FREIE WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

ROLAND SPEICHER

Vorlesung WS 1997/98

7. Freeness und Kumulanten

Betrachte die kanonische Variable

$$b = l^* + \sum_{i=0}^{\infty} k_{i+1} l^i \in (\Theta(l), \tau).$$

Wir wollen den Zusammenhang zwischen den Momenten

$$m_n := \tau(b^n) \qquad (n \geq 1)$$

und den freien Kumulanten

$$k_n := k_n(b) \qquad (n \geq 1)$$

von b näher untersuchen.

Es gilt

$$\begin{aligned} m_n &= \tau\big((l^* + \sum_{i=0}^{\infty} k_{i+1} l^i)^n\big) \\ &= \sum_{i(1),\dots,i(n) \in \{-1,0,1,\dots,n-1\}} \tau\big(l^{i(n)} \dots l^{i(1)}\big) k_{i(1)+1} \dots k_{i(n)+1}, \end{aligned}$$

wobei wir l^{-1} mit l^* identifizieren,

$$l^{-1} \qquad \hat{=} \qquad l^*$$

und

$$k_0 := 1$$

setzen.

Die Summe läuft über Tupel $(i(1), \dots, i(n))$, welche wir wieder mit Pfaden im ganzzahligen Gitter identifizieren können – wobei wir die negativen Schritte ($\hat{=}$ Wirkung vom Erzeuger) nach oben auftragen:

$$\begin{aligned} i = -1 \qquad &\hat{=} \qquad \text{Schritt diagonal nach oben: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ i = 0 \qquad &\hat{=} \qquad \text{Schritt waagerecht nach rechts: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ i = k \quad (1 \leq k \leq n-1) \qquad &\hat{=} \qquad \text{Schritt diagonal nach unten: } \begin{pmatrix} 1 \\ -k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ähnlich wie in 1.11 gilt nun

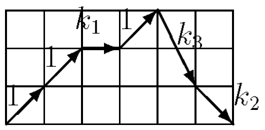
$$\tau(l^{i(n)} \dots l^{i(1)}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i(1) + \dots + i(m) \leq 0 \; \forall\, m = 1, \dots, n \text{ und} \\ & \qquad i(1) + \dots + i(n) = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und somit

$$m_n = \sum_{\substack{i(1),\dots,i(n) \in \{-1,0,1,\dots,n-1\} \\ i(1)+\dots+i(m) \leq 0 \quad \forall m=1,\dots,n \\ i(1)+\dots+i(n)=0}} k_{i(1)+1} \dots k_{i(n)+1}.$$

Es tragen also wieder nur solche Pfade von $(0,0)$ nach $(n,0)$ bei, die immer überhalb der x-Achse bleiben. Jeder solche zulässige Pfad wird in einer multiplikativen Weise mit der Länge seiner jeweiligen Schritte (gewichtet mittels den Kumulanten) gezählt.

7.1. **Beispiel.**



$$\hat{=} \qquad \tau(l^1 l^2 l^* l^0 l^* l^*) k_1 k_3 k_2$$

Ähnlich wie wir die Catalan-Pfade im zentralen Grenzwertsatz mit nicht-kreuzenden Paarungen identifiziert haben, ist es nun vorteilhaft, obigen Zusammenhang mit Hilfe nicht-kreuzender Partitionen auszudrücken.

7.2. **Definition.** Eine **Partition** der Menge $S := \{1, \dots, n\}$ ist eine Zerlegung

$$\pi = \{V_1, \dots, V_r\}$$

von S in nicht-leere und disjunkte Mengen V_i, d.h.

$$V_i \neq \emptyset \quad (i = 1, \dots, r) \qquad \text{und} \qquad S = \dot{\cup}_{i=1}^r V_i.$$

Wir bezeichnen die Menge aller Partitionen von S mit $\mathcal{P}(S)$.
Die V_i nennen wir **Blöcke** von π.
Wir schreiben für zwei Elemente $1 \le p, q \le n$

$$p \sim_\pi q \qquad \text{falls } p \text{ und } q \text{ im gleichen Block liegen.}$$

Eine solche Partition π heißt **nicht-kreuzend** falls die folgende Situation nicht auftritt: Es gibt $1 \le p_1 < q_1 < p_2 < q_2 \le n$ mit

$$p_1 \sim_\pi p_2 \not\sim_\pi q_1 \sim_\pi q_2.$$

Die Menge aller nicht-kreuzenden Partitionen von $\{1, \dots, n\}$ bezeichnen wir mit **NC(n)**.
Das 'größte' und das 'kleinste' Element in $NC(n)$ bezeichnen wir auch mit $\mathbf{1}_n$ und $\mathbf{0}_n$:

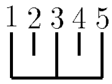
$$\mathbf{1}_n := \{(1, \dots, n)\}$$
$$\mathbf{0}_n := \{(1), \dots, (n)\}.$$

7.3. **Beispiele.** Analog zu den Paarungen können wir Partitionen graphisch veranschaulichen; der Name 'nicht-kreuzend' wird dann evident: Sei

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

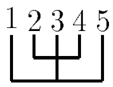
Dann ist

$$\pi = \{(1, 3, 5), (2), (4)\} \qquad \hat{=}$$



nicht-kreuzend,

$$\pi = \{(1, 3, 5), (2, 4)\} \qquad \hat{=}$$



hingegen ist kreuzend.

7.4. **Bemerkungen.** 1) Man kann nicht-kreuzende Partitionen $NC(S)$ analog für beliebige linear geordnete Mengen S definieren; dabei gilt natürlich

$$NC(S_1) \cong NC(S_2) \qquad \text{falls} \qquad \#S_1 = \#S_2.$$

2) Oft ist folgende rekursive Beschreibung von nicht-kreuzenden Partitionen hilfreich: Eine Partition π ist genau dann nicht-kreuzend, wenn mindestens ein Block $V \in \pi$ ein Intervall und $\pi \backslash V$ nicht-kreuzend ist; d.h. ein $V \in \pi$ ist von der Gestalt

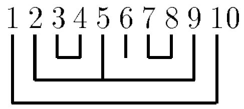
$$V = (k, k{+}1, \dots, k{+}p) \qquad \text{für ein } 1 \le k \le n \text{ und } p \ge 0 \text{ mit } k + p \le n$$

und es gilt

$$\pi \backslash V \in NC(1, \dots, k-1, k+p+1, \dots, n) \cong NC(n - (p+1)).$$

Beispiel: Die Partition

$$\{(1,10),(2,5,9),(3,4),(6),(7,8)\} \quad \hat{=}$$



kann sukzessive durch Herausnehmen von Blöcken obiger Form reduziert werden zu

$$\{(1,10),(2,5,9)\} \hat{=} \{(1,5),(2,3,4)\}$$

und

$$\{(1,5)\} \hat{=} \{(1,2)\}.$$

3) Bei einer Darstellung einer Partition π in der Form

$$\pi = \{V_1, \dots, V_r\}$$

werden wir die Elemente innerhalb der einzelnen Blöcke V_i stets in aufsteigender Reihenfolge anordnen.

Wir können nun obigen Zusammenhang zwischen Momenten und Kumulanten von Pfaden auf nicht-kreuzende Partitionen umschreiben.

7.5. **Lemma.** Es gibt eine kanonische Bijektion zwischen

$$\begin{aligned} NC(n) \longleftrightarrow \{(i(1), \dots, i(n)) \mid & i(m) \in \{-1, 0, 1, \dots, n-1\}, \\ & i(1) + \cdots + i(m) \leq 0 \quad \forall\, m = 1, \dots, n; \\ & i(1) + \cdots + i(n) = 0 \qquad\qquad\qquad \}. \end{aligned}$$

Sie wird gegeben durch

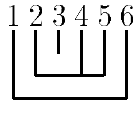
$$\pi \mapsto (i(1), \dots, i(n))$$

gemäß

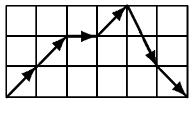
$$i(m) = \begin{cases} \#V_i - 1, & \text{falls } m \text{ letztes Element in einem Block } V_i \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachte, daß ein Ein-Element-Block einen waagerechten Schritt ergibt; ein Block der Größe k ($k \geq 2$) ergibt $k-1$ Schritte der Länge 1 nach oben und einen Schritt der Länge $k-1$ nach unten.

Ein Beispiel für diese Bijektion ist



$$\hat{=} \quad \pi = \{(1,6),(2,4,5),(3)\} \quad \hat{=}$$



Beweis. Man sieht leicht, daß die Eigenschaft 'nicht-kreuzend' von π die gewünschten Eigenschaften des Pfades $(i(1), \dots, i(n))$ ergibt.

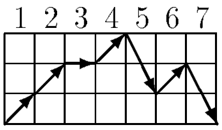
Daß eine Bijektion vorliegt, erkennt man am besten durch Angabe der

Umkehrabbildung: Ist ein Pfad Π von $(0,0)$ nach $(n,0)$ gegeben, der oberhalb der x-Achse verläuft, und nur Schritte der Form

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -k \end{pmatrix} \qquad (-1 \leq k \leq n-1)$$

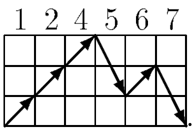
macht, so erhalten wir eine zugehörige nicht-kreuzende Partition folgermaßen: Jeder waagerechte Schritt ergibt einen Ein-Element-Block, somit können wir von diesen absehen. Aufgrund der Tatsache, daß Π nicht unter die x-Achse fällt, muß es an einer Stelle j einen Schritt nach unten von einer Länge k geben, so daß die k vorangehenden Schritte alle nach oben (mit Länge 1) waren. Diese $k+1$ Stellen ergeben eine Block der Länge $k+1$ von dem gesuchten π. Entfernen wir diese $k+1$ Punkte aus Π, so verbleiben wir mit einem Pfad Π' der Länge $n-(k+1)$, welcher nach gleichem Argument wie oben wieder einen Block von π liefert. Sukzessive können wir so ganz π aufbauen, welches nach Konstruktion nicht-kreuzend ist. Man überzeugt sich leicht, daß diese Konstruktionsvorschrift die inverse Abbildung zu der im Satz angegebenen liefert.
Beispiel: Sei

$$\Pi = (-1,-1,0,-1,2,-1,2) \qquad \hat{=}$$



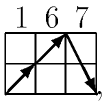
Dann ergibt der waagerechte Schritt einen Block (3), und wir verbleiben mit

$$\Pi' = (-1,-1,-1,2,-1,2) \qquad \hat{=}$$



Der erste Abstieg und die zwei vorhergehenden Schritte ergeben einen Block $(2,4,5)$ und der Pfad reduziert sich zu

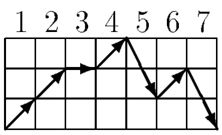
$$\Pi'' = (-1,-1,2) \qquad \hat{=}$$



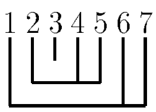
welches noch einen Block $(1,6,7)$ ergibt. Insgesamt haben wir also

$$(-1,-1,0,-1,2,-1,2) \mapsto \{(1,6,7),(3),(2,4,5)\},$$

d.h.



$$\hat{=}$$



$\square$

Beachten wir noch, daß unter dieser Identifikation von Pfaden und nicht-kreuzenden Partitionen der Faktor

$$k_\Pi = k_{i(1)+1} \dots k_{i(n)+1}$$

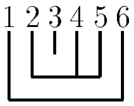
für

$$\pi = \{V_1, \dots, V_r\} \qquad \hat{=} \qquad \Pi = (i(1), \dots, i(n))$$

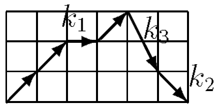
geschrieben werden kann als

$$k_\pi := k_{\#V_1} \dots k_{\#V_r}$$

– also im Beispiel 7.1



$$\hat{=} \quad \Pi \quad \hat{=} \quad \pi = \{(1,6), (2,4,5), (3)\} \quad \hat{=}$$



als

$$k_\pi = k_1 k_3 k_2 = k_{\#(3)} k_{\#(1,6)} k_{\#(2,4,5)}$$

– so haben wir folgendes Ergebnis.

7.6. **Satz.** Der Zusammenhang zwischen den Momenten m_n und den freien Kumulanten k_n ist gegeben durch

$$m_n = \sum_{\pi \in NC(n)} k_\pi.$$

Beispiel: Für $n = 3$ haben wir also den Zusammenhang

$$\begin{aligned} m_3 &= k_{\sqcup\!\sqcup} + k_{|\,\sqcup} + k_{\sqcup\,|} + k_{\sqcup\!\!|\!\!\sqcup} + k_{|\,|\,|} \\ &= k_3 + 3k_1k_2 + k_1^3. \end{aligned}$$

Dieser kombinatorische Zusammenhang zwischen Momenten und Kumulanten liefert einen neuen, vollkommen kombinatorischen, Beweis für den Zusammenhang zwischen R-Transformierte und Cauchy-Transformierte: die entsprechende Formel ist nichts anderes als eine Umschreibung obigen Satzes auf die zugehörigen formalen Potenzreihen.

7.7. **Satz.** Seien $(m_n)_{n=1}^\infty$ und $(k_n)_{n=1}^\infty$ zwei Folgen von komplexen Zahlen und

$$M(z) := 1 + \sum_{n=1}^\infty m_n z^n$$

$$C(z) := 1 + \sum_{n=1}^\infty k_n z^n$$

die zugehörigen formalen Potenzreihen. Dann sind äquivalent:

(i)

$$m_n = \sum_{\pi \in NC(n)} k_\pi = \sum_{\pi = \{V_1, \dots, V_r\} \in NC(n)} k_{\#V_1} \dots k_{\#V_r} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

(ii)

$$m_n = \sum_{s=1}^{n} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_s \in \{0,1,\dots,n-s\} \\ i_1 + \dots + i_s = n-s}} k_s m_{i_1} \dots m_{i_s} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$(\text{wobei } m_0 := 1)$$

(iii)

$$C[zM(z)] = M(z)$$

Beweis. Wir schreiben die Summe

$$m_n = \sum_{\pi \in NC(n)} k_\pi$$

in der Form um, daß wir den ersten Block V_1 von π (derjenige Block, der das Element 1 enthält) festhalten und unter dieser Bedingung die anderen Blöcke alle erlaubten Werte annehmen lassen; zum Schluß wird dann über alle Möglichkeiten für V_1 summiert:

$$m_n = \sum_{s=1}^{n} \sum_{V_1 \text{ mit } \#V_1 = s} \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \\ \text{mit } \pi = \{V_1, \dots\}}} k_\pi .$$

Sei

$$V_1 = (v_1 = 1, v_2, \dots, v_s).$$

Dann kann ein $\pi = \{V_1, \dots\} \in NC(n)$ jeweils nur Elemente zwischen v_k und v_{k+1} (für ein k) verbinden, d.h.

$\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_r\}$
wobei für $j = 2, \dots, r$ gilt: es gibt ein k, so daß $v_k < V_j < v_{k+1}$.

Dabei setzen wir

$$v_{s+1} := n + 1.$$

Somit zerfällt ein solches π in

$$\pi = V_1 \cup \tilde{\pi}_1 \cup \dots \cup \tilde{\pi}_s,$$

wobei

$$\tilde{\pi}_j = \text{nicht-kreuzende Partition von } \{v_j + 1, v_j + 2, \dots, v_{j+1} - 1\}.$$

Für π von obiger Form haben wir

$$\begin{aligned} k_\pi &= k_{\# V_1} k_{\tilde\pi_1} \dots k_{\tilde\pi_s} \\ &= k_s k_{\tilde\pi_1} \dots k_{\tilde\pi_s}, \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} m_n &= \sum_{s=1}^n \sum_{1=v_1<v_2<\dots<v_s\leq n} \sum_{\substack{\pi=V_1\cup\tilde\pi_1\cup\dots\cup\tilde\pi_s \\ \tilde\pi_j\in NC(v_j+1,\dots,v_{j+1}-1)}} k_s k_{\tilde\pi_1}\dots k_{\tilde\pi_s} \\ &= \sum_{s=1}^n k_s \sum_{1=v_1<v_2<\dots<v_s\leq n} \Big(\sum_{\tilde\pi_1\in NC(v_1+1,\dots,v_2-1)} k_{\tilde\pi_1}\Big)\dots\Big(\sum_{\tilde\pi_s\in NC(v_s+1,\dots,n)} k_{\tilde\pi_s}\Big) \\ &= \sum_{s=1}^n k_s \sum_{1=v_1<v_2<\dots<v_s\leq n} m_{v_2-v_1-1}\dots m_{n-v_s} \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{\substack{i_1,\dots,i_s\in\{0,1,\dots,n-s\} \\ i_1+\dots+i_s+s=n}} k_s m_{i_1}\dots m_{i_s} \qquad\qquad (i_k := v_{k+1}-v_k-1). \end{aligned}$$

Somit haben wir (i) $\Longrightarrow$ (ii).
(ii) können wir nun folgendermaßen in formale Potenzreihen übersetzen (wobei $m_0 := k_0 := 1$):

$$\begin{aligned} M(z) &= 1+\sum_{n=1}^\infty z^n m_n \\ &= 1+\sum_{n=1}^\infty \sum_{s=1}^n \sum_{\substack{i_1,\dots,i_s\in\{0,1,\dots,n-s\} \\ i_1+\dots+i_s=n-s}} k_s z^s m_{i_1} z^{i_1}\dots m_{i_s} z^{i_s} \\ &= 1+\sum_{s=1}^\infty k_s z^s \Big(\sum_{i=0}^\infty m_i z^i\Big)^s \\ &= C[zM(z)] \end{aligned}$$

Dies ergibt (iii).
Da (iii) eindeutig eine feste Relation zischen den k_n und den m_n beschreibt, muß dies die Beziehung (i) sein. □

7.8. **Korollar.** Der Zusammenhang zwischen der Cauchy-Transformierten $G(z)$ und der R-Transformierten $R(z)$ einer Zufallsvariablen ist gegeben durch

$$G[R(z)+\frac{1}{z}] = z.$$

Beweis. Wir müssen nur beachten, daß die formalen Potenzreihen $M(z)$ und $C(z)$ aus Satz 7.7 mit $G(z)$, $R(z)$ und $K(z) = R(z) + \frac{1}{z}$ folgendermaßen verknüpft sind:

$$G(z) = \frac{1}{z} M(\frac{1}{z})$$

und

$$C(z) = 1 + zR(z) = zK(z), \qquad \text{also} \qquad K(z) = \frac{C(z)}{z}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} K[G(z)] &= \frac{1}{G(z)} C[G(z)] \\ &= \frac{1}{G(z)} C[\frac{1}{z} M(\frac{1}{z})] \\ &= \frac{1}{G(z)} M(\frac{1}{z}) && \text{nach (7.7)} \\ &= z, \end{aligned}$$

also

$$K[G(z)] = z$$

und somit auch

$$G[R(z) + \frac{1}{z}] = G[K(z)] = z.$$

□

7.9. **Bemerkung.** Obige kombinatorische Beschreibung der Kumulanten ergibt also einen direkten Beweis der Formel für die R-Transformierte. Aber auch die Haupteigenschaft der R-Transformierten, die Linearität unter freier Faltung, kann kombinatorisch sehr einfach verstanden werden. Dazu verallgemeinern wir obigen Satz 7.6 zur Definition von gemischten Kumulanten: Im Sinne der Philosophie, daß der Übergang von Momenten zu Kumulanten das Problem der freien Faltung vereinfacht (linearisiert), ergibt der Übergang von gemischten Momenten zu gemischten Kumulanten eine effektive Beschreibung von freeness selbst.

7.10. **Definition.** Sei $(\mathcal{A}, \varphi)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die **(gemischten) Kumulanten**

$$k_n : \mathcal{A}^n \to \mathbb{C} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

definieren wir (indirekt) durch das folgende Gleichungssystem

$$\varphi(a_1 \dots a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} k_\pi[a_1, \dots, a_n] \qquad (a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}),$$

wobei k_π multiplikativ in die entsprechenden Kumulanten gemäß der Block-Struktur von π zerfällt:

$$k_\pi[a_1,\dots,a_n] := k_{V_1}[a_1,\dots,a_n]\dots k_{V_r}[a_1,\dots,a_n] \qquad \text{für } \pi=\{V_1,\dots,V_r\}\in NC(n)$$

und

$$k_V[a_1,\dots,a_n] := k_{\#V}[a_{v_1},\dots,a_{v_l}] \qquad \text{für} \qquad V=(v_1,\dots,v_l).$$

7.11. **Bemerkungen und Beispiele.** 1) Beachte: Obige Gleichungen haben die Form

$$\varphi(a_1\dots a_n) = k_n(a_1,\dots,a_n) + \sum_{\substack{\pi\in NC(n)\\ \pi\neq \mathbf{1}_n}} k_\pi[a_1,\dots,a_n],$$

sie können also rekursiv eindeutig nach den $k_n(a_1,\dots,a_n)$ aufgelöst werden.
2) Beispiele:

- $n=1$
$$\varphi(a_1) = k_{|}[a_1] = k_1(a_1),$$
somit
$$k_1(a_1) = \varphi(a_1).$$
- $n=2$
$$\begin{aligned}\varphi(a_1a_2) &= k_{\sqcup}[a_1,a_2] + k_{||}[a_1,a_2]\\ &= k_2(a_1,a_2) + k_1(a_1)k_1(a_2),\end{aligned}$$
somit
$$k_2(a_1,a_2) = \varphi(a_1a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2).$$
- $n=3$

$$\begin{aligned}\varphi(a_1a_2a_3) &= k_{\sqcup\!\sqcup}[a_1,a_2,a_3] + k_{|\sqcup}[a_1,a_2,a_3] + k_{\sqcup|}[a_1,a_2,a_3]\\ &\qquad + k_{\sqcup\!\!\!\!\;\cdot\;}[a_1,a_2,a_3] + k_{|||}[a_1,a_2,a_3]\\ &= k_3(a_1,a_2,a_3) + k_1(a_1)k_2(a_2,a_3) + k_2(a_1,a_2)k_1(a_3)\\ &\qquad + k_2(a_1,a_3)k_1(a_1) + k_1(a_1)k_1(a_2)k_1(a_3),\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}k_3(a_1,a_2,a_3) &= \varphi(a_1a_2a_3) - \varphi(a_1)\varphi(a_2a_3) - \varphi(a_1a_3)\varphi(a_2)\\ &\qquad - \varphi(a_1a_2)\varphi(a_3) + 2\varphi(a_1)\varphi(a_2)\varphi(a_3).\end{aligned}$$

3) Als Beispiel für $n = 4$ betrachte den Spezialfall, daß alle $\varphi(a_i) = 0$. Dann ist

$$k_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = \varphi(a_1a_2a_3a_4) - \varphi(a_1a_2)\varphi(a_3a_4) - \varphi(a_1a_4)\varphi(a_2a_3).$$

4) Die k_n sind multi-lineare Funktionen in ihren n Argumenten.
5) Sei k_n^a die n-te Kumulante der Zufallsvariablen a gemäß Kapitel 6 (dort wurde sie mit $k_n(a)$ bezeichnet). Dann ordnet sich dies als Spezialfall in unsere jetzigen Betrachtungen ein gemäß

$$k_n^a = k_n(a, \dots, a).$$

Die Bedeutung der gemischten Kumulanten für die Beschreibung von freeness zeigt folgender Satz.

7.12. **Satz.** Sei $(\mathcal{A}, \varphi)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}$ Unteralgebren. Dann sind äquivalent:

i) $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ sind frei.
ii) Für alle $n \geq 2$ und alle $a_i \in \mathcal{A}_{j(i)}$ mit $1 \leq j(1), \dots, j(n) \leq m$ gilt

$$k_n(a_1, \dots, a_n) = 0 \qquad \text{falls es } 1 \leq l, k \leq n \text{ gibt mit } j(l) \neq j(k).$$

7.13. **Bemerkungen.** 1) Obige Charakterisierung von freeness durch Kumulanten ist die Übersetzung der Definition von freeness mittels Momente auf die Kumulanten - unter Benutzung der Beziehung aus Definition 7.10. Beachte dabei: Im Gegensatz zu der Charakterisierung durch gemischte Momente fordern wir hier nicht $j(1) \neq j(2) \neq \dots \neq j(n)$ und insbesondere auch nicht $\varphi(a_i) = 0$. Daher ist die Charakterisierung von freeness mittels Kumulanten viel besser anwendbar.
2) Da 1 frei von allem, enthält obiger Satz als Spezialfall auch die Aussage

$$k_n(a_1, \dots, a_n) = 0 \qquad \text{falls } n \geq 2 \text{ und mindestens ein } a_i = 1.$$

Dieser Spezialfall stellt aber auch einen wesentlichen Schritt im Beweis des allgemeinen Satzes dar. Wir werden daher zunächst dies als Lemma beweisen.
3) Beachte noch: für $n = 1$ gilt natürlich

$$k_1(1) = \varphi(1) = 1.$$

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Falls alle a_i zentriert und alternierend sind, d.h. $j(1) \neq j(2) \neq \dots \neq j(n)$, so folgt die Behauptung direkt aus der Definition von freeness und der Beziehung

$$\varphi(a_1 \dots a_n) = k_n(a_1, \dots, a_n) + \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \\ \pi \neq \mathbf{1}_n}} k_\pi[a_1, \dots, a_n],$$

da mindestens ein Faktor von k_π für $\pi \neq \mathbf{1}_n$ von der Gestalt

$$k_{p+1}(a_l, a_{l+1}, \dots, a_{l+p}) \qquad \text{wobei } p+1 < n$$

ist, somit induktiv die Behauptung folgt.
Der wesentliche Teil des Beweises besteht darin zu sehen, daß auf der Ebene der Kumulanten die Voraussetzung 'zentriert' überflüssig und 'alternierend' zu 'gemischt' abgeschwächt werden kann.
Zunächst wollen wir die Voraussetzung 'zentriert' wegdiskutieren. Dazu dient folgendes Lemma – welches natürlich ein Spezialfall unseres zu beweisenden Satzes ist.

7.13.1. *Lemma.* Sei $n \geq 2$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

$$\text{es gibt ein } 1 \leq i \leq n \text{ mit } a_i = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad k_n(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Beweis. Der einfacheren Notation wegen betrachten wir den Fall $a_n = 1$ (der allgemeine Fall geht analog), d.h. wir wollen zeigen

$$k_n(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) \stackrel{!}{=} 0.$$

Beweis mit Induktion über n.
$n = 2$: Behauptung richtig, da

$$k_2(a, 1) = \varphi(a1) - \varphi(a)\varphi(1) = 0.$$

$n-1 \to n$: Sei die Behauptung für alle $k < n$ gezeigt. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\varphi(a_1 \dots a_{n-1} 1) &= \sum_{\pi \in NC(n)} k_\pi[a_1, \dots, a_{n-1}, 1] \\ &= k_n(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) + \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \\ \pi \neq \mathbf{1}_n}} k_\pi[a_1, \dots, a_{n-1}, 1].\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung geben in obiger Summe nur genau solche $\pi \neq \mathbf{1}_n$ einen Beitrag, bei denen n einziges Element in seinem Block ist, d.h. die von der Gestalt sind

$$\pi = \sigma \cup (n) \qquad \text{für} \qquad \sigma \in NC(n-1).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}k_\pi[a_1, \dots, a_{n-1}, 1] &= k_\sigma[a_1, \dots, a_{n-1}] k_1(1) \\ &= k_\sigma[a_1, \dots, a_{n-1}],\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\varphi(a_1 \dots a_{n-1} 1) &= k_n(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) + \sum_{\sigma \in NC(n-1)} k_\sigma[a_1, \dots, a_{n-1}] \\ &= k_n(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) + \varphi(a_1 \dots a_{n-1}).\end{aligned}$$

Da natürlich
$$\varphi(a_1 \dots a_{n-1} 1) = \varphi(a_1 \dots a_{n-1}),$$
folgt
$$k_n(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) = 0.$$
□

Sei $n \geq 2$. Dann folgt mit Hilfe dieses Lemmas für beliebige $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$
$$k_n(a_1, \dots, a_n) = k_n(a_1 - \varphi(a_1)1, \dots, a_n - \varphi(a_n)1),$$
d.h. wir können die Argumente zentrieren, ohne den Wert der Kumulanten zu ändern.
Somit erhalten wir folgende Aussage: Sei $n \geq 2$ und $a_i \in \mathcal{A}_{j(i)}$ $(i = 1, \dots, n)$ mit $j(1) \neq j(2) \neq \cdots \neq j(n)$. (Insbesondere stammen die Argumente also aus mindestens zwei verschiedenen Algebren.) Dann ist
$$k_n(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Es bleibt noch, die Voraussetzung 'alternierend' zu 'gemischt' abzuschwächen. Dazu dient folgendes Lemma

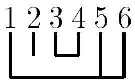
7.13.2. *Lemma.* Sei $n \geq 2$, $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ und $1 \leq p \leq n-1$. Dann gilt
$$\begin{aligned} k_{n-1}(a_1, \dots, a_{p-1}, a_p a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_n) &= k_n(a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_n) \\ &\quad + \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \\ \# \pi = 2 \\ p \not\sim_\pi p+1}} k_\pi[a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_n]. \end{aligned}$$

Beispiele:
$$k_2(a_1 a_2, a_3) = k_3(a_1, a_2, a_3) + k_1(a_1) k_2(a_2, a_3) + k_2(a_1, a_3) k_1(a_2).$$
$$\begin{aligned} k_3(a_1, a_2 a_3, a_4) &= k_4(a_1, a_2, a_3, a_4) + k_1(a_2) k_3(a_1, a_3, a_4) \\ &\quad + k_2(a_1, a_2) k_2(a_3, a_4) + k_3(a_1, a_2, a_4) k_1(a_3) \end{aligned}$$

Beweis. Sei $\pi \in NC(n)$. Dann bezeichne $\pi|_{p=p+1} \in NC(n-1)$ die Partition, die durch Identifizierung von p und $p+1$ entsteht, d.h. mit $\pi = \{V_1, \dots, V_r\}$ haben wir
$$\pi|_{p=p+1} = \{V_1, \dots, (V_k \cup V_l) \backslash \{p+1\}, \dots, V_r\}, \qquad \text{falls } p \in V_k \text{ und } p+1 \in V_l.$$
(Falls p und $p+1$ in verschiedenen Blöcken liegen, so hat $\pi|_{p=p+1}$ also einen Block weniger als π; sind p und $p+1$ im gleichen Block, so ändert sich die Bock-Anzahl nicht; wir identifizieren natürlich in kanonischer Weise Partitionen der Menge $\{1, \dots, p, p+2, \dots, n\}$ mit Partitionen aus

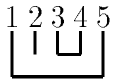
$NC(n-1)$; die Eigenschaft 'nicht-kreuzend' bleibt bei dem Übergang von π zu $\pi|_{p=p+1}$ erhalten.)
Beispiel: Sei

$$\pi = \{(1,5,6),(2),(3,4)\} \qquad \hat{=}$$



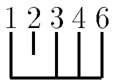
Dann ist

$$\pi|_{5=6} = \{(1,5),(2),(3,4)\} \qquad \hat{=}$$



und

$$\pi|_{4=5} = \{(1,3,4,6),(2)\} \hat{=} \{(1,3,4,5),(2)\} \qquad \hat{=}$$



Mit Hilfe dieser Definition können wir die Behauptung unseres Lemmas auch allgemeiner auf k_σ für beliebiges $\sigma \in NC(n-1)$ übertragen: Gelte Behauptung für alle $l \leq n$, d.h.

$$\begin{aligned} k_{l-1}(a_1,\dots,a_pa_{p+1},\dots,a_l) &= k_{\mathbf{1}_{l-1}}[a_1,\dots,a_pa_{p+1},\dots,a_l] \\ &= \sum_{\substack{\pi\in NC(l) \\ \pi|_{p=p+1}=\mathbf{1}_{l-1}}} k_\pi[a_1,\dots,a_p,a_{p+1},\dots,a_l]. \end{aligned}$$

Dann gilt auch für beliebiges $\sigma \in NC(n-1)$:

$$k_\sigma[a_1,\dots,a_pa_{p+1},\dots,a_n] = \sum_{\substack{\pi\in NC(n) \\ \pi|_{p=p+1}=\sigma}} k_\pi[a_1,\dots,a_p,a_{p+1},\dots,a_n].$$

Wir beweisen die Behauptung des Lemmas nun mit Induktion nach n.
$n=2$: Die Behauptung ergibt sich gemäß

$$\begin{aligned} k_1(a_1a_2) &= \varphi(a_1a_2) \\ &= (\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2)) + \varphi(a_1)\varphi(a_2) \\ &= k_2(a_1,a_2) + k_1(a_1)k_1(a_2). \end{aligned}$$

$n-1 \to n$: Sei die Behauptung für alle $k < n$ bewiesen, insbesondere gelte also für alle $\sigma \in NC(n-1)$ mit $\sigma \neq \mathbf{1}_{n-1}$

$$k_\sigma[a_1,\dots,a_pa_{p+1},\dots,a_n] = \sum_{\substack{\pi\in NC(n) \\ \pi|_{p=p+1}=\sigma}} k_\pi[a_1,\dots,a_p,a_{p+1},\dots,a_n].$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}
&k_{n-1}(a_1,\dots,a_pa_{p+1},\dots,a_n)\\
&=\varphi(a_1\dots(a_pa_{p+1})\dots a_n)-\sum_{\substack{\sigma\in NC(n-1)\\ \sigma\neq \mathbf{1}_{n-1}}} k_\sigma[a_1,\dots,a_pa_{p+1},\dots,a_n]\\
&=\varphi(a_1\dots a_pa_{p+1}\dots a_n)\\
&\qquad\qquad-\sum_{\substack{\sigma\in NC(n-1)\\ \sigma\neq \mathbf{1}_{n-1}}}\sum_{\substack{\pi\in NC(n)\\ \pi|_{p=p+1}=\sigma}} k_\pi[a_1,\dots,a_p,a_{p+1},\dots,a_n]\\
&=\varphi(a_1\dots a_pa_{p+1}\dots a_n)-\sum_{\substack{\pi\in NC(n)\\ \pi|_{p=p+1}\neq \mathbf{1}_{n-1}}} k_\pi[a_1,\dots,a_p,a_{p+1},\dots,a_n]\\
&=\sum_{\pi\in NC(n)} k_\pi[a_1,\dots,a_p,a_{p+1},\dots,a_n]\\
&\qquad\qquad-\sum_{\substack{\pi\in NC(n)\\ \pi|_{p=p+1}\neq \mathbf{1}_{n-1}}} k_\pi[a_1,\dots,a_p,a_{p+1},\dots,a_n]\\
&=\sum_{\substack{\pi\in NC(n)\\ \pi|_{p=p+1}=\mathbf{1}_{n-1}}} k_\pi[a_1,\dots,a_p,a_{p+1},\dots,a_n]\\
&=k_n(a_1,\dots,a_p,a_{p+1},\dots,a_n)+\sum_{\substack{\pi\in NC(n)\\ \#\pi=2\\ p\not\sim_\pi p+1}} k_\pi[a_1,\dots,a_p,a_{p+1},\dots,a_n].
\end{aligned}$$

□

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun unsere Behauptung in voller Allgemeinheit zeigen: Sei $n\geq 2$ und $a_i\in\mathcal{A}_{j(i)}$ $(i=1,\dots,n)$. Außerdem gebe es k,l mit $j(k)\neq j(l)$. Dann ist

$$k_n(a_1,\dots,a_n)\stackrel{!}{=}0.$$

denn: Falls $j(1)\neq j(2)\neq\dots\neq j(n)$, so haben wir die Aussage schon oben gezeigt. Wir können also annehmen, es gibt ein p mit $j(p)=j(p+1)$, somit $a_pa_{p+1}\in\mathcal{A}_{j(p)}$. In diesem Fall haben wir nach obigem Lemma

$$\begin{aligned}
k_n(a_1,\dots,a_p,a_{p+1},\dots,a_n)&=k_{n-1}(a_1,\dots,a_pa_{p+1},\dots,a_n)\\
&\quad-\sum_{\substack{\pi\in NC(n)\\ \#\pi=2\\ p\not\sim_\pi p+1}} k_\pi[a_1,\dots,a_p,a_{p+1},\dots,a_n].
\end{aligned}$$

Der Beweis geht nun wieder mit Induktion nach n: Der erste Term $k_{n-1}(a_1, \dots, a_p a_{p+1}, \dots, a_n)$ verschwindet nach Induktionsvoraussetzung, da zwei seiner Argumente in den verschiedenen Algebren $\mathcal{A}_{j(k)}$ und $\mathcal{A}_{j(l)}$ liegen. Betrachte nun einen Summanden $k_\pi[a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_n]$ für ein $\pi \in NC(n)$ mit

$$\pi = \{V_1, V_2\}, \qquad \text{wobei } p \in V_1 \text{ und } p+1 \in V_2.$$

In diesem Falle ist $k_\pi = k_{V_1} k_{V_2}$ und dieses kann nach Induktionsvoraussetzung nur dann verschieden von Null sein, wenn in beiden Faktoren jeweils alle Elemente aus der gleichen Algebra stammen. Das würde aber bedeuten, im ersten Faktor sind alle Argumente in $\mathcal{A}_{j(p)}$, im zweiten Faktor alle Argumente in $\mathcal{A}_{j(p+1)}$. Wegen $j(p) = j(p+1)$ würde dies aber implizieren

$$j(1) = j(2) = \cdots = j(n),$$

im Wiederspruch zu $j(l) \neq j(k)$. Somit verschwinden alle Terme auf der rechten Seite gemäß Induktionsvoraussetzung und es folgt

$$k_n(a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_n) = 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): (ii) erlaubt (induktiv) eine eindeutige Berechnung aller gemischten Momente; diese müssen sich nach dem schon bewiesenen Teil also genauso berechnen, wie es sich für freie Unteralgebren gehört; somit sind die Unteralgebren aber frei. $\square$

7.14. **Bemerkungen.** 1) Dieser Satz liefert uns einen neuen einfachen Beweis für die Additivität der Kumulanten (und somit auch der R-Transformierten): Seien a und b frei. Dann gilt

$$\begin{aligned} k_n^{a+b} &= k_n(a+b, \dots, a+b) \\ &= k_n(a, \dots, a) + k_n(b, \dots, b) \\ &= k_n^a + k_n^b. \end{aligned}$$

2) Wie im ein-dimensionalen Fall, kann man mit den gemischten Kumulanten als Koeffizienten kanonische Darstellungen der gegebenen Verteilung kontruieren: Seien Zufallsvariable $a_1, \dots, a_k$ gegeben. Wir setzen dann

$$b := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{1 \leq i(1), \dots, i(n) \leq k} k_n(a_{i(1)}, \dots, a_{i(n)}) l_{i(1)} \dots l_{i(n)} \in (\Theta(l_1, \dots, l_k), \tau),$$

wobei $\Theta(l_1, \dots, l_k)$ analog zu vorher die formalen Potenzreihen in k freien einseitigen Shifts ist (mit kanonischem Zustand τ). Dann gilt

$$\mu_{a_1, \dots, a_k} = \mu_{bl_1^*, \dots, bl_k^*}.$$

3) Beispiel: Sei $\{s_1, s_2\}$ eine Halbkreis-Familie vom Radius 2, d.h. s_1 und s_2 sind frei und beide sind Halbkreiselemente. Dann ist also

$$k_2(s_1, s_1) = 1, \qquad k_2(s_2, s_2) = 1,$$

alle übrigen Kumulanten sind Null. Somit haben wir

$$b = 1 + l_1 l_1 + l_2 l_2$$

und

$$bl_1^* = l_1^* + l_1, \qquad bl_2^* = l_2^* + l_2.$$

4) Beachte: im eindimensionalen Fall ist

$$(1 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n l^n) l^* = l^* + \sum_{n=1}^{\infty} k_n l^{n-1},$$

d.h. obige Vorschrift reduziert sich auf kanonische Variable aus Kapitel 6.

7.15. **Beispiel.** Sei $\{s_1, \dots, s_m\}$ eine Halbkreis-Familie vom Radius 2. Dann gilt also

$$k_n(s_{i(1)}, \dots, s_{i(n)}) = \begin{cases} 1, & n = 2,\ i(1) = i(2) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die gemischten Momente bedeutet dies

$$\begin{aligned} \varphi(s_{i(1)} \dots s_{i(n)}) &= \sum_{\pi \in NC(n)} k_\pi[s_{i(1)}, \dots, s_{i(n)}] \\ &= \sum_{\pi \in NCP(n)} k_\pi[s_{i(1)}, \dots, s_{i(n)}], \end{aligned}$$

wobei $NCP(n)$ die **Menge der nicht-kreuzenden Paarungen** von n Elementen bezeichnet:

$$NCP(n) := \{\pi \in NC(n) \mid \text{jeder Block von } \pi \text{ enthält genau 2 Elemente}\}.$$

Somit verschwindet obiges gemischte Moment für n ungerade und für $n = 2l$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\varphi(s_{i(1)} \dots s_{i(n)}) \\ &= \sum_{\pi = \{(v_1, w_1), \dots, (v_l, w_l)\} \in NCP(n)} k_2(s_{i(v_1)}, s_{i(w_1)}) \dots k_2(s_{i(v_l)}, s_{i(w_l)}) \\ &= \#\{\pi = \{(v_1, w_1), \dots, (v_l, w_l)\} \in NCP(n) \mid i(v_j) = i(w_j)\ \forall j = 1, \dots, l\} \end{aligned}$$

Wir werden obige Beschreibung von freeness mittels gemischten Kumulanten nun noch auf eine andere wichtige Situation anwenden, nämlich die Betrachtung des Produktes von freien Zufallsvariablen: Seien Zufallsvariable $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ gegeben, so daß $\{a_1, \dots, a_n\}$ und

$\{b_1, \dots, b_n\}$ frei sind. Wir wollen dann die Verteilung der Zufallsvariablen $a_1b_1, \dots, a_nb_n$ durch die Verteilung der a's und der b's ausdrücken.

7.16. **Notation.** 1) Analog zu k_π definieren wir für

$$\pi = \{V_1, \dots, V_r\} \in NC(n)$$

den Ausdruck

$$\varphi_\pi[a_1 \dots, a_n] := \varphi_{V_1}[a_1, \dots, a_n] \dots \varphi_{V_r}[a_1, \dots, a_n],$$

wobei

$$\varphi_V[a_1, \dots, a_n] := \varphi(a_{v_1} \dots a_{v_l}) \qquad \text{für} \qquad V = (v_1, \dots, v_l).$$

Beispiele:

$$\varphi_{\sqcup\!\sqcup}[a_1, a_2, a_3] = \varphi(a_1a_2a_3)$$

$$\varphi_{|\,\sqcup}[a_1, a_2, a_3] = \varphi(a_1)\varphi(a_2a_3)$$

$$\varphi_{\sqcup\,|}[a_1, a_2, a_3] = \varphi(a_1a_2)\varphi(a_3)$$

$$\varphi_{\sqcup\!\!\!\!\shortmid\;}[a_1, a_2, a_3] = \varphi(a_1a_3)\varphi(a_2)$$

$$\varphi_{|\,|\,|}[a_1, a_2, a_3] = \varphi(a_1)\varphi(a_2)\varphi(a_3)$$

2) Für zwei nicht-kreuzende Partitionen $\sigma, \pi \in NC(n)$ schreiben wir

$$\sigma \leq \pi$$

falls jeder Block von σ ganz in einem Block von π enthalten ist – d.h. σ ergibt sich aus π durch Verfeinerung der Blockstruktur.
Beispiel:

$$\{(1), (2,4), (3), (5,6)\} \leq \{(1,5,6), (2,3,4)\}$$

Mit diesen Notationen können wir den Zusammenhang

$$\varphi(a_1 \dots a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} k_\pi[a_1, \dots, a_n]$$

folgendermaßen verallgemeinern.

7.17. **Satz.** Für $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in NC(n)$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ gilt

$$\varphi_\sigma[a_1, \dots, a_n] = \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \\ \pi \leq \sigma}} k_\pi[a_1, \dots, a_n].$$

Beweis. Jedes

$$\pi \leq \sigma = \{V_1, \dots, V_r\}$$

kann zerlegt werden als

$$\pi = \pi_1 \cup \cdots \cup \pi_r \qquad \text{mit} \qquad \pi_i \in NC(V_i) \quad (i = 1, \dots, r).$$

Dabei gilt natürlich

$$k_\pi = k_{\pi_1} \dots k_{\pi_r}.$$

Somit haben wir (wobei wir die Argumente weg lassen)

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma &= \varphi_{V_1} \dots \varphi_{V_r} \\ &= \Big(\sum_{\pi_1 \in NC(V_1)} k_{\pi_1} \Big) \dots \Big(\sum_{\pi_r \in NC(V_r)} k_{\pi_r} \Big) \\ &= \sum_{\pi = \pi_1 \cup \dots \cup \pi_r \leq \sigma} k_{\pi_1} \dots k_{\pi_r} \\ &= \sum_{\pi \leq \sigma} k_\pi. \end{aligned}$$

□

Seien nun

$$\{a_1, \dots, a_n\}, \{b_1, \dots, b_n\} \qquad \text{frei.}$$

Wir wollen in a und b alternierende gemischte Momente in den a's und b's ausdrücken. Betrachte

$$\varphi(a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n) = \sum_{\pi \in NC(2n)} k_\pi[a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n].$$

Da die a's von den b's frei sind, bekommen wir nach Satz 7.12 (Verschwinden von gemischten Kumulanten) nur für solche π einen Beitrag, deren Blöcke jeweils nur a's oder nur b's miteinander koppeln, d.h. solche π müssen zerfallen in

$$\pi = \pi_1 \cup \pi_2 \qquad \text{mit} \quad \begin{aligned} &\pi_1 \in NC(1, 3, 5, \dots, 2n-1) \\ &\pi_2 \in NC(2, 4, 6, \dots, 2n). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
&\varphi(a_1b_1a_2b_2\dots a_nb_n)\\
&=\sum_{\substack{\pi_1\in NC(ungerade)\\ \pi_2\in NC(gerade)\\ \pi_1\cup\pi_2\in NC(2n)}} k_{\pi_1}[a_1,a_2,\dots,a_n]\cdot k_{\pi_2}[b_1,b_2,\dots,b_n]\\
&=\sum_{\pi_1\in NC(ungerade)} \big(k_{\pi_1}[a_1,a_2,\dots,a_n]\cdot \sum_{\substack{\pi_2\in NC(gerade)\\ \pi_1\cup\pi_2\in NC(2n)}} k_{\pi_2}[b_1,b_2,\dots,b_n]\big).
\end{aligned}$$

Beachte nun, daß es für fest gewähltes π_1 ein maximales Element σ mit $\pi_1\cup\sigma\in NC(2n)$ gibt und die zweite Summe gerade über alle $\pi_2\le\sigma$ läuft.

7.18. **Definition.** Sei $\pi\in NC(n)$ eine nicht-kreuzende Partition der Zahlen $1,\dots,n$. Betrachte zusätzlich Zahlen $\bar{1},\dots,\bar{n}$, wobei wir die normalen und die gestrichenen Zahlen alternierend anordnen, also

$$1\bar{1}2\bar{2}\dots n\bar{n}.$$

Wir definieren nun das **Komplement** $K(\pi)$ von π als das größte $\sigma\in NC(\bar{1},\dots,\bar{n})$ mit der Eigenschaft, daß

$$\pi\cup\sigma\in NC(1,\bar{1},\dots,k,\bar{k}).$$

Stellen wir die Partition π graphisch durch Verbinden der entsprechenden Blöcke in $1,\dots,n$ dar, so ergibt sich σ durch maximales Verbinden der Zahlen $\bar{1},\dots,\bar{n}$ ohne Kreuzen von π.

Damit können wir aber in unserer obigen Rechnung wie folgt fortfahren:

$$\begin{aligned}
&\varphi(a_1b_1a_2b_2\dots a_nb_n)\\
&=\sum_{\pi_1\in NC(n)} \big(k_{\pi_1}[a_1,a_2,\dots,a_n]\cdot \sum_{\substack{\pi_2\in NC(n)\\ \pi_2\le K(\pi_1)}} k_{\pi_2}[b_1,b_2,\dots,b_n]\big)\\
&=\sum_{\pi_1\in NC(n)} k_{\pi_1}[a_1,a_2,\dots,a_n]\cdot\varphi_{K(\pi_1)}[b_1,b_2,\dots,b_n].
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

7.19. **Satz.** Seien

$$\{a_1,\dots,a_n\},\{b_1,\dots,b_n\}\qquad\text{frei.}$$

Dann gilt

$$\varphi(a_1b_1a_2b_2\dots a_nb_n)=\sum_{\pi\in NC(n)} k_\pi[a_1,a_2,\dots,a_n]\cdot\varphi_{K(\pi)}[b_1,b_2,\dots,b_n].$$

Diese Darstellung für alternierende Produkte werden wir bei unseren Untersuchungen über Zufallsmatrizen benötigen.

Beispiele: Für $n = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\varphi(ab) &= k_1(a)\varphi(b)\\ &= \varphi(a)\varphi(b);\end{aligned}$$

$n = 2$ ergibt

$$\begin{aligned}\varphi(a_1b_1a_2b_2) &= k_1(a_1)k_1(a_2)\varphi(b_1b_2) + k_2(a_1, a_2)\varphi(b_1)\varphi(b_2)\\ &= \varphi(a_1)\varphi(a_2)\varphi(b_1b_2) + \big(\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2)\big)\varphi(b_1)\varphi(b_2)\\ &= \varphi(a_1)\varphi(a_2)\varphi(b_1b_2) + \varphi(a_1a_2)\varphi(b_1)\varphi(b_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2)\varphi(b_1)\varphi(b_2).\end{aligned}$$