l z^{l-1} \right) = \sum_{l=1}^m l q_l z^l, \quad z \in U_w \setminus \{\infty\}$$

zeigt, dass die Koeffizientenfolge $(P_n^Q(w))_{n=0}^{\infty}$ den Bedingungen

$$\sum_{k=0}^{m-l} q_{k+l} P_k^Q(w) = l q_l \quad \text{für } l = 1, \dots, m$$

und

$$\sum_{k=0}^m q_k P_{k+l}^Q(w) - w P_l^Q(w) = 0 \quad \text{für } l \in \mathbb{N}_0$$

genügt.

Wir können also $P_0^Q(X), \dots, P_{m-1}^Q(X)$ aus dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} mq_m \\ \vdots \\ 2q_2 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ q_2 & \dots & q_m & 0 \\ q_1 & \dots & q_{m-1} & q_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{m-1}^Q(X) \\ \vdots \\ P_1^Q(X) \\ P_0^Q(X) \end{pmatrix}$$

bestimmen, d.h. $P_0^Q(X), \dots, P_{m-1}^Q(X)$ sind konstante Polynome aus $\mathbb{C}[X]$ und erfüllen somit die Gradbedingung (6.4). Damit bestimmen wir rekursiv

$$(6.5) \quad P_{l+m}^Q(X) = \frac{1}{q_m} \left(X P_l^Q(X) - \sum_{k=0}^{m-1} q_k P_{l+k}^Q(X) \right), \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

Hierdurch wird eine Familie $(P_n^Q(X))_{n=0}^\infty$ von Polynomen definiert, welche der Gradbedingung (6.4) genügen. In der Tat überzeugt man sich, dass für alle $d \in \mathbb{N}_0$ und für alle $r \in \{0, \dots, m-1\}$ die Aussage

$$(6.6) \quad \deg(P_{dm+r}^Q) \leq \left\lfloor \frac{dm+r}{m} \right\rfloor = d$$

erfüllt ist: Für $d = 0$ ist (6.6) offenbar für alle $r \in \{0, \dots, m-1\}$ gültig, da P_0^Q, \dots, P_{m-1}^Q , wie bereits oben bemerkt, Polynome vom Grad 0 darstellen. Wir nehmen nun an, dass die Behauptung (6.6) für alle $d \in \{0, \dots, d_0\}$ und alle $r \in \{0, \dots, m-1\}$ mit einem $d_0 \in \mathbb{N}_0$ bereits gezeigt ist. Für $r = 0$ rechnet man unter Verwendung obiger Rekursion (6.5) unmittelbar nach, dass

$$\begin{aligned} P_{(d_0+1)m}^Q(X) &= P_{d_0m+m}^Q(X) \\ &= \frac{1}{q_m} \left(X P_{d_0m}^Q(X) - \sum_{k=0}^{m-1} q_k P_{d_0m+k}^Q(X) \right) \end{aligned}$$

und damit $\deg(P_{(d_0+1)m}^Q) \leq d_0 + 1$ gilt, da nach Voraussetzung

- $X P_{d_0m}^Q(X)$ ein Polynom vom Grad $\leq d_0 + 1$ und
- $P_{d_0m+k}^Q(X)$ für $k = 0, \dots, m-1$ ein Polynom vom Grad $\leq d_0$

darstellt. Ist nun (6.6) bereits für alle $r \in \{0, \dots, r_0\}$ mit einem $r_0 \in \{0, \dots, m-2\}$ gezeigt (im Fall $m = 1$ kann dieser Schritt ausgelassen werden), dann erhalten wir mit der Rekursion in (6.5)

$$\begin{aligned} P_{(d_0+1)m+(r_0+1)}^Q(X) &= P_{(d_0m+r_0+1)+m}^Q(X) \\ &= \frac{1}{q_m} \left(X P_{d_0m+(r_0+1)}^Q(X) - \sum_{k=0}^{m-1} q_k P_{d_0m+r_0+1+k}^Q(X) \right) \end{aligned}$$

und damit $\deg(P_{(d_0+1)m+(r_0+1)}^Q) \leq d_0 + 1$, da nach Voraussetzung

- $X P_{d_0m+(r_0+1)}^Q(X)$ ein Polynom vom Grad $\leq d_0 + 1$ und

- $P_{d_0 m + r_0 + 1 + k}^Q(X)$ für $k = 0, \dots, m - 1$ wegen

$$d_0 m + r_0 + 1 + k \leq d_0 m + r_0 + m = (d_0 + 1)m + r_0$$

ein Polynom vom Grad $\leq d_0 + 1$

darstellt. Induktiv ist (6.6) damit für $d = d_0 + 1$ und alle $r \in \{0, \dots, m - 1\}$ gezeigt.

Ebenfalls induktiv ergibt sich damit die Gültigkeit der Abschätzung (6.6) für alle $d \in \mathbb{N}_0$ und alle $r \in \{0, \dots, m - 1\}$. \square

SATZ 6.10. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\#K \geq n + 1$ gegeben. Für $f \in C(K) \setminus \mathcal{P}_{\leq n}(K)$ und $Q \in \mathcal{P}_m^1(\mathbb{C})$ mit $m \geq 1$ gelte $\#Q^{-1}(K) \geq nm + 1$ und $f \circ Q \notin \mathcal{P}_{\leq nm-1}(Q^{-1}(K))$. Dann ist*

$$T_{nm}^{f \circ Q} = T_n^f \circ Q.$$

Beweis. Für $f \in C(K) \setminus \mathcal{P}_{\leq n}(K)$ finden wir nach Satz 3.18 (ii) eine Faber-Sesquilinearform

$$B_n^f : \mathcal{A}_n(f) \times \mathcal{A}_n(f) \rightarrow \mathbb{C}$$

zu $(\mathcal{P}_{\leq n-1}(K), f, p_n^*(f))$ der Form

$$B_n^f(p, q) = \sum_{w \in E(T_n^f, K)} \alpha(w) p(w) \overline{q(w)}, \quad \text{für } p, q \in \mathcal{A}_n(f)$$

mit einer endlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung α auf $E(T_n^f, K)$. Ist nun $Q \in \mathcal{P}_m^1(\mathbb{C})$ mit $m \geq 1$ und einer Darstellung

$$Q(z) = z^m + q_{m-1}z^{m-1} + \dots + q_0$$

gegeben, so definieren wir eine Abbildung

$$\beta : Q^{-1}(E(T_n^f, K)) \rightarrow [0, 1], \quad v \mapsto \frac{\mu_Q(v, Q(v))}{m} \alpha(Q(v)).$$

Hierbei bezeichnen für alle $w \in \mathbb{C}$ und $v \in Q^{-1}(\{w\})$ mit $\mu_Q(v, w)$ die Vielfachheit, mit der Q an der Stelle v den Wert w annimmt, d.h. es gilt

$$Q(z) - w = \prod_{v \in Q^{-1}(\{w\})} (z - v)^{\mu_Q(v, w)}$$

und zudem

$$\sum_{v \in Q^{-1}(\{w\})} \frac{\mu_Q(v, w)}{m} = 1.$$

Insbesondere erfüllt β die Bedingung¹

$$\begin{aligned} \sum_{v \in Q^{-1}(E(T_n^f, K))} \beta(v) &= \sum_{w \in E(T_n^f, K)} \sum_{v \in Q^{-1}(\{w\})} \frac{\mu_Q(v, Q(v))}{m} \alpha(Q(v)) \\ &= \sum_{w \in E(T_n^f, K)} \underbrace{\left(\sum_{v \in Q^{-1}(\{w\})} \frac{\mu_Q(v, w)}{m} \right)}_{=1} \alpha(w) \\ &= \sum_{w \in E(T_n^f, K)} \alpha(w) = 1. \end{aligned}$$

Wir setzen nun $L := Q^{-1}(K)$ und definieren eine Sesquilinearform

$$B_{nm}^{f \circ Q} : \mathcal{A}_{nm}(f \circ Q) \times \mathcal{A}_{nm}(f \circ Q) \rightarrow \mathbb{C}$$

durch

$$B_{nm}^{f \circ Q}(p, q) := \sum_{v \in Q^{-1}(E(T_n^f, K))} \beta(v) p(v) \overline{q(v)} \quad \text{für alle } p, q \in \mathcal{A}_{nm}(f \circ Q).$$

Wir rechnen nun nach, dass diese eine Faber-Sesquilinearform für $T_n^f \circ Q$ darstellt, also die Eigenschaften (i) bis (iv) aus Definition 4.4 hat.

(i) Für alle $p \in \mathcal{A}_{nm}(f \circ Q)$ gilt offensichtlich $B_{nm}^{f \circ Q}(p, p) \geq 0$.

(ii) Für alle $p \in \mathcal{A}_{nm}(f \circ Q)$ gilt $|p(v)| \leq \|p\|_L$ für alle $v \in Q^{-1}(E(T_n^f, K)) \subseteq L$ und damit

$$B_{nm}^{f \circ Q}(p, p) = \sum_{v \in Q^{-1}(E(T_n^f, K))} \beta(v) |p(v)|^2 \leq \underbrace{\left(\sum_{v \in Q^{-1}(E(T_n^f, K))} \beta(v) \right)}_{=1} \|p\|_L^2 = \|p\|_L^2$$

(iii) Ist nun $w \in K$ gegeben, so finden wir nach obigem Satz ein $r > 0$, sodass $Q^{-1}(\{w\}) \subseteq D(0, r)$ erfüllt ist und zudem die Funktion

$$z \mapsto \frac{zQ'(z)}{Q(z) - w}$$

auf Δ_r eine Laurententwicklung um ∞ der Form

$$\frac{zQ'(z)}{Q(z) - w} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^Q(w) z^{-k}$$

besitzt, wobei P_k^Q für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom vom Grad

$$\deg(P_k^Q) \leq \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor$$

¹Man beachte, dass die in diesem Beweis auftretenden Summen wie endliche Summen behandelt werden können, da höchstens endlich viele Summanden auftreten.

darstellt. Für $r' > r$ ist diese dann auf $\partial D(0, r')$ gleichmäßig absolut konvergent. Ist nun $p \in \mathcal{P}_{\leq nm-1}(L)$ gegeben, so rechnen wir mit Hilfe der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel nach, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r')} p(z) \frac{Q'(z)}{Q(z) - w} dz &= \frac{1}{2m\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r')} \frac{p(z)}{z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k^Q(w) z^{-k} \right) dz \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} P_k^Q(w) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r')} \frac{p(z)}{z^{k+1}} dz \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{nm-1} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} P_k^Q(w) \end{aligned}$$

und ferner unter Verwendung des Argumentprinzips A.1

$$\frac{1}{2m\pi i} \int_{\partial_+ D(0, r')} p(z) \frac{Q'(z)}{Q(z) - w} dz = \sum_{v \in Q^{-1}(\{w\})} \frac{\mu_Q(v, w)}{m} p(v)$$

erfüllt ist. Definieren wir also eine Funktion $\hat{p} : K \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\hat{p}(w) := \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{nm-1} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} P_k^Q(w), \quad w \in K,$$

so erfüllt diese

$$\hat{p} \in \text{LH} \{P_k^Q|_K; k = 0, \dots, nm-1\} \subseteq \mathcal{P}_{\leq n-1}(K)$$

und ferner

$$\hat{p}(w) = \sum_{v \in Q^{-1}(\{w\})} \frac{\mu_Q(v, w)}{m} p(v), \quad w \in K.$$

Damit rechnen wir nun (unter Beachtung von $E(T_n^f, K) \subseteq K$) nach:

$$\begin{aligned} B_{nm}^{f \circ Q}(p, T_n^f \circ Q) &= \sum_{v \in Q^{-1}(E(T_n^f, K))} \beta(v) p(v) \overline{T_n^f(Q(v))} \\ &= \sum_{w \in E(T_n^f, K)} \sum_{v \in Q^{-1}(\{w\})} \frac{\mu_Q(v, Q(v))}{m} \alpha(Q(v)) \overline{T_n^f(Q(v))} \\ &= \sum_{w \in E(T_n^f, K)} \left(\sum_{v \in Q^{-1}(\{w\})} \frac{\mu_Q(v, w)}{m} p(v) \right) \alpha(w) \overline{T_n^f(w)} \\ &= \sum_{w \in E(T_n^f, K)} \alpha(w) \hat{p}(w) \overline{T_n^f(w)} \\ &= B_n^K(\hat{p}, T_n^f) \end{aligned}$$

Da B_n^f eine Faber-Sesquilinearform für T_n^f ist und $\hat{p} \in \mathcal{P}_{\leq n-1}(K)$ erfüllt ist, gilt $B_n^f(\hat{p}, T_n^f) = 0$ und somit auch $B_{nm}^{f \circ Q}(p, T_n^f \circ Q) = 0$.

(iv) Zudem überzeugen wir uns, dass

$$\begin{aligned}
B_{nm}^{f \circ Q}(T_n^f \circ Q, T_n^f \circ Q) &= \sum_{v \in Q^{-1}(E(T_n^f, K))} \beta(v) |T_n^f(Q(v))|^2 \\
&= \sum_{w \in E(T_n^f, K)} \sum_{v \in Q^{-1}(\{w\})} \frac{\mu_Q(v, Q(v))}{m} \alpha(Q(v)) |T_n^f(Q(v))|^2 \\
&= \sum_{w \in E(T_n^f, K)} \alpha(w) \underbrace{\left(\sum_{v \in Q^{-1}(\{w\})} \frac{\mu_Q(v, w)}{m} \right)}_{=1} |T_n^f(w)|^2 \\
&= \sum_{w \in E(T_n^f, K)} \alpha(w) |T_n^f(w)|^2 \\
&= B_n^f(T_n^f, T_n^f).
\end{aligned}$$

Da B_n^f eine Faber-Sesquilinearform für T_n^f ist, gilt $B_n^f(T_n^f, T_n^f) = \|T_n^f\|_K^2$ und damit auch

$$B_{nm}^{f \circ Q}(T_n^f \circ Q, T_n^f \circ Q) = B_n^f(T_n^f, T_n^f) = \|T_n^f\|_K^2 = \|T_n^f \circ Q\|_L^2,$$

da offensichtlich $Q(L) = K$ gilt.

Damit stellt $B_{nm}^{f \circ Q}$ eine Faber-Sesquilinearform für das normierte Polynom $T_n^f \circ Q$ dar, womit $T_n^f \circ Q$ nach Satz 4.5 ein Minimalpolynom für $(\mathcal{A}_{nm}^1(f \circ Q), \|\cdot\|_L)$ sein muss. Besteht nun $L = Q^{-1}(K)$ aus mehr als $nm + 1$ Punkten, so ist dieses nach Satz 4.6 eindeutig bestimmt, muss also mit $T_{nm}^{f \circ Q}$ übereinstimmen muss. Es gilt also

$$T_{nm}^{f \circ Q} = T_n^f \circ Q,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Damit erhalten wir als Antwort auf die eingangs gestellte Frage und als Erklärung für unsere Beobachtungen in Beispiel 4.26 unmittelbar

KOROLLAR 6.11. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\#K \geq n + 1$ gegeben.*

(i) *Für $Q \in \mathcal{P}_m^1(\mathbb{C})$ mit $m \geq 1$ und $\#Q^{-1}(K) \geq nm + 1$ gilt*

$$T_{nm}^{Q^{-1}(K)} = T_n^K \circ Q.$$

(ii) *Für $Q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C})$ mit $m \geq 1$ und $\#Q^{-1}(K) \geq nm + 1$ gilt*

$$T_{nm}^{Q^{-1}(K)} = \frac{1}{q_m^n} T_n^K \circ Q,$$

wobei wir das Polynom Q darstellen als

$$Q(z) = q_m z^m + q_{m-1} z^{m-1} + \cdots + q_1 z + q_0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Aussage (i) ergibt sich unmittelbar als Anwendung von Satz 6.10 im Fall $f = e_n$.

Für den Nachweis der unter (ii) angegebenen Formel definieren wir zu $Q \in$

$\mathcal{P}_m(\mathbb{C})$ das normierte Polynom $\tilde{Q} := \frac{1}{q_m}Q$ sowie das Kompaktum $\tilde{K} := \frac{1}{q_m}K$ und rechnen nach, dass $Q^{-1}(K) = \tilde{Q}^{-1}(\tilde{K})$ und damit gemäß (i) auch

$$T_{nm}^{Q^{-1}(K)} = T_{nm}^{\tilde{Q}^{-1}(\tilde{K})} = T_n^{\tilde{K}} \circ \tilde{Q} = \frac{1}{q_m^n} T_n^K \circ Q$$

gilt, wobei wir im letzten Schritt Lemma 4.10 (i) verwendet haben. \square

An dieser Stelle sei bemerkt, dass sich Satz 6.10 bereits als Theorem 2.1 bzw. Korollar 6.11 als Corollary 2.2 in der Arbeit [FP01] von F. Peherstorfer und B. Fischer findet, wobei aber der dort angegebene Beweis im Gegensatz zu unserem die zusätzliche Forderung nötig macht, dass das Polynom Q nur einfache Nullstellen besitzt. In allgemeinerer Form werden derartige Fragestellungen von F. Peherstorfer und R. Steinbauer auch in [PS01] untersucht.

Zudem stellen wir fest, dass dieses Resultat in einem gewissen Sinne eine Verbindung zwischen den Sätzen 4.18 und 4.22 herstellt.

3. Faberpolynome zu Lemniskaten

Ist $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum und Q ein normiertes holomorphes Polynom vom Grad $m \geq 1$, so können wir, sofern $Q^{-1}(K)$ ebenfalls zulässig ist, die Frage stellen, ob auch die Faberpolynome F_n^K und $F_{nm}^{Q^{-1}(K)}$ in einem ähnlichen Zusammenhang wie die Tschebyscheffpolynome stehen. Unser Ziel wird es sein einen zu Korollar 6.11 analogen Satz für Faberpolynome zu zeigen.

Wir beginnen mit

PROPOSITION 6.12. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ zulässig mit $r(K) = 1$. Ist $Q \in \mathcal{P}_m^1(\mathbb{C})$ mit $m \geq 1$ gegeben, sodass auch $L := Q^{-1}(K)$ zulässig ist mit $0 \in L$, dann kommutiert das folgende Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_L} & \Omega(L) \\ e_m \downarrow & & \downarrow Q \\ \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_K} & \Omega(K) \end{array}$$

Insbesondere liegen bereits alle Nullstellen von Q' in L .

Beweis. Sei also $Q \in \mathcal{P}_m^1(\mathbb{C})$ mit $m \geq 1$ gegeben, sodass $L := Q^{-1}(K)$ zulässig ist und $0 \in L$ gilt. Nach Satz 4.18 ergibt sich $c(L) = c(K)$ und somit nach Satz 4.17 auch $r(L) = r(K) = 1$. Wir beginnen mit der einfachen Feststellung, dass wegen

$$\widehat{\mathbb{C}} = Q^{-1}(\widehat{\mathbb{C}}) = Q^{-1}(K \cup \Omega(K)) = Q^{-1}(K) \cup Q^{-1}(\Omega(K))$$

auch $\Omega(L) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus L = Q^{-1}(\Omega(K))$ gilt, wobei wir Q in bekannter Weise (vgl. 1.14) als holomorphe Funktion $Q : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ auffassen. Mit der Voraussetzung $0 \in L$ ist also

$$P : \Omega^*(L) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{\psi_K^{-1}(Q(z))}{z^m}$$

wohldefiniert, holomorph und darüber hinaus offensichtlich nullstellenfrei. Wegen $Q \in \mathcal{P}_m^1(\mathbb{C})$ gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi_K^{-1}(Q(z))}{z^m} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{Q(z)}{z^m} = 1,$$

sodass sich P nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 1.8 zu einer holomorphen und nullstellenfreien Funktion $P : \Omega(L) \rightarrow \mathbb{C}$ fortsetzen lässt. Aufgrund der Nullstellenfreiheit von P können wir P auch als holomorphe Funktion $P : \Omega(L) \rightarrow \mathbb{C}^*$ auffassen.

Da $e_m : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, wie man sich direkt überzeugt, eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerungsabbildung darstellt und $P(\infty) = 1 = e_m(1)$ gilt, finden wir nach Satz 1.21 eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : \Omega(L) \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit $\tilde{f}(\infty) = 1$, die eine Liftung von P über e_m darstellt, d.h. wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C}^* \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow e_m \\ \Omega(L) & \xrightarrow{P} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

Für alle $z \in \Omega^*(L)$ erhalten wir aus

$$\tilde{f}(z)^m = (e_m \circ \tilde{f})(z) = P(z) = \frac{\psi_K^{-1}(Q(z))}{z^m}$$

unmittelbar

$$(e_m \circ f)(z) = (z\tilde{f}(z))^m = \psi_K^{-1}(Q(z))$$

mit der holomorphen Funktion

$$f : \Omega^*(L) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z\tilde{f}(z),$$

welche sich nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 1.8 zu einer holomorphen Funktion $f : \Omega(L) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ mit $f(\infty) = \infty$ fortsetzen lässt, die insbesondere $e_m \circ f = \psi_K^{-1} \circ Q$ und somit

$$f(\Omega(L)) \subseteq e_m^{-1}((\psi_K^{-1} \circ Q)(\Omega(L))) = e_m^{-1}(\psi_K^{-1}(\Omega(K))) = e_m^{-1}(\Delta_1) = \Delta_1$$

erfüllt. Damit können wir nun das folgende, kommutative Diagramm betrachten:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{\phi_1^{-1}|_{\mathbb{D}}} & \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_L} & \Omega(L) \\ \downarrow \rho & & \downarrow f \circ \psi_L & \nearrow f & \downarrow Q \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{\phi_1^{-1}|_{\mathbb{D}}} & \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_K \circ e_m} & \Omega(K) \end{array}$$

Hierbei bezeichnen wir mit (U_1, ϕ_1) die Karte aus Beispiel 1.7 (c) und mit $\rho : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ die durch das Diagramm induzierte holomorphe Abbildung

$$\rho := \phi_1|_{\Delta_1} \circ (f \circ \psi_L) \circ \phi_1^{-1}|_{\mathbb{D}}.$$

Diese erfüllt wegen $\phi_1(\infty) = 0$, $\psi_L(\infty) = \infty$ und $f(\infty) = \infty$ offenbar $\rho(0) = 0$ und wegen $\tilde{f}(\infty) = 1$ zudem

$$\begin{aligned}
\rho'(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\rho(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\rho(\phi_1(z))}{\phi_1(z)} \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\phi_1(f(\psi_L(z)))}{\phi_1(z)} \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{f(\psi_L(z))} \\
&= \underbrace{\left(\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{\psi_L(z)} \right)}_{=1} \left(\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi_L(z)}{f(\psi_L(z))} \right) \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\tilde{f}(\psi_L(z))} \\
&= \frac{1}{\tilde{f}(\infty)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Schwarz muss daher bereits $\rho = \text{id}_{\mathbb{D}}$ gelten und wir erhalten $f \circ \psi_L = \text{id}_{\Delta_1}$ bzw. $f = \psi_L^{-1}$.

Aus der oben gezeigten Gleichung $e_m \circ f = \psi_K^{-1} \circ Q$ folgt nun

$$\psi_K^{-1} \circ Q \circ \psi_L = (e_m \circ f) \circ \psi_L = e_m$$

und damit

$$Q \circ \psi_L = \psi_K \circ e_m,$$

womit die Kommutativität des im Satz angegebenen Diagramms gezeigt ist. Insbesondere ergibt sich für alle $z \in \Delta_1^*$

$$Q'(\psi_L(z))\psi_L'(z) = (Q \circ \psi_L)'(z) = (\psi_K \circ e_m)'(z) = mz^{m-1}\psi_K'(z^m) \neq 0,$$

sodass Q' auf $\Omega^*(L) = \psi_L(\Delta_1^*)$ und damit natürlich auch auf ganz $\Omega(L)$ keine Nullstellen haben kann. Es gilt also $(Q')^{-1}(\{0\}) \subseteq L = Q^{-1}(K)$ und damit die Behauptung. \square

BEMERKUNG 6.13. Man beachte, dass wir mit dem Beweis zu Proposition 6.12 eine Darstellung von $\phi_L = \psi_L^{-1}$ für zulässige verallgemeinerte Lemniskaten $L = Q^{-1}(K)$ mit $0 \in L$ zu einem Polynom $Q \in \mathcal{P}_m^1(\mathbb{C})$ mit $m \geq 1$ und einem zulässigen Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ mit $r(K) = 1$ gegeben haben, nämlich

$$\phi_L : \Omega(L) \rightarrow \Delta_1, \quad z \mapsto z \sqrt[m]{\frac{\psi_K^{-1}(Q(z))}{z^m}},$$

wobei die holomorphe m -te Wurzel durch Liftung der Funktion $z \mapsto P(z) = \frac{\psi_K^{-1}(Q(z))}{z^m}$ über e_m konstruiert wurde.

Im Fall $K = \overline{\mathbb{D}}$ findet sich diese Formel als Beispiel 2 im Abschnitt 14 von Kapitel 3 im Buch [Mar67], dort allerdings ohne Beweis.

Wir bemerken, dass wir in der vorangegangenen Proposition 6.12 auf die Forderung $0 \in L$ verzichten können.

SATZ 6.14. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ zulässig mit $r(K) = 1$. Ist $Q \in \mathcal{P}_m^1(\mathbb{C})$ mit $m \geq 1$ gegeben, sodass auch $L := Q^{-1}(K)$ zulässig ist, dann kommutiert das folgende Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_L} & \Omega(L) \\ e_m \downarrow & & \downarrow Q \\ \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_K} & \Omega(K) \end{array}$$

Insbesondere liegen bereits alle Nullstellen von Q' in L .

Beweis. Gilt $0 \in L$, so folgt die Behauptung nach Proposition 6.12. Andernfalls wählen wir ein $a \in L$ und definieren mit der Abbildung

$$\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z + a$$

das zulässige Kompaktum $\tilde{L} := \lambda^{-1}(L)$ und das Polynom $\tilde{Q} := Q \circ \lambda \in \mathcal{P}_m^1(\mathbb{C})$. Man rechnet leicht nach, dass damit $0 \in \tilde{L} = \tilde{Q}^{-1}(K)$ gilt. Nach Proposition 6.12 erhalten wir also das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_{\tilde{L}}} & \Omega(\tilde{L}) \\ e_m \downarrow & & \downarrow \tilde{Q} \\ \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_K} & \Omega(K) \end{array}$$

Darüber hinaus haben wir im Beweis zu Satz 2.23 gesehen, dass die biholomorphen Abbildungen $\psi_{\tilde{L}}$ und ψ_L über $\psi_{\tilde{L}} = \lambda^{-1} \circ \psi_L$ zusammenhängen. Es folgt also

$$\psi_K \circ e_m = \tilde{Q} \circ \psi_{\tilde{L}} = (Q \circ \lambda) \circ (\lambda^{-1} \circ \psi_L) = Q \circ \psi_L$$

und damit die Kommutativität des im Satz angegebenen Diagramms. Den Zusatz über die Lage der Nullstellen von Q' rechnet man genau wie im Beweis zu Proposition 6.12 nach. \square

Abschließend wollen wir zeigen, dass aus Satz 6.14 auch noch die Bedingung $r(K) = 1$ entfernt werden kann.

SATZ 6.15. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ zulässig. Ist $Q \in \mathcal{P}_m^1(\mathbb{C})$ mit $m \geq 1$ gegeben, sodass auch $L := Q^{-1}(K)$ zulässig ist, dann kommutiert das folgende Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{r(L)} & \xrightarrow{\psi_L} & \Omega(L) \\ e_m \downarrow & & \downarrow Q \\ \Delta_{r(K)} & \xrightarrow{\psi_K} & \Omega(K) \end{array}$$

Insbesondere liegen bereits alle Nullstellen von Q' in L .

Beweis. Für $L := Q^{-1}(K)$ gilt unter den obigen Voraussetzungen nach Satz 4.18 $c(L)^m = c(K)$ und somit nach Satz 4.17 auch $r(L)^m = r(K)$. Insbesondere bildet e_m die Menge $\Delta_{r(L)}$ auf $\Delta_{r(K)}$ ab (wobei wir e_m gemäß dem Beweis zu Satz 1.14 als holomorphe Abbildung $e_m : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ auffassen). Ebenso bildet natürlich auch Q die Menge $\Omega(L)$ auf $\Omega(K)$ ab.

Wir definieren nun die beiden offenbar biholomorphen Abbildungen

$$\theta_K : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, z \mapsto \frac{z}{r(K)} \quad \text{und} \quad \theta_L : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, z \mapsto \frac{z}{r(L)}$$

und erhalten damit die beiden zulässigen Kompakta

$$\widetilde{K} := \theta_K(K) \quad \text{und} \quad \widetilde{L} := \theta_L(L),$$

welche nach Satz 2.23 die Bedingungen $r(\widetilde{K}) = 1$ und $r(\widetilde{L}) = 1$ erfüllen. Darüber hinaus gilt auch

$$\theta_K(\Omega(K)) = \Omega(\widetilde{K}) \quad \text{und} \quad \theta_L(\Omega(L)) = \Omega(\widetilde{L}).$$

Ferner erhalten wir durch $\widetilde{Q} := \theta_K \circ Q \circ \theta_L^{-1}$ wegen $r(L)^m = r(K)$ offensichtlich ein Polynom $\widetilde{Q} \in \mathcal{P}_m^1(\mathbb{C})$. Mit diesem gilt dann natürlich auch $\widetilde{L} = \widetilde{Q}^{-1}(\widetilde{K})$ und wir erhalten die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Omega(L) & \xrightarrow{\theta_L} & \Omega(\widetilde{L}) \\ \downarrow Q & & \downarrow \widetilde{Q} \\ \Omega(K) & \xrightarrow{\theta_K} & \Omega(\widetilde{K}) \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{ccc} \Omega(\widetilde{L}) & \xrightarrow{\theta_L^{-1}} & \Omega(L) \\ \downarrow \widetilde{Q} & & \downarrow Q \\ \Omega(\widetilde{K}) & \xrightarrow{\theta_K^{-1}} & \Omega(K) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{r(L)} & \xrightarrow{\theta_L} & \Delta_1 \\ e_m \downarrow & & \downarrow e_m \\ \Delta_{r(K)} & \xrightarrow{\theta_K} & \Delta_1 \end{array}$$

Nach Satz 6.14 ergibt sich nun zusätzlich die Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_{\widetilde{L}}} & \Omega(\widetilde{L}) \\ e_m \downarrow & & \downarrow \widetilde{Q} \\ \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_{\widetilde{K}}} & \Omega(\widetilde{K}) \end{array}$$

Diese Diagramme fügen wir zusammen

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta_{r(L)} & \xrightarrow{\theta_L} & \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_{\widetilde{L}}} & \Omega(\widetilde{L}) & \xrightarrow{\theta_L^{-1}} & \Omega(L) \\ \downarrow e_m & & \downarrow e_m & & \downarrow \widetilde{Q} & & \downarrow Q \\ \Delta_{r(K)} & \xrightarrow{\theta_K} & \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_{\widetilde{K}}} & \Omega(\widetilde{K}) & \xrightarrow{\theta_K^{-1}} & \Omega(K) \end{array}$$

und rechnen nach, da gemäß Satz 2.23 die Beziehungen

$$\psi_K = \theta_K^{-1} \circ \psi_{\tilde{K}} \circ \theta_K \quad \text{und} \quad \psi_L = \theta_L^{-1} \circ \psi_{\tilde{L}} \circ \theta_L$$

bestehen, dass

$$\begin{aligned} \psi_K \circ e_m &= (\theta_K^{-1} \circ \psi_{\tilde{K}} \circ \theta_K) \circ e_m = \theta_K^{-1} \circ \psi_{\tilde{K}} \circ (\theta_K \circ e_m) \\ &= \theta_K^{-1} \circ \psi_{\tilde{K}} \circ (e_m \circ \theta_L) = \theta_K^{-1} \circ (\psi_{\tilde{K}} \circ e_m) \circ \theta_L \\ &= \theta_K^{-1} \circ (\tilde{Q} \circ \psi_{\tilde{L}}) \circ \theta_L = (\theta_K^{-1} \circ \tilde{Q}) \circ \psi_{\tilde{L}} \circ \theta_L \\ &= (Q \circ \theta_L^{-1}) \circ \psi_{\tilde{L}} \circ \theta_L = Q \circ (\theta_L^{-1} \circ \psi_{\tilde{L}} \circ \theta_L) \\ &= Q \circ \psi_L. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir letztlich die behauptete Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{r(L)} & \xrightarrow{\psi_L} & \Omega(L) \\ e_m \downarrow & & \downarrow Q \\ \Delta_{r(K)} & \xrightarrow{\psi_K} & \Omega(K) \end{array}$$

Den Beweis des Zusatzes erbringt man wie zuvor. \square

Nachdem wir nun die Struktur der zu verallgemeinerten Lemniskaten gehörenden normierten biholomorphen Abbildungen verstanden haben, wollen wir uns der Untersuchung der zugehörigen Faberpolynome zuwenden. Hierbei werden uns die obigen Resultate hilfreich sein. Zunächst benötigen wir aber noch:

LEMMA 6.16. *Seien K und L zwei beliebige zulässige Kompakta mit $r(L)^m = r(K)$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Gibt es ein Polynom $Q \in \mathcal{P}_m^1(\mathbb{C})$, für welches das folgende Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{r(L)} & \xrightarrow{\psi_L} & \Omega(L) \\ e_m \downarrow & & \downarrow Q \\ \Delta_{r(K)} & \xrightarrow{\psi_K} & \Omega(K) \end{array}$$

kommutiert, dann gilt bereits

$$\Omega(L) = Q^{-1}(\Omega(K)) \quad \text{und} \quad L = Q^{-1}(K).$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass aufgrund der Voraussetzung $r(L)^m = r(K)$ die Abbildung $e_m : \Delta_{r(L)} \rightarrow \Delta_{r(K)}$ wohldefiniert und surjektiv ist. Damit rechnen wir nun

$$Q(\Omega(L)) = (Q \circ \psi_L)(\Delta_{r(L)}) = (\psi_K \circ e_m)(\Delta_{r(L)}) = \psi_K(\Delta_{r(K)}) = \Omega(K)$$

nach, d.h. es gilt

$$\Omega(L) \subseteq Q^{-1}(\Omega(K)) \quad \text{bzw.} \quad L \subseteq Q^{-1}(K).$$

Für einen beliebigen Punkt $w \in \Omega^*(K)$ enthält die Menge $Q^{-1}(\{w\})$ maximal m verschiedene Punkte. Wegen $w \in \Omega^*(K) = \psi_K(\Delta_{r(K)}^*)$ und der Surjektivität der Abbildung $e_m : \Delta_{r(L)}^* \rightarrow \Delta_{r(K)}^*$ existiert ein $\zeta_0 \in \Delta_{r(L)}^*$ mit $(\psi_K \circ e_m)(\zeta_0) =$

w . Ist nun $\zeta \in \mu_m(\mathbb{C})$ gegeben, so ist wegen $e_m(\zeta\zeta_0) = e_m(\zeta_0)$ offenbar auch $(\psi_K \circ e_m)(\zeta\zeta_0) = w$. Damit ergibt sich nun

$$Q(\psi_L(\zeta\zeta_0)) = (Q \circ \psi_L)(\zeta\zeta_0) = (\psi_K \circ e_m)(\zeta\zeta_0) = w$$

für alle $\zeta \in \mu_m(\mathbb{C})$, sodass

$$\{\psi_L(\zeta\zeta_0); \zeta \in \mu_m(\mathbb{C})\} \subseteq Q^{-1}(\{w\}).$$

Da ψ_L injektiv ist, sind die Punkte $\psi_L(\zeta\zeta_0) \in \Omega^*(L)$ mit $\zeta \in \mu_m(\mathbb{C})$ paarweise verschieden, sodass bereits

$$Q^{-1}(\{w\}) = \{\psi_L(\zeta\zeta_0); \zeta \in \mu_m(\mathbb{C})\} \subseteq \psi_L(\Delta_{r(L)}^*) = \Omega^*(L)$$

gelten muss. Da $w \in \Omega^*(K)$ beliebig vorgegeben war und darüber hinaus offensichtlich $Q^{-1}(\{\infty\}) = \{\infty\}$ erfüllt ist, ergeben sich die noch fehlenden Inklusionen

$$Q^{-1}(\Omega(K)) \subseteq \Omega(L) \quad \text{bzw.} \quad Q^{-1}(K) \subseteq L,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. \square

KOROLLAR 6.17. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ zulässig und sei $Q \in \mathcal{P}_m^1(\mathbb{C})$ mit $m \geq 1$ gegeben, sodass auch $L := Q^{-1}(K)$ zulässig ist. Für alle $r \geq r(L)$ gilt dann*

$$\Omega(L_r) = Q^{-1}(\Omega(K_{r^m})) \quad \text{und} \quad L_r = Q^{-1}(K_{r^m}).$$

Beweis. Nach Satz 6.15 erhalten wir unter den Voraussetzungen des Satzes das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{r(L)} & \xrightarrow{\psi_L} & \Omega(L) \\ e_m \downarrow & & \downarrow Q \\ \Delta_{r(K)} & \xrightarrow{\psi_K} & \Omega(K) \end{array}$$

Für $r \geq r(L)$ kommutiert daher auch das eingeschränkte Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Delta_r & \xrightarrow{\psi_{L_r}} & \Omega(L_r) \\ e_m \downarrow & & \downarrow Q \\ \Delta_{r^m} & \xrightarrow{\psi_{K_{r^m}}} & \Omega(K_{r^m}) \end{array}$$

Nach Lemma 6.16 folgt also

$$\Omega(L_r) = Q^{-1}(\Omega(K_{r^m})) \quad \text{und} \quad L_r = Q^{-1}(K_{r^m}),$$

womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Wir können nun, wie angekündigt, eine zu Satz 6.11 analoge Aussage für Faberpolynome zeigen:

SATZ 6.18. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ zulässig.*

- (i) *Ist $Q \in \mathcal{P}_m^1(\mathbb{C})$ mit $m \geq 1$ gegeben, sodass auch $Q^{-1}(K)$ zulässig ist, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$F_{nm}^{Q^{-1}(K)} = F_n^K \circ Q.$$

- (ii) Ist $Q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C})$ mit $m \geq 1$ gegeben, sodass auch $Q^{-1}(K)$ zulässig ist, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$F_{nm}^{Q^{-1}(K)} = \frac{1}{q_m^n} F_n^K \circ Q,$$

wobei wir das Polynom Q darstellen durch

$$Q(z) = q_m z^m + q_{m-1} z^{m-1} + \cdots + q_1 z + q_0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Beweis. (i) In der Situation des Satzes setzen wir wieder $L := Q^{-1}(K)$. Ist nun $r \geq r(L)$ beliebig vorgegeben, so gilt nach Korollar 6.17 die Beziehung $L_r = Q^{-1}(K_{r^m})$, so dass wir mit Korollar 6.11 die Identität

$$(6.7) \quad T_{nm}^{L_r} = T_{nm}^{Q^{-1}(K_{r^m})} = T_n^{K_{r^m}} \circ Q$$

erhalten. Nach dem zweiten Satz von Heuser-Mohr 5.8 konvergiert nun $T_{nm}^{L_r}$ für $r \rightarrow \infty$ kompakt gegen F_{nm}^L und $T_n^{K_{r^m}}$ für $r \rightarrow \infty$ kompakt gegen F_n^K . Da $Q: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ stetig ist, konvergiert offensichtlich auch $T_n^{K_{r^m}} \circ Q$ kompakt gegen $F_n^K \circ Q$. Aus (6.7) erhalten wir daher für $r \rightarrow \infty$

$$F_{nm}^{Q^{-1}(K)} = F_{nm}^L = F_n^K \circ Q,$$

womit die Behauptung (i) bewiesen ist.

- (ii) Die verallgemeinerte Aussage (ii) beweist man analog zu Satz 6.11 (ii): Wir definieren das normierte Polynom $\tilde{Q} := \frac{1}{q_m} Q$ sowie das zulässige Kompaktum $\tilde{K} := \frac{1}{q_m} K$ und zeigen, dass $Q^{-1}(K) = \tilde{Q}^{-1}(\tilde{K})$ und damit gemäß (i) auch

$$F_{nm}^{Q^{-1}(K)} = F_{nm}^{\tilde{Q}^{-1}(\tilde{K})} = F_n^{\tilde{K}} \circ \tilde{Q} = \frac{1}{q_m^n} F_n^K \circ Q$$

gilt, wobei wir im letzten Schritt Lemma 2.23 (i) verwendet haben. \square

BEISPIEL 6.19. Das obige Resultat 6.18 lässt sich etwa in den folgenden Situationen anwenden:

- Wir wählen $K = \overline{\mathbb{D}}$. Dann liefert Satz 6.18 für die in Beispiel 6.7 angegebenen Polynome Q mit $d := \deg(Q)$ die Aussage

$$F_{dn}^{Q^{-1}(\overline{\mathbb{D}})} = F_n^{\overline{\mathbb{D}}} \circ Q = Q^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- Wir wählen $K = E = [-2, 2]$. Für die m -Sterne aus den Beispielen 2.43 und 4.26 gilt $S_{2m} = e_m^{-1}(E)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nach Satz 6.18 folgt also

$$F_{nm}^{S_m} = F_n^{[-2,2]} \circ e_m \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

4. Multiplikative Kompakta

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir uns einem bemerkenswerten Spezialfall zuwenden:

DEFINITION 6.20. Ein zulässiges Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ heißt **multiplikativ**, falls $r(K) = 1$ gilt und zudem die Bedingung

$$F_m^K \circ \psi_K = \psi_K \circ e_m \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

erfüllt ist, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_K} & \Omega(K) \\ e_m \downarrow & & \downarrow F_m^K \\ \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_K} & \Omega(K) \end{array}$$

Diese Definition rechtfertigen wir durch die folgenden Beispiele:

BEISPIEL 6.21. Es gilt:

- Die zulässige Menge $K = \overline{\mathbb{D}}$ ist multiplikativ.
- Die zulässige Menge $K = E = [-2, 2]$ ist multiplikativ. In der Tat ist

$$(F_m^K \circ \psi_K)(z) = z^m + \frac{1}{z^m} = (\psi_K \circ e_m)(z), \quad z \in \Delta_1$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

Aus der Definition ergibt sich unmittelbar die folgende Eigenschaft der Faberpolynome zu multiplikativen Kompakta, die die Begriffsbildung „multiplikativ“ begründet.

KOROLLAR 6.22. Die Faberpolynome zu einem multiplikativen Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ erfüllen

$$F_n^K \circ F_m^K = F_{nm}^K$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Ist $K \subset \mathbb{C}$ multiplikativ, so gilt nach Definition

$$F_n^K \circ \psi_K = \psi_K \circ e_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$F_n^K = \psi_K \circ e_n \circ \psi_K^{-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ rechnet man nach, dass damit

$$\begin{aligned} F_n^K \circ F_m^K &= (\psi_K \circ e_n \circ \psi_K^{-1}) \circ (\psi_K \circ e_m \circ \psi_K^{-1}) \\ &= \psi_K \circ (e_n \circ e_m) \circ \psi_K^{-1} \\ &= \psi_K \circ e_{nm} \circ \psi_K^{-1} \\ &= F_{nm}^K \end{aligned}$$

erfüllt ist. □

Wir erhalten die folgende Charakterisierung multiplikativer Kompakta.

SATZ 6.23. Ein zulässiges Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ mit $r(K) = 1$ ist genau dann multiplikativ, wenn die Bedingung

$$(6.8) \quad (F_m^K)^{-1}(K) = K \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

erfüllt ist.

Beweis. Sei also $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum mit $r(K) = 1$.

„ \Rightarrow “: Ist K multiplikativ, so kommutiert für alle $m \in \mathbb{N}$ definitionsgemäß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_K} & \Omega(K) \\ e_m \downarrow & & \downarrow F_m^K \\ \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_K} & \Omega(K) \end{array}$$

womit die Voraussetzung zu Lemma 6.16 erfüllt ist. Wie behauptet folgt also $(F_m^K)^{-1}(K) = K$ für alle $m \in \mathbb{N}$, d.h. es gilt (6.8).

„ \Leftarrow “: Sei nun umgekehrt die Bedingung (6.8) erfüllt. Für $m \in \mathbb{N}$ ist dann insbesondere die verallgemeinerte Lemniskate $(F_m^K)^{-1}(K) = K$ zu K unter F_m^K zulässig, d.h. wir erhalten nach Satz 6.14 das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_K} & \Omega(K) \\ e_m \downarrow & & \downarrow F_m^K \\ \Delta_1 & \xrightarrow{\psi_K} & \Omega(K) \end{array}$$

weshalb K definitionsgemäß multiplikativ ist. □

Für den Fall multiplikativer Kompakta lässt sich die Theorie der verallgemeinerten Lemniskaten auch wie folgt entwickeln:

SATZ 6.24. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein multiplikatives Kompaktum. Ist $L := Q^{-1}(K)$ für ein Polynom $Q \in \mathcal{P}_m^1(\mathbb{C})$ mit $m \geq 1$ zulässig, so gilt*

(i) *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccc} & & \Omega(K) & & \\ & \nearrow Q & & \nwarrow F_m^K & \\ \Omega(L) & & & & \Omega(K) \\ & \nwarrow \psi_L & & \nearrow \psi_K & \\ & & \Delta_1 & & \end{array}$$

kommutiert. Es gilt also

$$Q \circ \psi_L = F_m^K \circ \psi_K.$$

(ii) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$F_{nm}^L = F_n^K \circ Q.$$

Beweis. (i) Da $K \subset \mathbb{C}$ multiplikativ ist, gilt definitionsgemäß

$$F_m^K \circ \psi_K = \psi_K \circ e_m.$$

Nach Satz 6.15 ist darüber hinaus

$$Q \circ \psi_L = \psi_K \circ e_m,$$

sodass sich unmittelbar die behauptete Gleichheit ergibt:

$$Q \circ \psi_L = F_m^K \circ \psi_K$$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir das normierte Polynom $P_n := F_n^K \circ Q$ vom Grad nm und stellen unter Beachtung von Korollar 6.22 fest:

$$P_n \circ \psi_L = F_n^K \circ (Q \circ \psi_L) = (F_n^K \circ F_m^K) \circ \psi_K = F_{nm}^K \circ \psi_K$$

Damit bestimmen wir für $\nu = 0, \dots, nm$

$$\begin{aligned} c_\nu^L(P_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0,r)} \frac{P_n(\psi_L(z))}{z^{\nu+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ D(0,r)} \frac{F_{nm}^K(\psi_K(z))}{z^{\nu+1}} dz = c_\nu^K(F_{nm}^K) = \delta_{nm,\nu}, \end{aligned}$$

wobei $r > r(K) = r(L) = 1$ beliebig vorgegeben ist. Die Faberentwicklung gemäß Satz 2.31 liefert dann

$$F_n^K \circ Q = P_n = \sum_{\nu=0}^{nm} c_\nu^L(P_n) F_\nu^L = F_{nm}^L,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Es stellt sich nun unweigerlich die Frage, ob es neben den in Beispiel 6.21 angegebenen multiplikativen Kompakta $\overline{\mathbb{D}}$ und $E = [-2, 2]$ noch weitere gibt. Hierzu benötigen wir die folgenden Begriffe:

DEFINITION 6.25. Zwei beliebige holomorphe Polynome p und q heißen

- **vertauschbar**, falls gilt

$$p \circ q = q \circ p.$$

- **ähnlich**, falls es ein Polynom λ der Form

$$\lambda(z) = az + b, \quad z \in \mathbb{C}$$

mit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{C}$ gibt, sodass gilt

$$p = \lambda^{-1} \circ q \circ \lambda.$$

Eine **Kette** ist eine Folge $(p_n)_{n=1}^\infty$ von holomorphen Polynomen mit $\deg(p_n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass je zwei Polynome der Folge vertauschbar sind. Zwei Ketten $(p_n)_{n=1}^\infty$ und $(q_n)_{n=1}^\infty$ heißen **ähnlich**, falls es ein Polynom λ der Gestalt

$$\lambda(z) = az + b, \quad z \in \mathbb{C}$$

mit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$p_n = \lambda^{-1} \circ q_n \circ \lambda \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt nun der folgende bemerkenswerte Satz, der sich in dieser Form als Theorem 1.2 in [Zim07] findet. Zurück geht er auf die beiden Arbeiten [Rit23] bzw. [Rit24] von J. F. Ritt und [Jul22] von G. Julia.

SATZ 6.26 (von Julia-Ritt). *Seien $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ zwei beliebige holomorphe Polynome und sei $m = \deg(P) \geq 2$ bzw. $n = \deg(Q) \geq 2$. Sind p und q vertauschbar, dann gilt eine der folgenden Aussagen:*

- (i) P und Q sind bezüglich der gleichen Abbildung λ ähnlich zu F_m^K und F_n^K mit $K = E = [-2, 2]$.
- (ii) P und Q sind bezüglich der gleichen Abbildung λ ähnlich zu F_m^K und F_n^K mit $K = \mathbb{D}$.
- (iii) Es gibt eine holomorphe Polynom R , ein $r \in \mathbb{N}$ und $\zeta_1, \zeta_2 \in \mu_r(\mathbb{C})$, sodass P und Q bezüglich der gleichen Abbildung λ ähnlich sind zu $\zeta_1 G^{[a]}$ und $\zeta_2 G^{[b]}$, wobei das holomorphe Polynom G definiert ist durch $G(z) := zR(z^r)$ und $a(r \deg(R) + 1) = m$ und $b(r \deg(R) + 1) = n$ gilt.

Hierbei kann die Aussage (iii) ersetzt werden durch

- (iii)' Es gibt $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ mit $P^{[\nu]} = Q^{[\mu]}$.

Der Satz von Julia-Ritt liefert im Rahmen dieser Theorie das folgende Resultat:

KOROLLAR 6.27. *Jede Kette ist ähnlich zu $(F_n^K)_{n=1}^\infty$ mit $K = \mathbb{D}$ oder $K = E = [-2, 2]$.*

Elementarer, d.h. ohne Rückgriff auf den Satz von Julia-Ritt, wird dieses Korollar auch in den Arbeiten [BT51] von H. D. Block und H. P. Thielman und [Jac55] von E. Jacobsthal bewiesen.

Wir stellen fest, dass die Folge $(F_n^K)_{n=1}^\infty$ zu einem multiplikativen Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ nach Korollar 6.22 eine Kette darstellt. Das folgende Lemma gibt nun eine ernüchternde Antwort auf die oben gestellte Frage.

LEMMA 6.28. *Sind K und L zwei multiplikative Kompakta, deren zugehörige Ketten $(F_n^K)_{n=1}^\infty$ und $(F_n^L)_{n=1}^\infty$ ähnlich sind. Dann gilt bereits $K = L$.*

Beweis. Sind also $(F_n^K)_{n=1}^\infty$ und $(F_n^L)_{n=1}^\infty$ ähnlich, so finden wir definitionsgemäß ein Polynom λ der Form

$$\lambda(z) = az + b \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

mit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{C}$, sodass

$$F_n^K = \lambda^{-1} \circ F_n^L \circ \lambda \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt ist. Wir zeigen die Behauptung in mehreren Schritten:

- (i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen $F_n^K = \lambda^{-1} \circ F_n^L \circ \lambda$ auch $\lambda \circ F_n^K = F_n^L \circ \lambda$, sodass ein Vergleich der führenden Koeffizienten beider Seiten (wobei man beachtet, dass die Faberpolynome normiert sind) die Bedingung $a = a^n$ liefert. Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten muss und nach Voraussetzung $a \neq 0$ ist, erhalten wir

$a = 1$.

(ii) Mit der Einschränkung $a = 1$ aus (i) muss nun für alle $n \in \mathbb{N}$

$$F_n^K(w) = F_n^L(w+b) - b, \quad w \in \mathbb{C}$$

gelten. Wir wählen nun ein $r > 1 = r(K) = r(L)$, für das sowohl $\mathbb{D} \subset K_r$, als auch $b + \mathbb{D} \subset L_r$ erfüllt ist (vgl. Lemma 2.10), und können damit nachrechnen, dass

$$\chi_{K_r}(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^K(w) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^L(w+b) z^{-n} - b \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \chi_{L_r}(w+b, z) - \frac{bz}{z-1}$$

für alle $w \in \mathbb{D}$ und alle $z \in \Delta_r^*$ gilt. Insbesondere erhalten wir wegen

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \chi_{K_r}(w, z) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \chi_{L_r}(w+b, z) = 1 \quad \text{für } w \in \mathbb{D}$$

im Grenzübergang $z \rightarrow \infty$ die Bedingung $1 = 1 - b$ bzw. $b = 0$.

(iii) Mit (i) und (ii) wissen wir also, dass $F_n^K = F_n^L$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ist $r > 1$ wie in (ii) gewählt, so erhalten wir für damit für alle $w \in \mathbb{D}$ und alle $z \in \Delta_r^*$

$$\frac{z\psi'_K(z)}{\psi_K(z) - w} = \chi_{K_r}(w, z) = \chi_{L_r}(w, z) = \frac{z\psi'_L(z)}{\psi_L(z) - w}$$

bzw.

$$\psi'_K(z)(\psi_L(z) - w) = \psi'_L(z)(\psi_K(z) - w)$$

bzw.

$$\psi'_K(z)\psi_L(z) - \psi'_L(z)\psi_K(z) = w(\psi'_K(z) - \psi'_L(z)).$$

Da dies bei festem $z \in \Delta_r^*$ für alle $w \in \mathbb{D}$ erfüllt sein muss, können wir

$$\psi'_K(z)\psi_L(z) - \psi'_L(z)\psi_K(z) = 0 \quad \text{und} \quad \psi'_K(z) - \psi'_L(z) = 0$$

folgern, womit sich

$$0 = \psi'_K(z)\psi_L(z) - \psi'_L(z)\psi_K(z) = \psi'_K(z)(\psi_K(z) - \psi_L(z))$$

und daraus wegen $\psi'_K(z) \neq 0$ letztlich $\psi_K(z) = \psi_L(z)$ ergibt. Die beiden holomorphen Funktionen $\psi_K, \psi_L \in \mathcal{O}(\Delta_1, \widehat{\mathbb{C}})$ stimmen also auf der offenen Menge Δ_r^* und daher nach dem Identitätssatz 1.10 auf ganz Δ_1 überein. Es gilt also $\Omega(K) = \psi_K(\Delta_1) = \psi_L(\Delta_1) = \Omega(L)$, womit die Behauptung $K = L$ gezeigt ist. \square

Neben $\overline{\mathbb{D}}$ und $[-2, 2]$ gibt es also keine weiteren multiplikativen Kompakta: Ist nämlich $L \subset \mathbb{C}$ multiplikativ, so stellt $(F_n^L)_{n=1}^{\infty}$ eine Kette dar, welche nach Korollar 6.27 ähnlich zu $(F_n^K)_{n=1}^{\infty}$ für $K = \overline{\mathbb{D}}$ oder $K = E = [-2, 2]$ ist. Lemma 6.28 zeigt dann, dass $L = \overline{\mathbb{D}}$ oder $L = E = [-2, 2]$ gelten muss. Wir halten fest:

KOROLLAR 6.29. *Die zulässigen Kompakta*

$$K = \overline{\mathbb{D}} \quad \text{und} \quad K = E = [-2, 2]$$

sind die einzigen multiplikativen Kompakta.

KAPITEL 7

Radiale Abhängigkeit

Betrachten wir die Tschebyscheffpolynome zur abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $K = \overline{\mathbb{D}}$ oder zum Intervall $K = [-2, 2]$, so stellen wir fest, dass diese bei „konformem Aufblasen“ des zugrunde liegenden Kompaktums erhalten bleiben, d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $T_n^{Kr} = T_n^K$ für alle $r > r(K)$, wobei wir für $r > r(K)$ mit K_r wieder das durch $\psi_K(\Delta_r) = \Omega(K_r)$ bestimmte zulässige Kompaktum bezeichnen (vgl. Definition 2.9). Nach dem zweiten Satz von Heuser-Mohr 5.8 hat dies zur Folge, dass $T_n^K = F_n^K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt sein muss. Ähnlich wie durch die Charakterisierung der multiplikativen Kompakta in Korollar 6.29, wird den Kompakta $K = \overline{\mathbb{D}}$ und $K = [-2, 2]$ hierdurch eine Sonderstellung gegenüber anderen Kompakta, wie etwa den von Hypocycloiden umrandeten Kompakta H_n aus Beispiel 2.19, zuteil.

In diesem letzten Kapitel wollen wir dieses Phänomen genauer verstehen, indem wir für ein zulässiges Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ untersuchen, wann ein beliebiges normiertes Polynom als Tschebyscheffpolynom für ein K_r mit $r > r(K)$ auftreten kann.

1. Bezeichnungen

In diesem Abschnitt sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum und $P \in \mathcal{P}_n^1(\mathbb{C})$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ein holomorphes Polynom.

DEFINITION 7.1. Sei $\mathcal{B} := \{Q_0, \dots, Q_{n-1}\}$ eine beliebige Basis von $\mathcal{P}_{\leq n-1}(\mathbb{C})$.

(i) Für $\nu = 0, \dots, n-1$ definieren wir durch

$$(\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P)(\zeta, z) := P(\psi_K(z\zeta)) \overline{Q_\nu(\psi_K(\bar{z}\zeta))} \quad \text{für } \zeta \in \mathbb{T}, z \in \Delta_{r(K)}^*$$

eine Funktion

$$\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P : \mathbb{T} \times \Delta_{r(K)}^* \rightarrow \mathbb{C}.$$

(ii) Damit erhalten wir durch

$$\Psi_n^{\mathcal{B}} P := (\Psi_{n,0}^{\mathcal{B}} P, \dots, \Psi_{n,n-1}^{\mathcal{B}} P)$$

eine Funktion

$$\Psi_n^{\mathcal{B}} P : \mathbb{T} \times \Delta_{r(K)}^* \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

(iii) Für $r > r(K)$ definieren wir die Mengen

$$M_n(P, K, r) := \{\zeta \in \mathbb{T}; |P(\psi_K(r\zeta))| = \|P\|_{K_r}\}$$

und

$$Y_n^{\mathcal{B}}(P, K, r) := \text{conv} \{(\Psi_n^{\mathcal{B}} P)(\zeta, r); \zeta \in M_n(P, K, r)\} \subset \mathbb{C}^n.$$

Wir halten im folgenden Lemma unsere ersten Beobachtungen fest:

LEMMA 7.2. *Ist $\mathcal{B} := \{Q_0, \dots, Q_{n-1}\}$ eine beliebige Basis von $\mathcal{P}_{\leq n-1}(\mathbb{C})$, so gilt für $\nu \in \{0, \dots, n-1\}$:*

- (i) *Für alle $\zeta \in \mathbb{T}$ ist die Funktion $(\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}}P)(\zeta, \cdot) : \Delta_{r(K)}^* \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Insbesondere stellt dann auch $(\Psi_n^{\mathcal{B}}P)(\zeta, \cdot) : \Delta_{r(K)}^* \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine holomorphe Funktion dar.*
- (ii) *Für alle $z \in \Delta_{r(K)}^*$ gehört die Funktion $(\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}}P)(\cdot, z) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ zu \mathfrak{W} , der Wiener-Algebra¹, d.h. $(\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}}P)(\cdot, z)$ besitzt eine absolut konvergente Fourierreihendarstellung der Form*

$$(\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}}P)(\zeta, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}}P})(\cdot, z)_k \zeta^k, \quad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Darüber hinaus sind die hierdurch gegebenen Funktionen

$$\Delta_{r(K)}^* \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad z \mapsto (\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}}P})(\cdot, z)_k$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ holomorph.

Beweis. (i) Für $\zeta \in \mathbb{T}$ sind offenbar die Funktionen

$$z \mapsto P(\psi_K(z\zeta)) \quad \text{und} \quad z \mapsto \overline{Q_\nu(\psi_K(\bar{z}\zeta))} \quad \text{mit } \nu = 0, \dots, n-1$$

auf $\Delta_{r(K)}^*$ holomorph, sodass auch deren Produkt $(\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}}P)(\zeta, \cdot)$ holomorph ist. Beachten wir nun, dass Holomorphie \mathbb{C}^n -wertiger Funktionen äquivalent zur komponentenweisen Holomorphie ist, so ergibt sich bereits die Gültigkeit der Behauptung (i).

(ii) Ist umgekehrt $z \in \Delta_{r(K)}^*$ vorgegeben, so stellt

$$w \mapsto P(\psi_K(zw)) \overline{Q_\nu(\psi_K(\bar{z}w))}$$

für $\nu = 0, \dots, n-1$ eine auf einer offenen Umgebung von \mathbb{T} beliebig oft reell partiell differenzierbare Funktion dar, sodass deren Einschränkung auf \mathbb{T} insbesondere zu $C^\infty(\mathbb{T})$ gehört. Da bekanntlich schon $C^1(\mathbb{T}) \subseteq \mathfrak{W}$ gilt (vgl. Theorem I.6.2 in [Kat04]), gehören diese zur Wiener-Algebra \mathfrak{W} und besitzen somit eine absolutkonvergente Fourierreihenentwicklung der Form

$$(\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}}P)(\zeta, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}}P})(\cdot, z)_k \zeta^k, \quad \zeta \in \mathbb{T},$$

wobei sich die Fourierkoeffizienten gemäß der Formel

$$(\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}}P})(\cdot, z)_k = \int_{\mathbb{T}} (\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}}P)(\zeta, z) \zeta^{-k} dm(\zeta), \quad k \in \mathbb{Z}$$

berechnen lassen. Hierbei bezeichnen wir mit m das normalisierte Lebesgue-Maß auf \mathbb{T} . Die bekannten Sätze über parameterabhängige Integrale liefern nun unter Beachtung von (i) für alle $k \in \mathbb{Z}$ die gewünschte Holomorphie der Abbildung

$$\Delta_{r(K)}^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto (\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}}P})(\cdot, z)_k,$$

¹Für mehr Details zur Wiener-Algebra \mathfrak{W} sei auf Abschnitt I.6 in [Kat04] verwiesen.

womit auch (ii) bewiesen ist. \square

DEFINITION 7.3. Für eine beliebige Basis \mathcal{B} von $\mathcal{P}_{\leq n-1}(\mathbb{C})$ und alle $r > r(K)$ setzen wir

$$U_n^{\mathcal{B}}(P, K, r) := \text{LH} \left\{ \left((\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P})(\cdot, r)_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}; \nu = 0, \dots, n-1 \right\} \subseteq \ell^1(\mathbb{Z}).$$

Wir bemerken

LEMMA 7.4. Für alle $r > r(K)$ ist $U_n^{\mathcal{B}}(P, K, r)$ von der speziellen Wahl der Basis \mathcal{B} unabhängig. Den hierdurch für $r > r(K)$ bestimmten Untervektorraum von $\ell^1(\mathbb{Z})$ bezeichnen wir mit $U_n(P, K, r)$.

Beweis. Sei $r > r(K)$ beliebig und fest vorgegeben. Wir definieren eine sesquilineare Abbildung

$$[\cdot, \cdot]^K : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \times \mathcal{P}(\mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T})$$

durch

$$[Q_1, Q_2]^K(\zeta) := Q_1(\psi_K(r\zeta)) \overline{Q_2(\psi_K(r\zeta))}, \quad \text{für } Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{C}) \text{ und } \zeta \in \mathbb{T}$$

und damit eine weitere sesquilineare Abbildung

$$\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket^K : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \times \mathcal{P}(\mathbb{C}) \rightarrow \ell^1(\mathbb{Z})$$

durch

$$\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket^K := \Phi \circ [\cdot, \cdot]^K,$$

wobei wir mit Φ die durch

$$\Phi : C^\infty(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^1(\mathbb{Z}), \quad f \mapsto (\widehat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

bestimmte lineare Abbildung bezeichnen. Wir stellen nun fest, dass damit für eine Basis $\mathcal{B} = \{Q_0, \dots, Q_{n-1}\}$ von $\mathcal{P}_{\leq n-1}(\mathbb{C})$ die Beziehungen

$$(\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P)(\cdot, r) = [P, Q_\nu]^K \quad \text{für alle } \nu = 0, \dots, n-1$$

bzw.

$$\left((\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P})(\cdot, r) \right)_{k \in \mathbb{Z}} = \llbracket P, Q_\nu \rrbracket^K \quad \text{für alle } \nu = 0, \dots, n-1$$

gelten. Insbesondere erhalten wir

$$\begin{aligned} U_n^{\mathcal{B}}(P, K, r) &= \text{LH} \left\{ \left((\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P})(\cdot, r)_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}; \nu = 0, \dots, n-1 \right\} \\ &= \text{LH} \left\{ \llbracket P, Q_\nu \rrbracket^K; \nu = 0, \dots, n-1 \right\} \\ &= \text{LH} \left\{ \llbracket P, Q \rrbracket^K; Q \in \mathcal{P}_{\leq n-1}(\mathbb{C}) \right\} \end{aligned}$$

womit die Unabhängigkeit von $U_n^{\mathcal{B}}(P, K, r)$ von der speziellen Wahl der Basis \mathcal{B} bewiesen ist. \square

Im Folgenden bezeichnen wir mit

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \ell^1(\mathbb{Z}) \times \ell^\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$$

das durch

$$\langle (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (y_k)_{k \in \mathbb{Z}} \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_k \quad \text{für alle } (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z}), (y_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$$

definierte Dualsystem. Dieses ist bekanntlich perfekt, d.h. durch

$$\ell^\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^1(\mathbb{Z})', (y_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto \langle \cdot, (y_k)_{k \in \mathbb{Z}} \rangle$$

ist ein isometrischer Isomorphismus zwischen $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ und dem topologischen Dualraum $\ell^1(\mathbb{Z})'$ von $\ell^1(\mathbb{Z})$ gegeben.

Ist $M \subseteq \ell^1(\mathbb{Z})$ eine beliebige Teilmenge, so können wir daher den Annihilator

$$M^\perp := \{ \phi \in \ell^1(\mathbb{Z})'; \forall x \in M : \phi(x) = 0 \}$$

auch als Untervektorraum von $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ auffassen.

DEFINITION 7.5. Für alle $r > r(K)$ bezeichnen wir mit $A_n(P, K, r)$ den durch

$$A_n(P, K, r) := U_n(P, K, r)^\perp$$

bestimmten Untervektorraum von $\ell^1(\mathbb{Z})'$, den wir gemäß obiger Vorbemerkung als Untervektorraum von $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ auffassen. Wir setzen darüber hinaus

$$Z_n(P, K, r) := \text{conv} \{ (\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}}; \zeta \in M_n(P, K, r) \} \subset \ell^\infty(\mathbb{Z}).$$

Welche Bedeutung diesen Räumen zukommt, zeigt nun

SATZ 7.6. *Mit den Bezeichnungen dieses Abschnitts sind für $r > r(K)$ die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) P ist das n -te Tschebyscheffpolynom für K_r .
- (ii) Es gibt eine endliche Wahrscheinlichkeitsverteilung λ auf $M_n(P, K, r)$, sodass die durch

$$B(Q_1, Q_2) := \sum_{\zeta \in M_n(P, K, r)} \lambda(\zeta) Q_1(\psi_K(r\zeta)) \overline{Q_2(\psi_K(r\zeta))}$$

für $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}_{\leq n}(K_r)$ definierte Sesquilinearform

$$B : \mathcal{P}_{\leq n}(K_r) \times \mathcal{P}_{\leq n}(K_r) \rightarrow \mathbb{C}$$

eine Faber-Sesquilinearform für $(\mathcal{P}_n^1(K_r), \|\cdot\|_{K_r}, P)$ darstellt.

- (iii) Für jede Basis \mathcal{B} von $\mathcal{P}_{\leq n-1}(\mathbb{C})$ ist die Bedingung $0 \in Y_n^{\mathcal{B}}(P, K, r)$ erfüllt.
- (iv) Es gibt eine Basis \mathcal{B} von $\mathcal{P}_{\leq n-1}(\mathbb{C})$, sodass $0 \in Y_n^{\mathcal{B}}(P, K, r)$ erfüllt ist.
- (v) Es gilt

$$A_n(P, K, r) \cap Z_n(P, K, r) \neq \emptyset.$$

Insbesondere liefert eine endliche Wahrscheinlichkeitsverteilung λ auf der Menge $M_n(P, K, r)$ genau dann eine Faber-Sesquilinearform für $(\mathcal{P}_n^1(K_r), \|\cdot\|_{K_r}, P)$, wenn die Bedingung

$$\sum_{\zeta \in M_n(P, K, r)} \lambda(\zeta) (\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in A_n(P, K, r)$$

erfüllt ist.

Beweis. Die Gültigkeit der Äquivalenz „(i) \Leftrightarrow (ii)“ haben wir bereits in Korollar 3.18 gesehen. Die Äquivalenz von „(ii) \Leftrightarrow (iii)“ ergibt sich unmittelbar aus dem Satz von Rivlin-Shapiro 3.15 und Korollar 3.18 (und den dortigen Beweisen). Darüber hinaus ist die Implikation „(iii) \Rightarrow (iv)“ trivial.

Um die noch fehlenden Äquivalenzen anschießen zu können, bemerken wir zunächst, dass bei einer beliebigen Basis \mathcal{B} von $\mathcal{P}_{\leq n-1}(\mathbb{C})$ für alle $\zeta \in \mathbb{T}$ und $\nu = 0, \dots, n-1$

$$(7.1) \quad \left\langle \left((\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P})(\cdot, r)_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}, (\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}} \right\rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P})(\cdot, r)_k \zeta^k = (\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P)(\zeta, r)$$

erfüllt ist. Damit erhalten wir für jede Konvexkombination der Form

$$\Lambda := \sum_{\zeta \in M_n(P, K, r)} \lambda(\zeta) (\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

zu einer endlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung λ auf $M_n(P, K, r)$ und für alle $\nu = 0, \dots, n-1$ die Beziehung

$$(7.2) \quad \begin{aligned} & \left\langle \left((\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P})(\cdot, r)_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \Lambda \right\rangle \\ &= \sum_{\zeta \in M_n(P, K, r)} \lambda(\zeta) \left\langle \left((\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P})(\cdot, r)_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}, (\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}} \right\rangle \\ &\stackrel{(7.1)}{=} \sum_{\zeta \in M_n(P, K, r)} \lambda(\zeta) (\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P)(\zeta, r). \end{aligned}$$

Sei nun die Aussage (iv) erfüllt, d.h. wir finden eine Basis \mathcal{B} von $\mathcal{P}_{\leq n-1}(\mathbb{C})$, sodass $0 \in Y_n^{\mathcal{B}}(P, K, r)$ gilt. Definitionsgemäß gibt es also eine endliche Wahrscheinlichkeitsverteilung λ auf $M_n(P, K, r)$ mit

$$\sum_{\zeta \in M_n(P, K, r)} \lambda(\zeta) (\Psi_n^{\mathcal{B}} P)(\zeta, r) = 0$$

oder gleichbedeutend

$$\sum_{\zeta \in M_n(P, K, r)} \lambda(\zeta) (\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P)(\zeta, r) = 0 \quad \text{für } \nu = 0, \dots, n-1.$$

Nach Gleichung (7.2) erfüllt die zugehörige Konvexkombination

$$\Lambda := \sum_{\zeta \in M_n(P, K, r)} \lambda(\zeta) (\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in Z_n(P, K, r)$$

für alle $\nu = 0, \dots, n-1$ die Bedingung

$$\left\langle \left((\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P})(\cdot, r)_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \Lambda \right\rangle = 0,$$

d.h. Λ ist in

$$\text{LH} \left\{ \left((\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P})(\cdot, r)_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}; \nu = 0, \dots, n-1 \right\}^{\perp} = A_n^{\mathcal{B}}(P, K, r) = A_n(P, K, r)$$

enthalten. Zusammenfassend folgt also $\Lambda \in A_n(P, K, r) \cap Z_n(P, K, r)$ und damit die Gültigkeit der Aussage (v).

Ist umgekehrt (v) erfüllt, d.h. gibt es ein $\Lambda \in A_n(P, K, r) \cap Z_n(P, K, r)$, so

finden wir nach Definition von $Z_n(P, K, r)$ eine Konvexkombination für Λ der Form

$$\Lambda = \sum_{\zeta \in M_n(P, K, r)} \lambda(\zeta) (\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

mit einer endlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung λ auf $M_n(P, K, r)$. Wegen $\Lambda \in A_n(P, K, r)$ erhalten wir für eine beliebige Basis \mathcal{B} von $\mathcal{P}_{\leq n-1}(\mathbb{C})$ die Eigenschaft

$$\langle ((\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P})(\cdot, r))_{k \in \mathbb{Z}}, \Lambda \rangle = 0$$

für $\nu = 0, \dots, n-1$, sodass sich mit Rechnung (7.2) unmittelbar

$$\sum_{\zeta \in M_n(P, K, r)} \lambda(\zeta) (\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P)(\zeta, r) = 0$$

für $\nu = 0, \dots, n-1$ ergibt, womit (iii) gezeigt ist:

$$0 = \sum_{\zeta \in M_n(P, K, r)} \lambda(\zeta) (\Psi_n^{\mathcal{B}} P)(\zeta, r) \in Y_n^{\mathcal{B}}(P, K, r)$$

Da eine endliche Wahrscheinlichkeitsverteilung λ auf der Menge $M_n(P, K, r)$ genau dann eine Faber-Sesquilinearform zu $(\mathcal{P}_n^1(K_r), \|\cdot\|_{K_r}, P)$ induziert, wenn die zugehörige Konvexkombination in $Y_n^{\mathcal{B}}(P, K, r)$ die Eigenschaft

$$\sum_{\zeta \in M_n(P, K, r)} \lambda(\zeta) (\Psi_n^{\mathcal{B}} P)(\zeta, r) = 0$$

hat, und dies nach den vorangegangenen Rechnungen äquivalent zu

$$\sum_{\zeta \in M_n(P, K, r)} \lambda(\zeta) (\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in A_n(P, K, r)$$

ist, haben wir auch den Zusatz der Behauptung gezeigt. \square

2. Ausbau der Charakterisierung

Mit Satz 7.6 erlauben die im vorangegangenen Abschnitt definierten Objekte eine alternative Charakterisierung der Tschebyscheffpolynome. Daher wollen wir diese nun genauer untersuchen.

2.1. Das Dimensionsargument. Wir berechnen in dem nachfolgenden Lemma zunächst die Dimensionen der auftretenden Vektorräume.

LEMMA 7.7. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum und P ein Polynom aus $\mathcal{P}_n^1(\mathbb{C})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Für alle $r > r(K)$ gilt*

$$\dim U_n(P, K, r) = n$$

und entsprechend

$$\text{codim } A_n(P, K, r) = n.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Folgen

$$\left((\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P})(\cdot, r)_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \nu = 0, \dots, n-1$$

für eine beliebige Basis $\mathcal{B} = \{Q_0, \dots, Q_{n-1}\}$ von $\mathcal{P}_{\leq n-1}(\mathbb{C})$ linear unabhängig sind. Hierzu geben wir uns beliebige $\omega_0, \dots, \omega_{n-1} \in \mathbb{C}$ vor, für welche

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \omega_{\nu} \left((\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P})(\cdot, r)_k \right)_{k \in \mathbb{Z}} = 0$$

erfüllt ist. Für alle $\zeta \in \mathbb{T}$ erhalten wir dann speziell (vgl. (7.1))

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{\nu=0}^{n-1} \omega_{\nu} \left((\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P})(\cdot, r)_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}, (\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}} \right\rangle \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \omega_{\nu} \left\langle \left((\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P})(\cdot, r)_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}, (\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}} \right\rangle \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \omega_{\nu} (\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P)(\zeta, r). \end{aligned}$$

Nach Definition von $\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P$ ergibt sich damit weiter

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \omega_{\nu} (\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P)(\zeta, r) \\ &= P(\psi_K(r\zeta)) \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} \omega_{\nu} \overline{Q_{\nu}(\psi_K(r\zeta))} \right) \\ &= P(\psi_K(r\zeta)) \overline{Q(\psi_K(r\zeta))}, \end{aligned}$$

wobei wir mit Q das durch

$$Q := \sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega_{\nu}} Q_{\nu}$$

bestimmte holomorphe Polynom bezeichnen. Insbesondere verschwindet die Funktion $w \mapsto P(w) \overline{Q(w)}$ auf

$$\{\psi_K(r\zeta); \zeta \in \mathbb{T}\} = \partial K_r,$$

sodass Q außerhalb der höchstens endlich vielen Nullstellen von P auf ∂K_r identisch 0 sein muss. Nach dem Identitätssatz gilt also $Q \equiv 0$ und damit

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega_{\nu}} Q_{\nu} = 0$$

Da die Polynome Q_0, \dots, Q_{n-1} als Basis von $\mathcal{P}_{\leq n-1}(\mathbb{C})$ linear unabhängig sind, muss daher also $\omega_0 = \dots = \omega_{n-1} = 0$ gelten, womit die lineare Unabhängigkeit der Folgen

$$\left((\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P})(\cdot, r)_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \nu = 0, \dots, n-1$$

in $\ell^1(\mathbb{Z})$ bewiesen ist. Somit stellt

$$U_n(P, K, r) = U_n^{\mathcal{B}}(P, K, r) = \text{LH} \left\{ \left((\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P})(\cdot, r)_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}; \nu = 0, \dots, n-1 \right\}$$

wie behauptet einen n -dimensionalen Untervektorraum von $\ell^1(\mathbb{Z})$ dar. Wegen $A_n(P, K, r) = U_n(P, K, r)^\perp$ gilt nach A.2 weiter

$$\ell^\infty(\mathbb{Z})/A_n(P, K, r) = \ell^1(\mathbb{Z})'/U_n(P, K, r)^\perp \cong U_n(P, K, r)' \cong \mathbb{C}^n$$

uns daher

$$\text{codim } A_n(P, K, r) = \dim(\ell^\infty(\mathbb{Z})/A_n(P, K, r)) = n,$$

womit auch der zweite Teil der Behauptung bewiesen ist. \square

DEFINITION 7.8. Ist \mathcal{F} ein beliebiger Untervektorraum von $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, so definieren wir den kanonischen Epimorphismus

$$\pi_{\mathcal{F}} : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z})/\mathcal{F}.$$

Wir erhalten damit das folgende

KOROLLAR 7.9. Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum und P ein Polynom aus $\mathcal{P}_n^1(\mathbb{C})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien für $r > r(K)$

- ein Untervektorraum \mathcal{F} von $A_n(P, K, r)$ von endlicher Kodimension in $\ell^\infty(\mathbb{Z})$
- eine endliche Teilmenge G von $M_n(P, K, r)$

vorgegeben, sodass die Bedingung

$$(7.3) \quad \text{codim } \mathcal{F} < \#G$$

erfüllt ist. Dann gibt es eine nicht identisch verschwindende Abbildung $\lambda : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{\zeta \in G} \lambda(\zeta) (\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{F}.$$

Beweis. Sind die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt, so können wegen

$$\dim(\ell^\infty(\mathbb{Z})/\mathcal{F}) = \text{codim } \mathcal{F} < \#G$$

die $\#G$ Vektoren $\pi_{\mathcal{F}}((\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}})$ mit $\zeta \in G$ in $\ell^\infty(\mathbb{Z})/\mathcal{F}$ nicht linear unabhängig sein, d.h. es gibt eine nicht identisch verschwindende Abbildung $\lambda : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{\zeta \in G} \lambda(\zeta) \pi_{\mathcal{F}}((\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = 0.$$

Es gilt also

$$\pi_{\mathcal{F}} \left(\sum_{\zeta \in G} \lambda(\zeta) (\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}} \right) = 0$$

oder gleichbedeutend

$$\sum_{\zeta \in G} \lambda(\zeta) (\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{F},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Wollen wir also das Polynom $P \in \mathcal{P}_n^1(\mathbb{C})$ als das n -te Tschebyscheffpolynom zu K_r für ein zulässiges Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ und ein $r > r(K)$ entlarven, so benötigen wir gemäß Satz 7.6 eine Konvexkombination der Folgen $(\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $\zeta \in M_n(P, K, r)$, welche in $A_n(P, K, r)$ enthalten ist. Beachten wir, dass nach Lemma 7.7 die Bedingung $\text{codim } A_n(P, K, r) = n$ erfüllt ist, so liefert uns das in Korollar 7.9 formulierte Dimensionsargument zumindest eine komplexe Linearkombination, falls $M_n(P, K, r)$ aus mindestens $n + 1$ verschiedenen Punkten besteht. Im Hinblick auf Satz 4.6 ist diese Forderung auch wenig verwunderlich.

2.2. Zusätzliche Struktur. Es stellt sich nun unweigerlich die Frage, ob sich dieses Dimensionsargument unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen derart ausbauen lässt, dass man anstelle einer im Allgemeinen komplexen Linearkombination die benötigte Konvexkombination konstruieren kann. Dass dies tatsächlich möglich ist, werden wir im Folgenden sehen.

Die wesentliche Idee dabei ist, den in Lemma 7.9 betrachteten Objekten eine genauere Struktur zu geben. Hierzu benötigen wir

DEFINITION 7.10. Für alle $\zeta \in \mathbb{T}$ bezeichnen wir mit M'_ζ den durch

$$M'_\zeta : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}), (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (\zeta^k x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

bestimmten Operator aus $\mathcal{L}(\ell^\infty(\mathbb{Z}))$ mit $\|M'_\zeta\| = 1$.

DEFINITION 7.11. Ist G eine beliebige endliche Teilmenge von \mathbb{T} , so bezeichnen wir mit $\ell(G)$ den komplexen Vektorraum aller Abbildungen $\lambda : G \rightarrow \mathbb{C}$. Ferner definieren wir in dieser Situation die Abbildung

$$\Theta_G : \ell(G) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}), \lambda \mapsto \sum_{\zeta \in G} \lambda(\zeta) (\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

DEFINITION 7.12. Für jedes $\nu \in \mathbb{Z}$ führen wir durch

$$\delta_\nu : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}, (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto x_\nu$$

ein stetiges lineares Funktional auf $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ ein.

Wir können nun unsere zentrale Idee in der folgenden Proposition formulieren:

PROPOSITION 7.13. Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum und P ein Polynom aus $\mathcal{P}_n^1(\mathbb{C})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien für $r > r(K)$

- (i) eine endliche (multiplikative) Untergruppe G von \mathbb{T} , die in $M_n(P, K, r)$ enthalten ist
- (ii) ein Untervektorraum \mathcal{F} von $A_n(P, K, r)$ von endlicher Kodimension in $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, der unter allen Operatoren M'_ζ mit $\zeta \in G$ invariant ist

vorgegeben. In dieser Situation ist die Bedingung

$$(7.4) \quad \ker(\pi_{\mathcal{F}} \circ \Theta_G) \not\subseteq \ker(\delta_0 \circ \Theta_G)$$

genau dann erfüllt, wenn

$$(7.5) \quad \frac{1}{\#G} \sum_{\zeta \in G} (\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{F} \subseteq A_n(P, K, r)$$

gilt. Gilt also eine (und damit beide) der äquivalenten Bedingungen, so folgt nach Satz 7.6, dass schon $T_n^{K_r} = P$ sein muss.

BEMERKUNG 7.14. Die in obiger Proposition 7.13 gestellte Bedingung (7.4) impliziert insbesondere

$$\ker(\pi_{\mathcal{F}} \circ \Theta_G) \neq \{0\},$$

d.h. es muss ein $0 \neq \lambda \in \ell(G)$ mit $\Theta_G(\lambda) \in \mathcal{F}$ geben. Dies wurde in Korollar 7.9 durch die Dimensionsbedingung (7.3) erzwungen.

Beweis von Satz 7.13. Die Forderung (7.4) impliziert, dass es eine nicht-triviale Abbildung $\lambda : G \rightarrow \mathbb{C}$ geben muss, für die

$$\Lambda := \Theta_G(\lambda) = \sum_{\xi \in G} \lambda(\xi) (\xi^k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

einerseits in $\mathcal{F} \subseteq A_n(P, K, r)$ enthalten ist, aber andererseits nicht in $\ker(\delta_0)$ liegt. Wir setzen dann

$$\sigma := \sum_{\xi \in G} \lambda(\xi) = \delta_0(\Lambda) \neq 0.$$

Weil nun \mathcal{F} nach Voraussetzung unter allen Operatoren M'_ζ mit $\zeta \in G$ invariant ist, folgern wir

$$\sum_{\xi \in G} \lambda(\zeta^{-1}\xi) (\xi^k)_{k \in \mathbb{Z}} = \sum_{\xi \in G} \lambda(\xi) (\zeta^k \xi^k)_{k \in \mathbb{Z}} = M'_\zeta \Lambda \in \mathcal{F}.$$

Somit ist wegen

$$\sum_{\zeta \in G} M'_\zeta \Lambda = \sum_{\zeta \in G} \sum_{\xi \in G} \lambda(\zeta^{-1}\xi) (\xi^k)_{k \in \mathbb{Z}} = \sum_{\xi \in G} \underbrace{\left(\sum_{\zeta \in G} \lambda(\zeta^{-1}\xi) \right)}_{=\sigma} (\xi^k)_{k \in \mathbb{Z}} = \sigma \sum_{\xi \in G} (\xi^k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

auch

$$\sigma \sum_{\xi \in G} (\xi^k)_{k \in \mathbb{Z}} = \sum_{\zeta \in G} M'_\zeta \Lambda \in \mathcal{F} \subseteq A_n(P, K, r)$$

und damit (7.5) erfüllt ist. Umgekehrt folgt aus der Gültigkeit von (7.5), dass die durch

$$\lambda : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad \zeta \mapsto \frac{1}{\#G}$$

definierte Gleichverteilung auf G in $\ker(\pi_{\mathcal{F}} \circ \Theta_G)$ enthalten ist, während offenbar λ nicht in $\ker(\delta_0 \circ \Theta_G)$ liegt, d.h. es muss (7.3) gelten. \square

Anhand des Beweises zu Proposition 7.13 überzeugt man sich leicht, dass wir die dort unter (ii) formulierte Invarianzforderung an den Unterraum \mathcal{F} von $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ zu der Forderung

$$M_\zeta(\mathcal{F}) \subseteq A_n(P, K, r) \quad \text{für alle } \zeta \in G$$

abschwächen können, ohne die wesentliche Implikation $P = T_n^{K_r}$ einzubüßen. Genauer erhalten wir:

KOROLLAR 7.15. Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zulässiges Kompaktum und P ein Polynom aus $\mathcal{P}_n^1(\mathbb{C})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien für $r > r(K)$

- (i) eine endliche (multiplikative) Untergruppe G von \mathbb{T} , die in $M_n(P, K, r)$ enthalten ist
- (ii) ein Untervektorraum \mathcal{F} von $A_n(P, K, r)$ von endlicher Kodimension in $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ mit

$$M_\zeta(\mathcal{F}) \subseteq A_n(P, K, r) \quad \text{für alle } \zeta \in G$$

vorgegeben, sodass die Bedingung

$$(7.6) \quad \ker(\pi_{\mathcal{F}} \circ \Theta_G) \not\subseteq \ker(\delta_0 \circ \Theta_G)$$

erfüllt ist. Dann gilt

$$(7.7) \quad \frac{1}{\#G} \sum_{\zeta \in G} (\zeta^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in A_n(P, K, r),$$

sodass nach Satz 7.6 bereits $T_n^{Kr} = P$ sein muss.

Im Hinblick auf weiterführende Untersuchungen, die es eventuell sogar ermöglichen, das Eintreten des Falls

$$\ker(\pi_{\mathcal{F}} \circ \Theta_G) \subseteq \ker(\delta_0 \circ \Theta_G)$$

a priori auszuschließen, scheint mir die gewählte stärkere Forderung aber geeigneter zu sein. Wir werden in einem späteren Abschnitt feststellen, dass zumindest in den beiden wichtigsten Fällen $K = \overline{\mathbb{D}}$ und $K = [-2, 2]$ diese stärkere Bedingung auch tatsächlich zu erfüllen ist.

2.3. Die Invarianzforderung. Um die Invarianzforderung (ii) aus Proposition 7.13 besser verstehen zu können, benötigen wir einige weitere Bezeichnungen:

DEFINITION 7.16. Für $\zeta \in \mathbb{T}$ definieren wir den Operator

$$M_\zeta : \ell^1(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^1(\mathbb{Z}), \quad (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (\zeta^k x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

aus $\mathcal{L}(\ell^1(\mathbb{Z}))$ mit $\|M_\zeta\| = 1$ und zudem den linearen Operator

$$T_\zeta : C^\infty(\mathbb{T}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}), \quad f \mapsto T_\zeta f,$$

wobei wir $(T_\zeta f)(z) := f(\zeta z)$ für alle $z \in \mathbb{T}$ setzen. Wie zuvor sei

$$\Phi : C^\infty(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^1(\mathbb{Z}), \quad f \mapsto (\widehat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Es gilt dann

LEMMA 7.17. Für alle $\zeta \in \mathbb{T}$ kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{T}) & \xrightarrow{T_\zeta} & C^\infty(\mathbb{T}) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \ell^1(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{M_\zeta} & \ell^1(\mathbb{Z}) \end{array}$$

Beweis. Für alle $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ rechnen wir nach, dass

$$\begin{aligned} \widehat{T_\zeta f}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (T_\zeta f)(z) z^{-k} dm(z) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\zeta z) z^{-k} dm(z) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(z) (\zeta^{-1} z)^{-k} dm(z) \\ &= \zeta^k \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(z) z^{-k} dm(z) \\ &= \zeta^k \widehat{f}_k \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ und daher

$$(\Phi T_\zeta) f = \Phi(T_\zeta f) = (\widehat{T_\zeta f}_{k \in \mathbb{Z}})_{k \in \mathbb{Z}} = (\zeta^k \widehat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}} = M_\zeta(\widehat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (M_\zeta \Phi) f$$

erfüllt ist. Wir erhalten also

$$\Phi T_\zeta = M_\zeta \Phi$$

und damit die Behauptung. \square

Versehen wir den Unterraum $C^\infty(\mathbb{T})$ von $C(\mathbb{T})$ mit der eingeschränkten Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\mathbb{T}}$, so erhalten wir einen normierten komplexen Vektorraum. Ist nun $G \subset \mathbb{T}$ eine endliche (multiplikative) Untergruppe von \mathbb{T} , so überzeugen wir uns leicht, dass $\|T_\zeta\| = 1$ für alle $\zeta \in G$ gilt und durch

$$T : G \rightarrow \text{GL}(C^\infty(\mathbb{T})), \quad \zeta \mapsto T_\zeta$$

ein Gruppenhomomorphismus gegeben ist. Ebenso stellt auch

$$M : G \rightarrow \text{GL}(\ell^1(\mathbb{Z})), \quad \zeta \mapsto M_\zeta$$

einen Gruppenhomomorphismus dar. Darüber hinaus ist $\Phi : C^\infty(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z})$ linear, stetig und (nach Theorem 2.7 in [Kat04]) injektiv

Seien nun ein Polynom $P \in \mathcal{P}_n^1(\mathbb{C})$ mit $n \in \mathbb{N}$ und eine Basis $\mathcal{B} = \{Q_0, \dots, Q_{n-1}\}$ von $\mathcal{P}_{\leq n-1}(\mathbb{C})$ gegeben. Für $r > r(K)$ definieren wir dann den Unterraum

$$V_n^{\mathcal{B}}(P, K, r) := \text{LH} \left\{ (\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P)(\cdot, r); \nu = 0, \dots, n-1 \right\},$$

von $C^\infty(\mathbb{T})$. Mit der im Beweis zu Lemma 7.4 definierten Sesquilinearform

$$[\cdot, \cdot]^K : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \times \mathcal{P}(\mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}),$$

von welcher wir dort

$$\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} P(\cdot, r) = [P, Q_\nu]^K \quad \text{für alle } \nu = 0, \dots, n-1$$

festgehalten haben, überzeugt man sich leicht, dass $V_n^{\mathcal{B}}(P, K, r)$ wegen

$$V_n^{\mathcal{B}}(P, K, r) = \text{LH} \left\{ [P, Q]^K; Q \in \mathcal{P}_{\leq n-1}(\mathbb{C}) \right\}$$

von der speziellen Wahl der Basis \mathcal{B} unabhängig ist. Wir schreiben daher einfach $V_n(P, K, r)$ statt $V_n^{\mathcal{B}}(P, K, r)$. Darüber hinaus stellen wir fest, dass $\Phi(V_n(P, K, r)) = U_n(P, K, r)$ gilt.

Wegen Lemma 7.17 liefert uns nun Lemma B.1 eine (ordnungserhaltende) Abbildung

$$\omega : \mathfrak{J}_T(C^\infty(\mathbb{T}), V_n(P, K, r)) \rightarrow \mathfrak{J}_M(\ell^1(\mathbb{Z}), U_n(P, K, r)), \mathcal{V} \mapsto \Phi(\mathcal{V}).$$

Hierbei sind (ebenfalls nach Lemma B.1) die Mengen $\mathfrak{J}_T(C^\infty(\mathbb{T}), V_n(P, K, r))$ und $\mathfrak{J}_M(\ell^1(\mathbb{Z}), U_n(P, K, r))$ nicht leer.

Wir halten noch die folgende, nach Definition des Dualsystems $\langle \ell^1(\mathbb{Z}), \ell^\infty(\mathbb{Z}) \rangle$ offensichtliche Tatsache fest:

LEMMA 7.18. *Für alle $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ und $y \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ gilt*

$$\langle M_\zeta x, y \rangle = \langle x, M'_\zeta y \rangle.$$

Bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist also M'_ζ der zu M_ζ transponierte Operator.

Da wir offenbar auch durch

$$M' : G \rightarrow \text{GL}(\ell^\infty(\mathbb{Z})), \zeta \mapsto M'_\zeta$$

einen Gruppenhomomorphismus erhalten, liefert uns Lemma B.2 wegen Lemma 7.18 eine (ordnungsumkehrende) Abbildung

$$\omega' : \mathfrak{J}_M(\ell^1(\mathbb{Z}), U_n(P, K, r)) \rightarrow \mathfrak{J}'_{M'}(\ell^\infty(\mathbb{Z}), A_n(P, K, r)), \mathcal{U} \mapsto \mathcal{U}^\perp$$

Da $\mathfrak{J}_M(\ell^1(\mathbb{Z}), U_n(P, K, r))$ auch $\mathfrak{J}'_{M'}(\ell^\infty(\mathbb{Z}), A_n(P, K, r))$ nicht leer ist, finden wir in der Tat einen unter M'_ζ für alle $\zeta \in G$ invarianten Unterraum \mathcal{F} von $\ell^\infty(\mathbb{T})$ mit endlicher Kodimension, der darüber hinaus in $A_n(P, K, r)$ enthalten ist. Genauer gilt noch: Wir können einen der Forderung (ii) in Proposition 7.13 genügenden Unterraum \mathcal{F} aus einem endlichdimensionalen Unterraum V von $C^\infty(\mathbb{T})$ konstruieren, der unter den Operatoren T_ζ mit $\zeta \in G$ invariant ist und noch den Unterraum

$$V_n(P, K, r) = \text{LH} \left\{ (\Psi_{n,\nu}^\mathcal{B} P)(\cdot, r); \nu = 0, \dots, n-1 \right\}$$

enthält.

3. Anwendungsbeispiele

Wir wollen nun den in den beiden vorangegangenen Abschnitten entwickelten Zugang in einigen Beispielen erproben.

BEISPIEL 7.19 (abgeschlossene Einheitskreisscheibe). Für die abgeschlossene Einheitskreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}$ ist wegen

$$\psi_{\overline{\mathbb{D}}} : \Delta_1 \rightarrow \Omega(\overline{\mathbb{D}}), z \mapsto z$$

offenbar $\overline{\mathbb{D}}_r = \overline{D(0, r)}$ für alle $r > 1 = r(\overline{\mathbb{D}})$. Ist ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben, dann wählen wir $\mathcal{B} := \{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ als Basis für $\mathcal{P}_{\leq n-1}(\mathbb{C})$ und rechnen nach:

(i) Für alle $r > 1$ gilt

$$M_n(e_n, \overline{\mathbb{D}}, r) = \mathbb{T}.$$

(ii) Für alle $\nu = 0, \dots, n-1$ und alle $\zeta \in \mathbb{T}$, $z \in \Delta_1^*$ ist

$$(\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} e_n)(\zeta, z) = e_n(\psi_{\mathbb{D}}(\zeta z)) \overline{e_\nu(\psi_{\mathbb{D}}(\zeta \bar{z}))} = z^{n+\nu} \zeta^{n-\nu}.$$

Insbesondere ergibt sich für alle $r > 1$:

$$((\widehat{\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} e_n})(\cdot, r)_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (r^{n+\nu} \delta_{k, n-\nu})_{k \in \mathbb{Z}}$$

(iii) Für $r > 1$ ist damit

$$\begin{aligned} V_n(e_n, \overline{\mathbb{D}}, r) &= V_n^{\mathcal{B}}(e_n, \overline{\mathbb{D}}, r) \\ &= \text{LH} \left\{ r^{n+\nu} e_{n-\nu}|_{\mathbb{T}}; \nu = 0, \dots, n-1 \right\} \\ &= \text{LH} \left\{ e_\nu|_{\mathbb{T}}; \nu = 1, \dots, n \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} U_n(e_n, \overline{\mathbb{D}}, r) &= U_n^{\mathcal{B}}(e_n, \overline{\mathbb{D}}, r) \\ &= \text{LH} \left\{ (r^{n+\nu} \delta_{k, n-\nu})_{k \in \mathbb{Z}}; \nu = 0, \dots, n-1 \right\} \\ &= \text{LH} \left\{ (\delta_{k, \nu})_{k \in \mathbb{Z}}; \nu = 1, \dots, n \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A_n(e_n, \overline{\mathbb{D}}, r) &= U_n(e_n, \overline{\mathbb{D}}, r)^\perp \\ &= \text{LH} \left\{ (\delta_{k, \nu})_{k \in \mathbb{Z}}; \nu = 1, \dots, n \right\}^\perp \\ &= \left\{ (y_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}); \forall k = 1, \dots, n: y_k = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $A_n(e_n, \overline{\mathbb{D}}, r)$ von der speziellen Wahl von $r > 1$ unabhängig.

Setzen wir $G := \mu_{n+1}(\mathbb{C})$ und $\mathcal{F} := A_n(e_n, \overline{\mathbb{D}}, r)$ für ein $r > 1$, so sind damit offenbar die Voraussetzungen für Korollar 7.9 (insbesondere (7.3)) erfüllt. Daneben genügt dies auch den formalen Forderungen in Proposition 7.13. Dass zudem auch die Bedingung (7.4) gilt, sehen wir aber leider erst dadurch, dass die Gleichverteilung λ auf G offenbar eine Faber-Sesquilinearform für $(\mathcal{P}_n^1(\overline{\mathbb{D}}_r), e_n)$ induziert und somit nach Satz 7.6 $\lambda \in \ker(\pi_{\mathcal{F}} \circ \Theta_G)$ gilt, obwohl λ natürlich nicht in $\ker(\delta_0 \circ \Theta_G)$ liegt.

BEISPIEL 7.20 (Intervall). Für $E = [-2, 2]$ gilt nach Beispiel 2.20

$$\psi_E: \Delta_1 \rightarrow \Omega(E), \quad z \mapsto z + \frac{1}{z}$$

und für alle $r > r(E) = 1$ stellt E_r die Ellipse mit den Halbachsen $r \pm \frac{1}{r}$ dar. Ist nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest vorgegeben, dann wählen wir die Basis $\mathcal{B} = \{F_0^E, \dots, F_{n-1}^E\}$ von $\mathcal{P}_{\leq n-1}(\mathbb{C})$ und halten fest:

(i) Für alle $r > 1$ ist

$$M_n(F_n^E, E, r) = \mu_{2n}(\mathbb{C}).$$

(ii) Für alle $\nu = 0, \dots, n-1$ und alle $\zeta \in \mathbb{T}$, $z \in \Delta_1^*$ gilt

$$\begin{aligned} (\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} F_n^E)(\zeta, z) &= F_n^E(\psi_E(\zeta z)) \overline{F_\nu^E(\psi_E(\zeta \bar{z}))} \\ &= \left(\zeta^n z^n + \frac{1}{\zeta^n z^n} \right) \left(\overline{\zeta^\nu z^\nu} + \frac{1}{\overline{\zeta^\nu z^\nu}} \right) \\ &= z^{n+\nu} \zeta^{n-\nu} + z^{n-\nu} \zeta^{n+\nu} + \frac{1}{z^{n-\nu}} \zeta^{-(n+\nu)} + \frac{1}{z^{n+\nu}} \zeta^{-(n-\nu)}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich unmittelbar

$$\begin{aligned} ((\Psi_{n,\nu}^{\mathcal{B}} \widehat{F_n^E})(\cdot, r)_{k \in \mathbb{Z}}) &= r^{n+\nu} (\delta_{n-\nu, k})_{k \in \mathbb{Z}} + r^{n-\nu} (\delta_{n+\nu, k})_{k \in \mathbb{Z}} \\ &\quad + \frac{1}{r^{n-\nu}} (\delta_{-(n+\nu), k})_{k \in \mathbb{Z}} + \frac{1}{r^{n+\nu}} (\delta_{-(n-\nu), k})_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

(iii) Wir definieren für festes $r > 1$ den Unterraum

$$\mathcal{V} := \text{LH} \left\{ v_\nu := r^{n+\nu} e_{n-\nu}|_{\mathbb{T}} + \frac{1}{r^{n-\nu}} e_{-(n+\nu)}|_{\mathbb{T}}; \nu = 0, \pm 1, \dots, \pm(n-1) \right\}$$

von $C^\infty(\mathbb{T})$ und stellen fest, dass dieser

$$V_n(F_n^E, E, r) = V_n^{\mathcal{B}}(F_n^E, E, r) \subseteq \mathcal{V}$$

erfüllt. Weil ferner für alle $\zeta \in \mu_{2n}(\mathbb{C})$ die Gleichung

$$(T_\zeta v_\nu)(z) = v_\nu(\zeta z) = r^{n+\nu} (\zeta z)^{n-\nu} + \frac{1}{r^{n-\nu}} (\zeta z)^{-(n+\nu)} = \zeta^n v_\nu(z), \quad z \in \mathbb{T}$$

für alle $\nu \in \{0, \pm 1, \dots, n-1\}$ gilt, ist \mathcal{V} unter T_ζ für alle $\zeta \in \mu_{2n}(\mathbb{C})$ invariant. Demnach erfüllt

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \Phi(\mathcal{V}) \\ &= \text{LH} \left\{ r^{n+\nu} (\delta_{n-\nu, k})_{k \in \mathbb{Z}} + \frac{1}{r^{n-\nu}} (\delta_{-(n+\nu), k})_{k \in \mathbb{Z}}; \nu = 0, \pm 1, \dots, \pm(n-1) \right\}, \end{aligned}$$

die Bedingungen

$$U_n(F_n^E, E, r) = U_n^{\mathcal{B}}(F_n^E, E, r) \subseteq \mathcal{U},$$

und

$$A_n(F_n^E, E, r) = U_n(F_n^E, E, r)^\perp \supseteq \mathcal{U}^\perp,$$

wobei \mathcal{U} unter M_ζ und \mathcal{U}^\perp unter M'_ζ für alle $\zeta \in \mu_{2n}(\mathbb{C})$ invariant ist. Wegen $\dim \mathcal{U} \leq 2n-1$ stellen wir zudem auch $\text{codim } \mathcal{U}^\perp \leq 2n-1$ fest.

Setzen wir $G := \mu_{2n}(\mathbb{C})$ und $\mathcal{F} := \mathcal{U}^\perp$, so sind damit die Voraussetzungen zu Korollar 7.9 erfüllt. Um aber über die formalen Bedingungen aus Proposition 7.13 auch die Gültigkeit von (7.4) nachweisen zu können, müssen wir uns wieder auf die Vorarbeit in Beispiel 4.24 stützen, die dann aber das Resultat überflüssig macht.

Bemerkenswert ist dennoch, dass wir die von r unabhängige Gleichverteilung auf G wählen können, obwohl \mathcal{U} und damit auch \mathcal{F} in Abhängigkeit von r gewählt werden müssen.

ANHANG A

Nützliche Hilfsaussagen

Wir beziehen uns in dieser Arbeit auf die nachfolgende Variante des Argumentprinzips, die sich in dieser Form in [Alb07] findet. Alternativ könnte man an den entsprechenden Stellen auch die unter Satz 7.8 in [FB06] angegebene Fassung verwenden.

SATZ A.1 (Argumentprinzip). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $E \subset \Omega$ ein Greenscher Bereich und $F \in \mathcal{O}(\Omega)$. Die Punkte $z_1, \dots, z_k \in \text{int}(E)$ seien Polstellen der Ordnung n_1, \dots, n_k einer auf $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ holomorphen Funktion f , die auf ∂E keine Nullstellen habe. Dann hat f höchstens endlich viele Nullstellen w_1, \dots, w_l der Ordnung m_1, \dots, m_l in $\text{int}(E)$. Es gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_+ E} F(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{p=1}^l m_p F(w_p) - \sum_{q=1}^k n_q F(z_q).$$

Von Bedeutung wird auch das nachfolgende Korollar aus dem Satz von Hahn-Banach sein, welches sich etwa als Übungsaufgabe 6.2 in [Alb08] und als Satz III.1.10 in [Wer07] findet.

KOROLLAR A.2. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $U \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Zu jedem $\phi \in U'$ finden wir dann mit dem Satz von Hahn-Banach eine Fortsetzung $\psi \in X'$ und wir setzen $s(\phi) := \psi + U^\perp$. Hierdurch ist dann eine wohldefinierte Abbildung*

$$s : U' \rightarrow X'/U^\perp$$

gegeben. Versehen wir X'/U^\perp mit der Quotientennorm, so stellt s sogar einen isometrischen Isomorphismus dar.

Das folgende Lemma fasst ein einfaches, aber in dieser Arbeit häufig verwendetes Argument:

LEMMA A.3. *Sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann ist durch*

$$\langle f, g \rangle_m := \frac{1}{m} \sum_{\zeta \in \mu_m(\mathbb{C})} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} \quad \text{für } f, g \in C(\mathbb{T})$$

eine Sesquilinearform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_m : C(\mathbb{T}) \times C(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C}$$

definiert. Diese erfüllt

$$\langle e_k, e_l \rangle_m = \begin{cases} 1, & k \equiv l \pmod{m} \\ 0, & k \not\equiv l \pmod{m} \end{cases}$$

für alle $k, l \in \mathbb{Z}$. Insbesondere gilt daher:

$$\frac{1}{m} \sum_{\zeta \in \mu_m(\mathbb{C})} \zeta^k = \langle e_k, e_0 \rangle_m = \begin{cases} 1, & k \equiv 0 \pmod{m} \\ 0, & k \not\equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

Beweis. Dass durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ in der Tat eine Sesquilinearform definiert wird, ist nach Definition offenkundig. Sind nun $k, l \in \mathbb{Z}$ beliebig vorgegeben, so erhalten wir

$$\langle e_k, e_l \rangle_m = \frac{1}{m} \sum_{\zeta \in \mu_m(\mathbb{C})} e_k(\zeta) \overline{e_l(\zeta)} = \frac{1}{m} \sum_{\zeta \in \mu_m(\mathbb{C})} \zeta^{k-l}.$$

Gilt nun $k \equiv l \pmod{m}$, was gleichbedeutend ist mit $k-l \equiv 0 \pmod{m}$, dann gilt offenbar $\zeta^{k-l} = 1$ für alle $\zeta \in \mu_m(\mathbb{C})$ und damit, wie erwartet, $\langle e_k, e_l \rangle_m = 1$. Gilt andernfalls $k \not\equiv l \pmod{m}$ oder gleichbedeutend $k-l \not\equiv 0 \pmod{m}$, so erhalten wir (unter Verwendung der bekannten Formel für die geometrische Summe) unmittelbar

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_l \rangle_m &= \frac{1}{m} \sum_{\zeta \in \mu_m(\mathbb{C})} \zeta^{k-l} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \zeta_0^{j(k-l)} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (\zeta_0^{k-l})^j = \frac{1}{m} \frac{\zeta_0^{m(k-l)} - 1}{\zeta_0^{k-l} - 1} = 0, \end{aligned}$$

wobei wir mit ζ_0 die primitive m -te Einheitswurzel $\zeta_0 := \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$ bezeichnen und beachten, dass ζ_0^{k-l} in diesem Fall von 1 verschieden ist. \square

Hilfreich wird uns auch das folgende Argument sein:

LEMMA A.4. Sei $P \in \mathcal{P}_n(K)$ ein beliebiges komplexes holomorphes Polynom vom Grad n auf einem Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$, welches aus mindestens $n+1$ Punkten besteht. Ist für $k \in \mathbb{N}$ die Bedingung

$$(A.1) \quad P(\zeta z) = \zeta^n P(z) \quad \text{für alle } z \in K \text{ und } \zeta \in \mu_k(\mathbb{C}),$$

so gilt

$$P \in \text{LH} \left\{ e_j|_K; j \in \{0, \dots, n\}, j \equiv n \pmod{k} \right\}.$$

Beweis. Da nach Voraussetzung $\#K \geq n+1$ gilt, bildet das System $\mathcal{E} := \{e_0|_K, \dots, e_n|_K\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_{\leq n}(K)$. In der Tat ist für $n+1$ paarweise verschiedene Punkte $z_0, \dots, z_n \in K$ die Vandermonde-Determinante

$$D_{\mathcal{E}}(z_0, \dots, z_n) \neq 0,$$

weshalb jede Linearkombination von $0 \in \mathcal{P}_{\leq n}(K)$ nur trivial sein kann. Wir finden daher für P eine eindeutige Darstellung der Form

$$(A.2) \quad P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0, \quad z \in K$$

mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Für alle $\zeta \in \mu_k(\mathbb{C})$ können wir damit wegen (A.1) nachrechnen:

$$P(z) = \zeta^{-n} P(\zeta z) = \sum_{j=0}^n (a_j \zeta^{j-n}) z^j, \quad z \in K$$

Ist ζ primitiv, also etwa $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{k})$, so liefert die Eindeutigkeit der Darstellung (A.2) von P , dass

$$a_j \zeta^{j-n} = a_j \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, n\}$$

oder gleichbedeutend

$$(A.3) \quad a_j (\zeta^{j-n} - 1) = 0 \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, n\}$$

gelten muss. Für alle $j \in \{0, \dots, n\}$ mit $j - n \not\equiv 0 \pmod{k}$ erzwingt (A.3) bereits $a_j = 0$. Also ist

$$P = \sum_{\substack{j \in \{0, \dots, n\} \\ j \equiv n \pmod{k}}} a_j e_j|_K,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

ANHANG B

Endlichdimensionale invariante Unterräume

Für einen normierten komplexen Vektorraum E bezeichnen wir im Folgenden mit $\text{GL}(E)$ die Gruppe der stetig invertierbaren Operatoren in $\mathcal{L}(E)$ (mit der Komposition \circ als Verknüpfung).

- Ist G eine endliche Gruppe und $A : G \rightarrow \text{GL}(E)$ ein Gruppenhomomorphismus, so bezeichnen wir für einen endlichdimensionalen Unterraum F von E mit

$$\mathfrak{J}_A(E, F)$$

die Menge aller endlichdimensionalen Unterräume von E , die F enthalten und zudem unter $A(g)$ für alle $g \in G$ invariant sind.

- Ist G eine endliche Gruppe und $A : G \rightarrow \text{GL}(E)$ ein Gruppenhomomorphismus, so bezeichnen wir für einen Unterraum F von E mit endlicher Kodimension mit

$$\mathfrak{J}'_A(E, F)$$

die Menge aller Unterräume von E mit endlicher Kodimension, die in F enthalten sind und zudem unter $A(g)$ für alle $g \in G$ invariant sind.

Für einen Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ bezeichnen wir mit T' den transponierten Operator, d.h. den durch

$$T' : E' \rightarrow E', \quad \phi \mapsto \phi \circ T$$

definierten Operator $T' \in \mathcal{L}(E')$. Ist $A : G \rightarrow \text{GL}(E)$ ein auf einer endlichen abelschen Gruppe G definierter Gruppenhomomorphismus, so ist damit offenbar auch

$$A' : G \rightarrow \text{GL}(E'), \quad g \mapsto A(g)'$$

ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

LEMMA B.1. *Seien E und F zwei normierte komplexe Vektorräume und sei $\Phi : E \rightarrow F$ ein injektiver, stetiger, linearer Operator. Weiter seien $A : G \rightarrow \text{GL}(E)$ und $B : G \rightarrow \text{GL}(F)$ auf der gleichen endlichen Gruppe G definierte Gruppenhomomorphismen, die für alle $g \in G$ die Bedingung*

$$\Phi \circ A(g) = B(g) \circ \Phi$$

erfüllen. Ist nun $E_0 \subseteq E$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum, so gilt

- (i) $\mathfrak{J}_A(E, E_0)$ ist nicht leer.
- (ii) Wir haben eine ordnungserhaltende Abbildung

$$\omega : \mathfrak{J}_A(E, E_0) \rightarrow \mathfrak{J}_B(F, F_0), \quad U \mapsto \Phi(U)$$

- (iii) Für alle $U \in \mathfrak{J}_A(E, E_0)$ gilt $\dim U = \dim \omega(U)$.

Beweis. (i) In der Situation des Lemmas definieren wir den Unterraum

$$U := \sum_{g \in G} A(g)(E_0)$$

von E , der offensichtlich endlichdimensional und unter allen Operatoren $A(g)$ mit $g \in G$ invariant ist und darüber hinaus $E_0 = A(e)(E_0)$ (wobei $e \in G$ das neutrale Element bezeichnet) enthält. Es gilt also $U \in \mathfrak{I}_A(E, E_0)$ und damit die Behauptung (i).

(ii) Sei $U \in \mathfrak{I}_A(E, E_0)$ beliebig vorgegeben. Dann stellt $\Phi(U)$ einen endlichdimensionalen Untervektorraum von F dar (da U nach Definition von $\mathfrak{I}_A(E, E_0)$ endlichdimensional ist), der $F_0 = \Phi(E_0) \subseteq \Phi(U)$ (wegen $E_0 \subseteq U$) erfüllt und für $g \in G$ wegen

$$B(g)y = B(g)(\Phi x) = (B(g) \circ \Phi)x = (\Phi \circ A(g))x = \Phi(A(g)x) \in \Phi(U)$$

für alle $y = \Phi x \in \Phi(U)$ mit $x \in U$ unter $B(g)$ invariant ist. Man beachte hierbei, dass $A(g)x \in U$ für $x \in U$ gilt, da aufgrund der Voraussetzung $U \in \mathfrak{I}_A(E, E_0)$ der Unterraum U von E unter $A(g)$ invariant ist. Definitionsgemäß gilt also $\Phi(U) \in \mathfrak{I}_B(F, F_0)$, d.h. ω ist wohldefiniert. Dass ω darüber hinaus auch ordnungserhaltend ist, ist nach Definition der Abbildung offensichtlich.

(iii) Da Φ injektiv ist, sind für alle $U \in \mathfrak{I}_A(E, E_0)$ die Vektorräume U und $\Phi(U)$ vermöge der Abbildung $\Phi|_U$ isomorph, besitzen also die gleiche Dimension. Es folgt

$$\dim U = \dim \Phi(U) = \dim \omega(U) \quad \text{für alle } U \in \mathfrak{I}_A(E, E_0)$$

und damit die Behauptung (iii). \square

LEMMA B.2. *Sei F ein komplexer Banachraum und sei*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : F \times F' \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, \phi) \mapsto \phi(x)$$

das kanonische Dualsystem. Weiter sei $B : G \rightarrow \text{GL}(F)$ ein auf einer endlichen abelschen Gruppe G definierter Gruppenhomomorphismus. Ist nun $F_0 \subseteq F$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum, so gilt:

(i) *Wir haben eine ordnungsumkehrende Abbildung*

$$\omega' : \mathfrak{I}_B(F, F_0) \rightarrow \mathfrak{I}'_{B'}(F', F_0^\perp).$$

(ii) *Für alle $V \in \mathfrak{I}_B(F, F_0)$ gilt $\dim V = \text{codim } \omega'(V)$.*

Beweis. (i) Sei $V \in \mathfrak{I}_B(F, F_0)$ beliebig vorgegeben. Dann stellt V^\perp einen Untervektorraum von F' dar, der wegen $F_0 \subseteq V$ auch $V^\perp \subseteq F_0^\perp$ erfüllt. Zudem können wir für alle $g \in G$ und alle $\phi \in V^\perp$ nachrechnen, dass

$$\langle x, B(g)' \phi \rangle = \underbrace{\langle B(g)x, \phi \rangle}_{\in V} = 0 \quad \text{für alle } x \in V$$

erfüllt ist, d.h. es gilt $B(g)' \phi \in V^\perp$, sodass V^\perp unter $B(g)'$ invariant ist. Gemäß Korollar A.2 ist darüber hinaus

$$\operatorname{codim} V^\perp = \dim F'/V^\perp = \dim V' < \infty \quad \text{wegen } \dim V < \infty.$$

Insbesondere hat damit F_0^\perp endliche Kodimension. Zusammenfassend erhalten wir also $V^\perp \in \mathfrak{J}'_{B'}(F', F_0^\perp)$, womit ω' wohldefiniert ist. Dass ω' darüber hinaus ordnungsumkehrend ist, folgt unmittelbar aus der Definition.

(ii) Sei $V \in \mathfrak{J}_B(F, F_0)$ beliebig vorgegeben. In (i) haben wir bereits gesehen, dass

$$\operatorname{codim} V^\perp = \dim F'/V^\perp = \dim V'$$

erfüllt ist. Da V endlichdimensional ist, gilt darüber hinaus auch

$$\dim V' = \dim V$$

und damit zusammenfassend die Behauptung. □

Literaturverzeichnis

- [AB02] V. V. Andrievskii and H.-P. Blatt, *Discrepancy of Signed Measures and Polynomial Approximation*, Springer-Verlag, 2002.
- [AES99] A. Atzmon, A. Eremenko, and M. Sodin, *Spectral inclusions and analytic continuations*, Bull. London Math. Soc. **31** (1999), 722–728.
- [Alb07] E. Albrecht, *Vorlesungsskript zur Funktionentheorie*, Universität des Saarlandes, 2007.
- [Alb08] ———, *Vorlesungsskript zur Funktionalanalysis 1 und 2*, Universität des Saarlandes, 2008.
- [Alb09] ———, *Chebyshev polynomials for operators*, Arch. Math. **92** (2009), 399–404.
- [BG08] C. Badea and S. Grivaux, *Faber-hypercyclic operators*, Israel J. Math. **165** (2008), 43–65.
- [BH94] J. Bartolomeo and M. He, *On Faber Polynomials generated by an m -Star*, Math. Comp. **62** (1994), 277–287.
- [BT51] H. D. Block and H. P. Thielman, *Commutative polynomials*, Quart. J. Math. Oxford. Ser. **2** (1951), 241–243.
- [Che66] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
- [CM95] J. P. Coleman and N. J. Myers, *The Faber Polynomials for Annular Sectors*, Math. Comp. **64** (1995), 181–203.
- [CS87] J. P. Coleman and R. A. Smith., *The Faber polynomials for circular sectors*, Math. Comp. **49** (1987), 231–241.
- [Cur71] J. H. Curtiss, *Faber Polynomials and the Faber Series*, Amer. Math. Monthly **78** (1971), 577–596.
- [Ell83] S. W. Ellacott, *Computation of Faber series with application to numerical polynomial approximation in the complex plane*, Math. Comp. **40** (1983), 575–587.
- [ES90] J. H. Ewing and G. Schober, *On the coefficients of the mapping to the exterior of the Mandelbrot set*, Michigan Math. J. **37** (1990), 315–320.
- [Fab03] G. Faber, *Über polynomische Entwicklungen*, Math. Ann. **57** (1903), 389–408.
- [Fab07] ———, *Über polynomische Entwicklungen II*, Math. Ann. **64** (1907), 116–135.
- [Fab20] ———, *Über Tschebyscheffsche Polynome*, J. Reine Angew. Math. **150** (1920), 79–106.
- [Fal90] K. Falconer, *Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, 1990.
- [FB06] E. Freitag and R. Busam, *Funktionentheorie 1*, Springer-Verlag, 2006.
- [Fis05] G. Fischer, *Lineare Algebra*, Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2005.
- [FM94] L. Frerick and J. Müller, *Polynomial Approximation and Maximal Convergence on Faber Sets*, Constr. Approx. **10** (1994), 427–438.
- [FM03] ———, *Polynomial Approximation on Compact Sets Bounded by Dini-Smooth Arcs*, Comp. Meth. Funct. Th. **3** (2003), 273–284.
- [For99] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, 1999.
- [FP01] B. Fischer and F. Peherstorfer, *Chebyshev approximation via polynomial mappings and the convergence behaviour of Krylov Subspace Methods*, Electron. Trans. Numer. Anal. **12** (2001), 205–215.

- [Gam05] T. W. Gamelin, *Uniform Algebras*, AMS Chelsea Publishing, 2005.
- [GHO92] K. Gatermann, Ch. Hoffmann, and G. Opfer, *Explicit Faber polynomials on circular sectors*, *Math. Comp.* **58** (1992), 241–253.
- [GT94] A. Greenbaum and L. N. Trefethen, *GMRES/CR and Arnoldi/Lancos as matrix approximation problems*, *SIAM J. Sci. Comp.* **15** (1994), 359–368.
- [Hal71] P. Halmos, *Capacity in Banach Algebras*, *Indiana Univ. Math. J.* **20** (1971), 855–863.
- [Has97] M. Hasson, *Expansion of analytic functions of an operator in series of Faber polynomials*, *Bull. Austral. Math. Soc.* **56** (1997), 303–318.
- [He94] M. He, *The Faber polynomials for m -fold symmetric domains*, *J. Comput. Appl. Math.* **54** (1994), 313–324.
- [He95] ———, *The Faber polynomials for Circular Lunes*, *Comput. Math. Applic.* **30** (1995), 207–315.
- [Heu49] P. Heuser, *Zur Theorie der Tschebyscheffschen Polynome*, *Math. Z.* **51** (1949), 574–585.
- [Hol72] R. B. Holmes, *A Course on Optimization and Best Approximation*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [Jac55] E. Jacobsthal, *Über vertauschbare Polynome*, *Math. Zeitschr.* **63** (1955), 243–276.
- [Jul22] G. Julia, *Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles*, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **39** (1922), no. 3, 131–215.
- [Kat04] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Cambridge University Press, 2004.
- [KL00] T. Koch and J. Liesen, *The conformal „bratwurst“ maps and associated Faber polynomials*, *Numer. Math.* **86** (2000), 173–191.
- [KP67] T. Kövari and Ch. Pommerenke, *On Faber Polynomials and Faber Expansions*, *Math. Zeitschr.* **99** (1967), 193–206.
- [Lie01] J. Liesen, *Faber Polynomials Corresponding to Rational Exterior Mapping Functions*, *Constr. Approx.* **17** (2001), 267–274.
- [Mar65] A. I. Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable I*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [Mar67] ———, *Theory of Functions of a Complex Variable III*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1967.
- [Moh52] E. Mohr, *Zur Theorie der tschebyscheffschen Polynome*, *Ann. Scuola Norm. Super. Pisa* **6** (1952), 245–253.
- [Möl05] M. Möller, *Vorlesungsskript zur Approximationstheorie*, Universität Dortmund, 2005.
- [Pom61] Ch. Pommerenke, *On metric properties of complex polynomials*, *Michigan Math. J.* **8** (1961), 97–115.
- [Pom64] ———, *Über die Faberschen Polynome schlichter Funktionen*, *Math. Zeitschr.* **85** (1964), 197–208.
- [Pom92] ———, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, 1992.
- [PS01] F. Peherstorfer and R. Steinbauer, *Orthogonal and L_q -extremal polynomials on inverse images of polynomial mappings*, *J. Comput. Appl. Math.* **127** (2001), 297–315.
- [Que01] B. v. Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Ran95] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Rit23] J. F. Ritt, *Permutable rational functions*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **25** (1923), no. 3, 399–488.
- [Rit24] ———, *Errata*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **26** (1924), no. 4, 494.
- [Riv90] T. J. Rivlin, *Chebyshev Polynomials - From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1990.

- [RR07] T. Ransford and J. Rostand, *Computation of Capacity*, Math. Comp. **76** (2007), 1499–1520.
- [Sue98] P.K. Suetin, *Series of Faber Polynomials*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1998.
- [TT98] K.-C. Tho and L. N. Trefethen, *The Chebyshev polynomials of a matrix*, Siam J. Matrix. Anal. Appl. **20** (1998), 400–419.
- [Wer07] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [Zim07] K. Zimmermann, *Commuting polynomials and self-similarity*, New York J. Math. **13** (2007), 89–96.

Abbildungsverzeichnis

2.1 Standard Polarkoordinatengitter	13
2.2 Hypocycloiden H_n für $n = 3, 4, 5, 11$	24
2.3 E und $\Gamma_r(E)$ für $r \in \{1.5, 2, 2.5, 3\}$	25
2.4 Beispiel einer „Bratwurst“-Menge	28
2.5 ψ_L zur klassischen Lemniskaten L	43
2.6 ψ_{D_α} für $\alpha = \frac{1}{2}$	45
2.7 ψ_{D_α} für $\alpha = \frac{3}{2}$	45
2.8 S_3 und $\Gamma_r(S_3)$ für $r \in \{1.1, 1.2, \dots, 1.9, 2\}$	47
4.1 S_m für $m = 3, 4, 5, 11$	84
4.2 \mathcal{S}_m für $m = 3, 4, 5, 11$	85
5.1 Graph von h_n für $n = 3$ und $n = 4$	89
5.2 Graph von h_n^* für $n = 3$ und $n = 4$	90
5.3 analytische Landschaft von $P_{n,1}$ auf H_n für $n = 3$ und $n = 4$	90
6.1 verallgemeinerte Lemniskate zum Intervall E	109

Symbolverzeichnis

$\mathcal{O}(X)$	Menge aller holomorphen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, Seite 4
$\mathcal{O}(X, Y)$	Menge aller holomorphen Funktionen $f : X \rightarrow Y$, Seite 4
$\widehat{\mathbb{C}}$	Einpunkt-Kompaktifizierung von \mathbb{C} , Seite 4
e_n	die durch $e_n : z \mapsto z^n$ gegebene holomorphe Funktion, Seite 8
$\Omega(K)$	unbeschränkte Zusammenhangskomponente des Komplements von K in $\widehat{\mathbb{C}}$, Seite 9
Δ_r	Komplement von $\overline{D(0, r)}$ in $\widehat{\mathbb{C}}$, Seite 9
Ω^*	punktierte Umgebung von ∞ , d.h. $\Omega^* := \Omega \setminus \{\infty\}$ für eine Umgebung Ω von ∞ in $\widehat{\mathbb{C}}$, Seite 9
$r(K)$	transfiniten Durchmesser des zulässigen Kompaktums K , Seite 11
ψ_K	eindeutig bestimmte, normierte biholomorphe Abbildung von $\Delta_{r(K)}$ nach $\Omega(K)$, Seite 11
$\gamma(K)$	analytische Kapazität von K , Seite 13
$\Gamma_r(K), \Gamma_r$	Jordankurve $\psi_K(\partial_+ D(0, r))$ für $r > r(K)$ zu einem zulässigen Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$, Seite 14
K_r	durch $\psi_K(\Delta_r) = \Omega(K_r)$ für $r > r(K)$ bestimmtes zulässiges Kompaktum zu einem zulässigen Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$, Seite 14
$\chi_K(w, \cdot)$	erzeugende Funktion der Folge $(F_n^K(w))_{n=0}^\infty$, Seite 15
F_n^K	n -tes Faberpolynom zu einem zulässigen Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$, Seite 19
H_n	das von der Hypocycloiden mit n Spitzen berandete zulässige Kompaktum, Seite 23
E	das Intervall $[-2, 2]$, Seite 24
K^*	Spiegelung des Kompaktums $K \subset \mathbb{C}$ an der reellen Achse, d.h. $K^* = \{\bar{z}; z \in K\}$, Seite 28
ϕ_K	Umkehrabbildung $\phi_K : \Omega(K) \rightarrow \Delta_{r(K)}$ zu ψ_K , Seite 38
f_n^K	durch $(F_n^K \circ \psi_K)(z) = z^n + f_n^K(\frac{1}{z})$ für $z \in \Delta_{r(K)}^*$ bestimmter gebrochenrationaler Anteil der n -ten Faberfunktion $F_n^K \circ \psi_K$ zum zulässigen Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$, Seite 40
$q^{[k]}$	k -fache Komposition $q \circ \cdots \circ q$ eines Polynoms q , Seite 47
$P(V, x)$	Menge aller Bestapproximationen aus V an x , Seite 49
$\mathcal{A}(V, x)$	linearer Approximationsraum zu $x \in X$ und dem Untervektorraum V , Seite 50

$C(K)$	\mathbb{C} -Vektorraum der stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten topologischen Hausdorffraum K , Seite 52
$E(f, K)$	Menge aller Maximumstellen der Funktion $f \in C(K)$ auf K , Seite 53
$\text{supp}(\omega)$	Träger der Abbildung $\omega : X \rightarrow \mathbb{K}$, Seite 55
$\mathcal{W}(X)$	Menge aller endlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der Menge X , Seite 55
$\text{conv}(X)$	konvexe Hülle von X , Seite 55
$\sigma(\Sigma)$	Basis einer Signatur Σ , Seite 57
$D_{\mathcal{V}}(z_1, \dots, z_n)$...	Haar-Determinante zum System \mathcal{V} mit $\#\mathcal{V} = n$ und den Punkten z_1, \dots, z_n , Seite 60
$P(p, V, x)$	Menge der Bestapproximationen an x aus V bezüglich der Halbnorm p , Seite 62
$\mathcal{P}(E)$	\mathbb{C} -Vektorraum der auf E eingeschränkten holomorphen Polynome,, Seite 67
$\mathcal{P}_{\leq n}(E)$	\mathbb{C} -Vektorraum der auf E eingeschränkten holomorphen Polynome vom Grad $\leq n$, Seite 67
$\mathcal{P}_n(E)$	Menge aller auf E eingeschränkten holomorphen Polynome vom Grad n , Seite 67
$\mathcal{P}_n^1(E)$	Menge aller auf E eingeschränkten holomorphen Polynome vom Grad n mit führendem Koeffizienten 1, Seite 67
$\mathcal{A}_n(f)$	n -ter polynomialer Approximationsraum zu f , Seite 67
$\mathcal{A}_n^1(f)$	Menge der ‘normierten’ Funktionen in $\mathcal{A}_n(f)$, Seite 67
T_n^f	n -te Tschebyschefffunktion für f , Seite 68
T_n^K	n -tes Tschebyscheffpolynom zu K , Seite 69
$c(E)$	logarithmische Kapazität der Menge $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{C}$, Seite 74

Index

- äquivalent
 - biholomorph, 6
 - holomorph, 3
- Abbildung
 - Übergangsabbildung, 3
 - Überlagerungsabbildung, 6
 - unbegrenzte, 7
 - unverzweigte, 6
 - diskrete, 6
 - eigentliche, 7
 - lokal topologische, 7
 - normierte, 12
- Ableitung
 - logarithmische, 20
- Ahlforsfunktion, 14
- analytisch verträglich, 3
- Approximationsraum
 - linearer, 50
 - polynomialer, 67
- Atlas
 - analytischer, 3
 - maximaler analytischer, 3
- Bestapproximation, 49
 - Halbnorm, 62
- Blätterzahl, 7
- Determinante
 - Haar-, 60
 - Vandermonde-, 69
- Durchmesser
 - n -ter, 75
 - transfiniten, 11
- Energie, 74
- Faber
 - Sesquilinearform
 - für Halbnormen, 65
 - für Minimalfunktionen, 68
 - für Normen, 51
 - funktion, 41
 - koeffizienten, 41
 - polynom, 19
- Fekete
 - n -Tupel, 75
 - polynom, 75
- Fläche
 - Riemannsche, 4
 - topologische, 3
- Grunskykoeffizienten, 41
- Haar
 - Bedingung, 60
 - System, 60
- Hypocycloide, 23
- Juliamenge, 47
- Kapazität
 - analytische, 13
 - logarithmische, 74
- komplexe
 - Karte, 3
 - Struktur, 3
- konvex
 - gleichmäßig, 50
 - strikt, 49
- konvexe Hülle, 55
- Kriterium
 - Faber-, 51
 - Kolmogorov-, 53
- Lemniskate, 103
 - klassische, 103
 - verallgemeinerte, 103
- Liftung, 7
- Mandelbrotmenge, 47
- Minimal
 - funktion, 67
 - polynom, 67

multiplikativ, 124

Polynom

normiertes, 19

Polynome

ähnliche, 126

ähnliche Ketten, 126

Kette, 126

vertauschbare, 126

Satz

von der Holomorphie der

Umkehrfunktion, 5

Fundamentalsatz der Algebra, 6

Identitäts-, 5

Riemannscher Abbildungs-, 6

Riemannscher Hebbbarkeits-, 5

von Heuser-Mohr

erster, 95

zweiter, 101

von Rivlin-Shapiro, 55

Signatur, 57

assoziierte, 57

Basis, 57

extremale, 57

primitive, 57

Sub-, 57

Stern, 47, 84

variierter, 84

symmetrisch

k -fach zentral-, 29

zur reellen Achse, 30

topologische Mannigfaltigkeit, 3

Träger, 55

Tschebyscheff

-funktion, 68

-polynom, 69

für Elemente aus Banachalgebren, 72

Wahrscheinlichkeitsverteilung, 55

zentriert, 91

zulässig, 9