

**Stochastische Analysis**  
**für**  
**Zufallsmatrizen**

Roland Speicher  
Queen's University  
Kingston, Kanada

## Was ist eine Zufallsmatrix?

Zufallsmatrix = Matrix mit zufälligen Einträgen

$$A : \Omega \rightarrow M_N(\mathbb{C})$$

## Was ist eine Zufallsmatrix?

Zufallsmatrix = Matrix mit zufälligen Einträgen

$$A : \Omega \rightarrow M_N(\mathbb{C})$$

d.h.

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$$

mit Zufallsvariablen

$$a_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad (1 \leq i, j \leq N)$$

als Einträgen

# Was will man über Zufallsmatrizen wissen?

Verhalten der Eigenwerte, insbesondere

- lokale Eigenschaften, z.B. Statistik des Abstandes benachbarter Eigenwerte oder des größten Eigenwertes
- globale Eigenschaften, z.B. Eigenwertverteilung oder globale Fluktuationen

# Was will man über Zufallsmatrizen wissen?

Verhalten der Eigenwerte, insbesondere

- lokale Eigenschaften, z.B. Statistik des Abstandes benachbarter Eigenwerte oder des größten Eigenwertes
- globale Eigenschaften, z.B. Eigenwertverteilung oder globale Fluktuationen

Insbesondere Grenzwert

$$N \rightarrow \infty$$

liefert interessante Struktur

## Gaußsche Zufallsmatrizen

$$A_N = (a_{ij})_{i,j=1}^N : \Omega \rightarrow M_N(\mathbb{C})$$

wobei

# Gaußsche Zufallsmatrizen

$$A_N = (a_{ij})_{i,j=1}^N : \Omega \rightarrow M_N(\mathbb{C})$$

wobei

- $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$  (d.h.  $A_N = A_N^*$ )

## Gaußsche Zufallsmatrizen

$$A_N = (a_{ij})_{i,j=1}^N : \Omega \rightarrow M_N(\mathbb{C})$$

wobei

- $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$  (d.h.  $A_N = A_N^*$ )
- $\{a_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq N}$  sind unabhängige Gauß-verteilte Zufallsvariable mit

$$\begin{aligned} E[a_{ij}] &= 0 \\ E[|a_{ij}|^2] &= \frac{1}{N} \end{aligned}$$



## Gaußsche Zufallsmatrizen

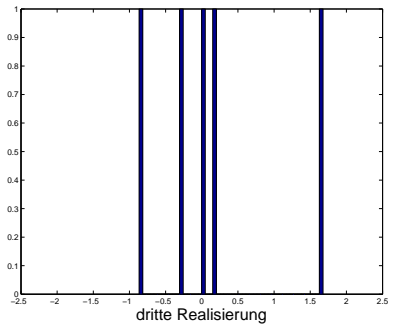
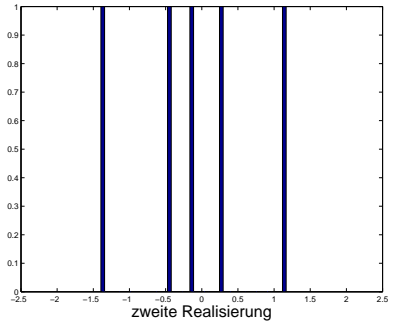
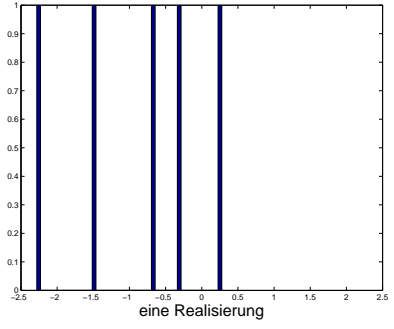
$$A_N = (a_{ij})_{i,j=1}^N : \Omega \rightarrow M_N(\mathbb{C})$$

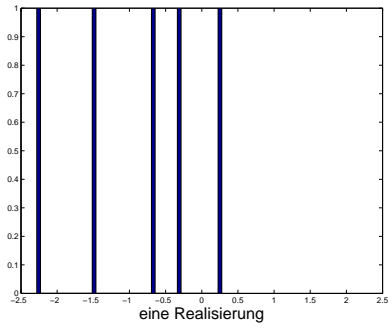
wobei

die gemeinsame Verteilung der Einträge  $a_{ij}$  gegeben ist durch

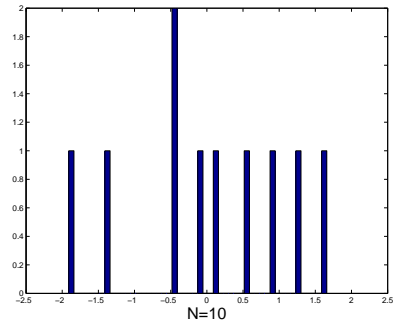
$$\frac{1}{Z_N} e^{-N \operatorname{Tr}(A_N^2)} dA_N$$

$$dA_N = \prod_{i \geq j} d\Re a_{ij} \prod_{k > l} d\Im a_{kl}$$

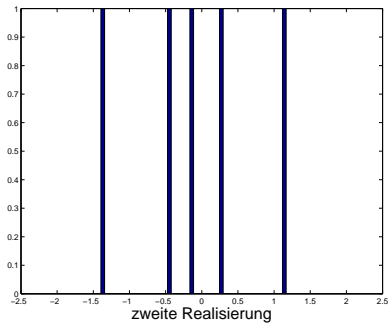




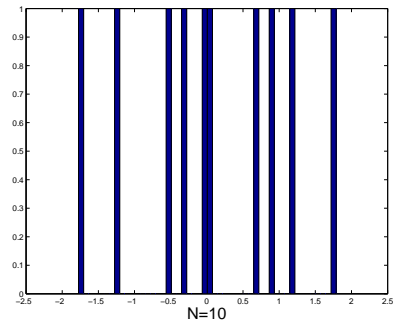
eine Realisierung



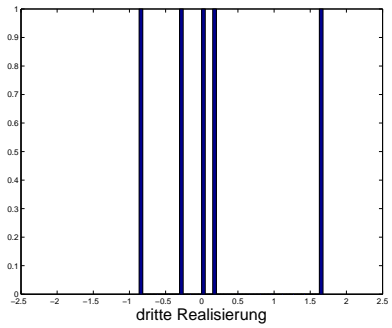
N=10



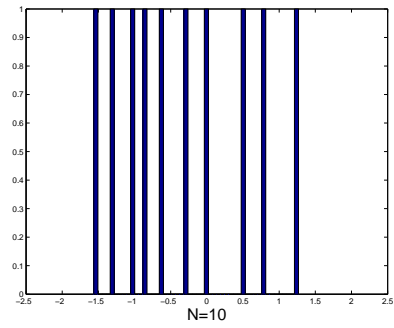
zweite Realisierung



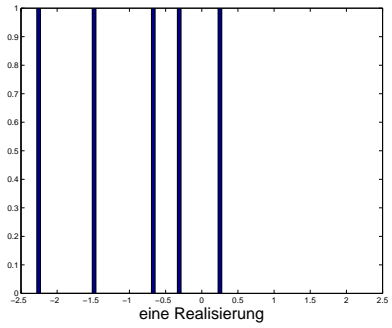
N=10



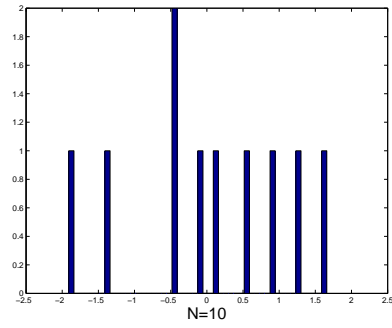
dritte Realisierung



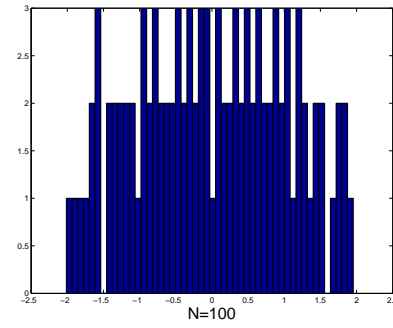
N=10



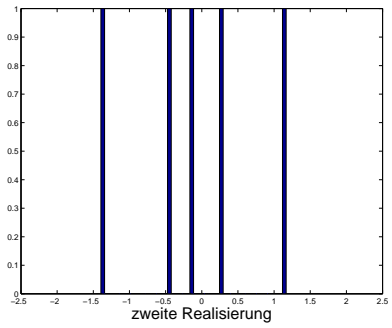
eine Realisierung



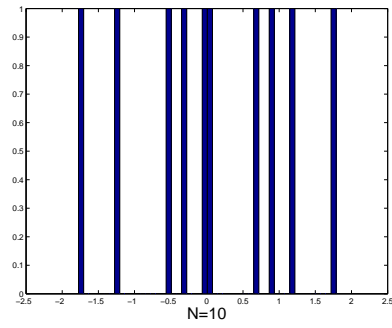
N=10



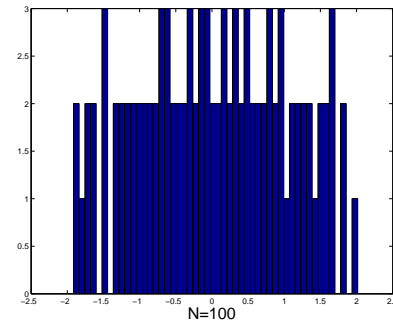
N=100



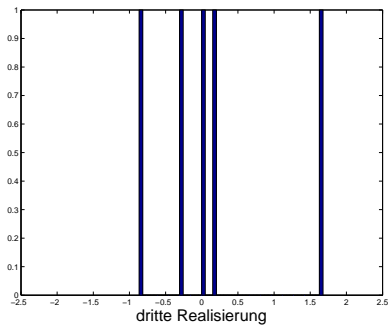
zweite Realisierung



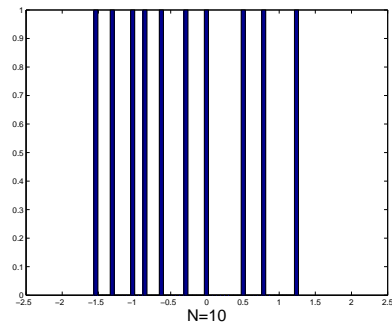
N=10



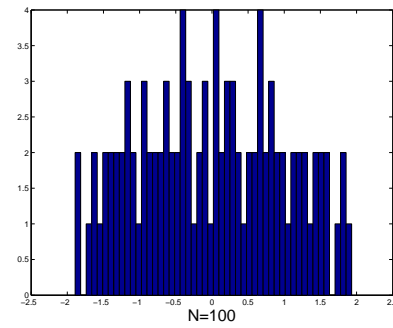
N=100



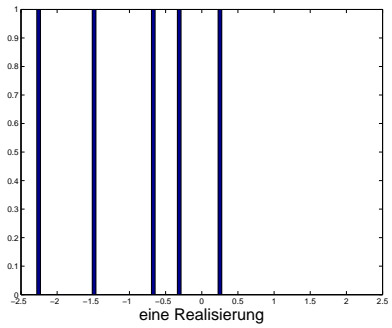
dritte Realisierung



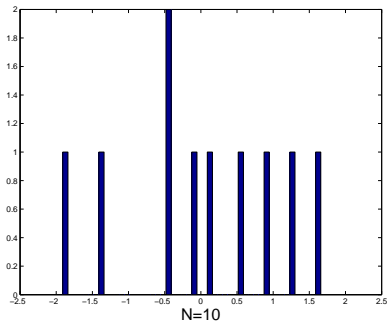
N=10



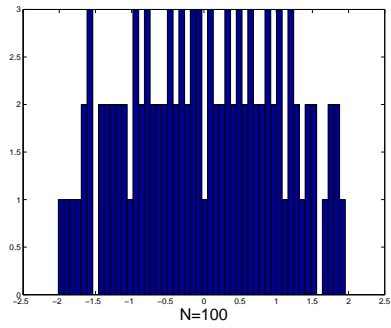
N=100



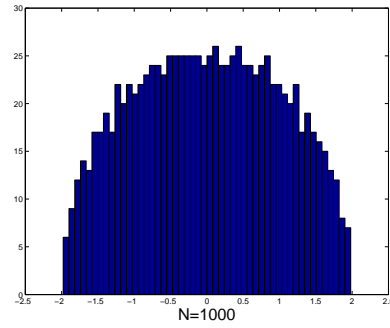
eine Realisierung



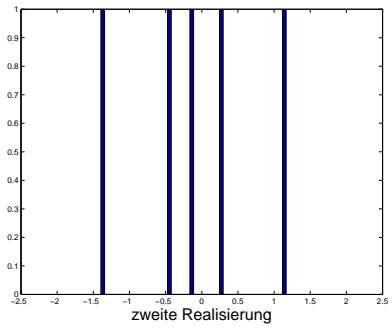
N=10



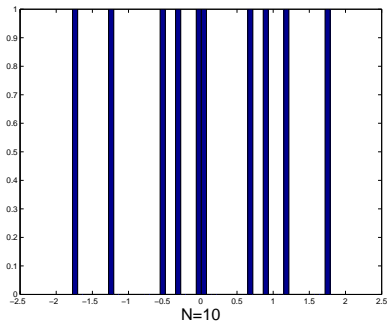
N=100



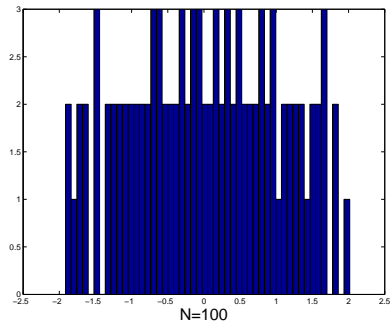
N=1000



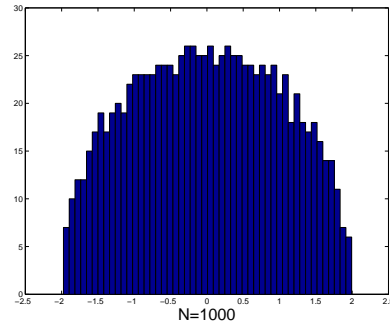
zweite Realisierung



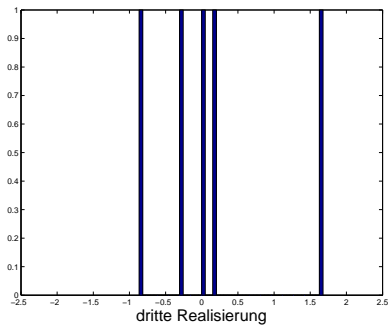
N=10



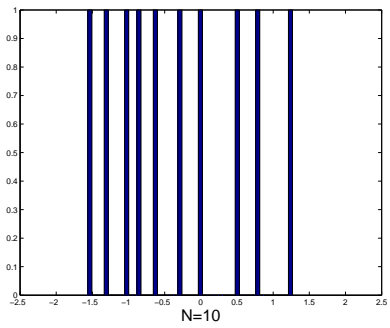
N=100



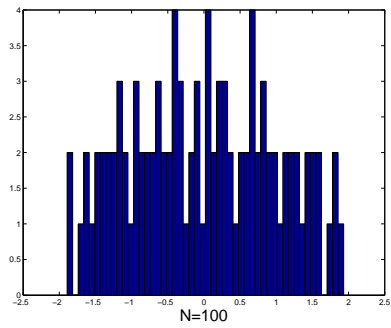
N=1000



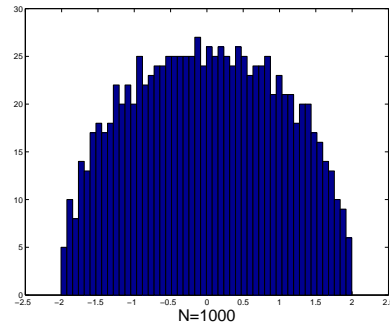
dritte Realisierung



N=10



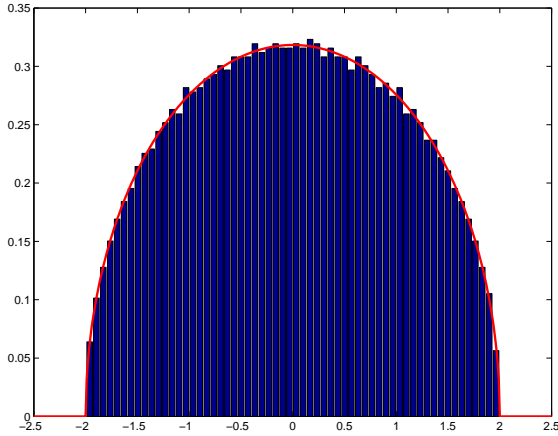
N=100



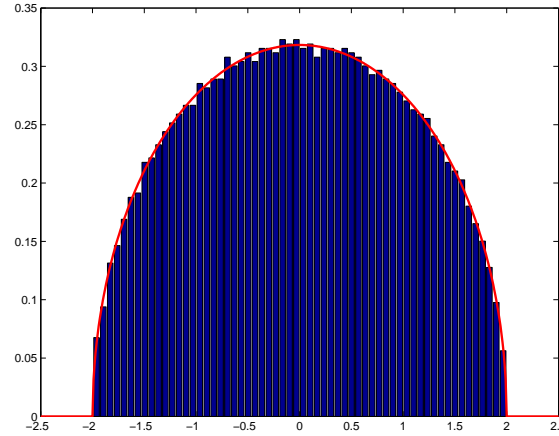
N=1000

# Wignersches Halbkreisgesetz

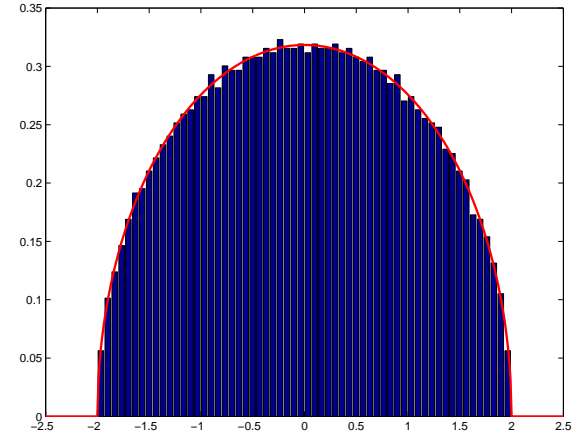
$$N = 4000$$



... one realization ...



... another realization ...



... yet another one ...

**Wignersches Halbkreisgesetz:** Seien  $\lambda_1(\omega), \dots, \lambda_N(\omega)$  die Eigenwerte der Gaußschen Zufallsmatrix  $A_N(\omega)$  (gezählt mit Vielfachheit) und sei

$$\mu_N(\omega) := \frac{1}{N}(\delta_{\lambda_1(\omega)} + \dots + \delta_{\lambda_N(\omega)})$$

die Eigenwertverteilung von  $A_N(\omega)$ .

Dann gilt fast sicher

$$\mu_N \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - t^2} dt \quad \text{für } N \rightarrow \infty$$

Beachte: die Eigenwerte von  $A_N$  sind **nicht unabhängig**;

sondern die gemeinsame Eigenwertverteilung von  $A_N$  ist gegeben durch Dichte

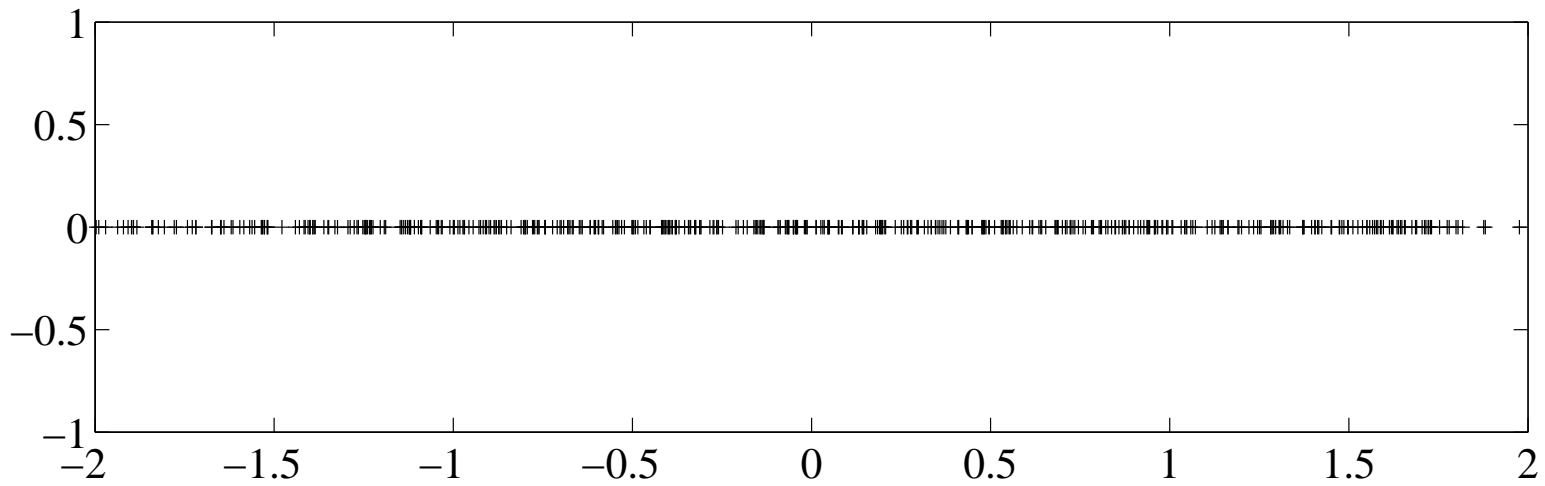
$$\frac{1}{Z_N} e^{-N(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_N^2)} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\lambda_1 \cdots d\lambda_N,$$

Eigenwerte wechselwirken wie

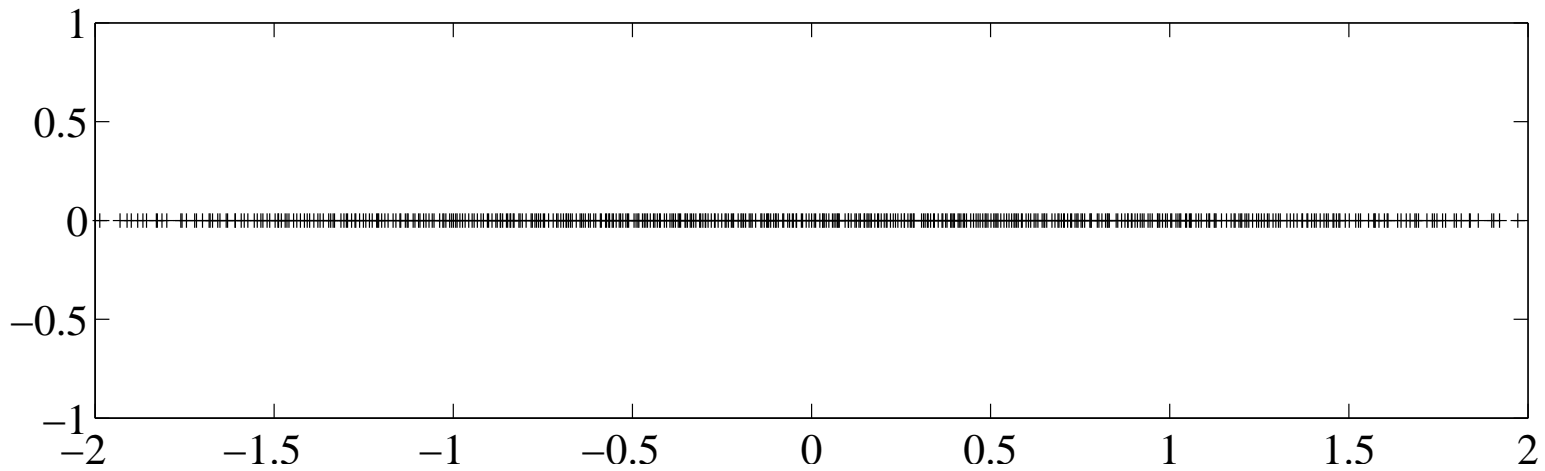
## **2-dimensionales Coulomb-Gas-System**



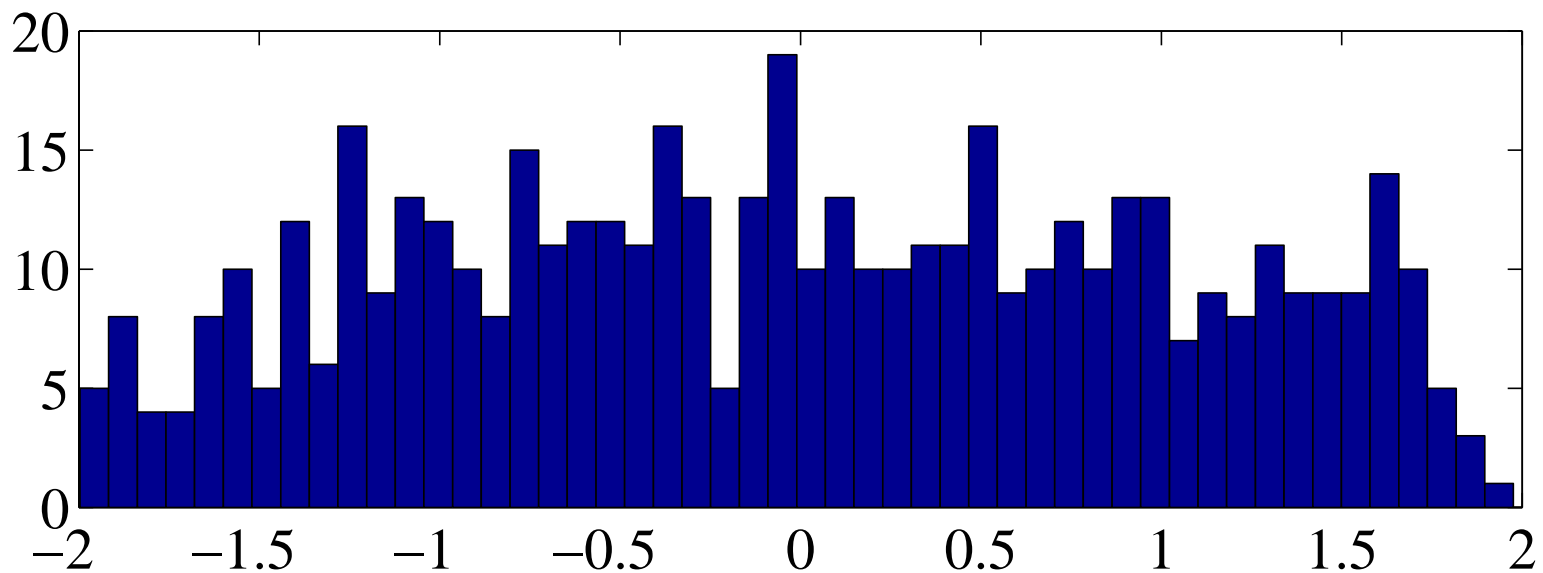
500 independent eigenvalues with semicircular distribution



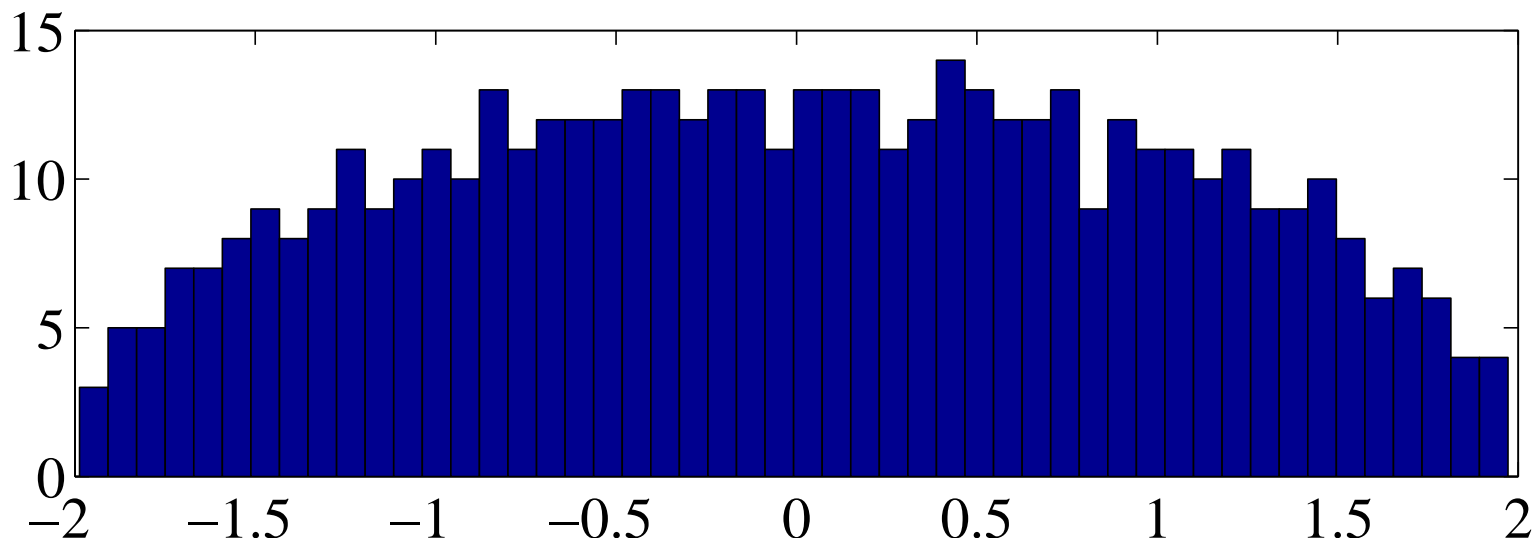
eigenvalues of a 500 x 500 Gaussian random matrix



500 independent eigenvalues with semicircular distribution



eigenvalues of a 500 x 500 Gaussian random matrix



## Fragestellungen

- direkte 'stochastische' Beschreibung des Grenzwertes  $N = \infty$ 
  - insbesondere Existenz und Eigenschaften des Limes  $N \rightarrow \infty$  von Multi-Matrix-Modellen der Form

$$\frac{1}{Z_N} e^{-N \text{Tr}(P(A_1, \dots, A_m))} dA_1 \cdots dA_m$$

- Art der Konvergenz
  - Fluktuationen
  - große Abweichungen

## Dynamische Beschreibung: Dyson Modell

unabhängige Gaußvariable  $\rightarrow$  unabhängige Brownsche Bewegungen

$$A_N(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^N$$

wobei

- $a_{ij}(t) = \bar{a}_{ji}(t)$
- $\{a_{ij}(\cdot)\}_{1 \leq i \leq j \leq N}$  sind unabhängige Brownsche Bewegungen

Übergang zu Prozessen erlaubt

- Realisierung von Verteilungen als Gleichgewichtsverteilungen eines Prozesses
- Beschreibung infinitesimaler Änderungen
- Benutzung von stochastischem Kalkül

## Beschreibung des Grenzwertes $N = \infty$ von $A_N(t)$

- als Limes  $N \rightarrow \infty$  von  $N$  diffundierenden wechselwirkenden Eigenwerten

$$d\lambda_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} dB_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} dt$$

## Beschreibung des Grenzwertes $N = \infty$ von $A_N(t)$

- als Limes  $N \rightarrow \infty$  von  $N$  diffundierenden wechselwirkenden Eigenwerten

$$d\lambda_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}dB_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} dt$$

- als McKean-Vlasov-Gleichung für die Dynamik der Eigenwertdichte  $\mu_t$  von  $A_N(t)$  für  $N = \infty$

## Beschreibung des Grenzwertes $N = \infty$ von $A_N(t)$

- als Limes  $N \rightarrow \infty$  von  $N$  diffundierenden wechselwirkenden Eigenwerten

$$d\lambda_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} dB_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} dt$$

- als McKean-Vlasov-Gleichung für die Dynamik der Eigenwertdichte  $\mu_t$  von  $A_N(t)$  für  $N = \infty$

$$\int f(\lambda) \mu_t(d\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i(t))$$



## Beschreibung des Grenzwertes $N = \infty$ von $A_N(t)$

- als Limes  $N \rightarrow \infty$  von  $N$  diffundierenden wechselwirkenden Eigenwerten

$$d\lambda_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} dB_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} dt$$

- als **McKean-Vlasov-Gleichung** für die Dynamik der Eigenwertdichte  $\mu_t$  von  $A_N(t)$  für  $N = \infty$

$$\frac{d}{dt} \int f(\lambda) \mu_t(d\lambda) = \iint \frac{\mu_t(dy)}{\lambda - y} f'(\lambda) \mu_t(d\lambda)$$

Vollständige stochastische Beschreibung des Prozesses  $A_N(t)$  im Limes  $N \rightarrow \infty$  erfordert nicht nur Kenntnis von Marginalverteilungen  $\mu_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Vert}(A(t))$ , sondern auch

**gemeinsame Verteilung zu verschiedenen Zeiten.**

Vollständige stochastische Beschreibung des Prozesses  $A_N(t)$  im Limes  $N \rightarrow \infty$  erfordert nicht nur Kenntnis von Marginalverteilungen  $\mu_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Vert}(A(t))$ , sondern auch

**gemeinsame Verteilung zu verschiedenen Zeiten.**

Aber:  $A_N(t)A_N(s) \neq A_N(s)A_N(t)$ ,

d.h. gemeinsame Eigenwertverteilung von  $A_N(t)$  und  $A_N(s)$  macht keinen Sinn.

Vollständige stochastische Beschreibung des Prozesses  $A_N(t)$  im Limes  $N \rightarrow \infty$  erfordert nicht nur Kenntnis von Marginalverteilungen  $\mu_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Vert}(A(t))$ , sondern auch

### **gemeinsame Verteilung zu verschiedenen Zeiten.**

Aber:  $A_N(t)A_N(s) \neq A_N(s)A_N(t)$ ,

d.h. gemeinsame Eigenwertverteilung von  $A_N(t)$  und  $A_N(s)$  macht keinen Sinn.

Es gilt:

$$\int \lambda^m \mu_t(d\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i(t)^m = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Tr}(A_N(t)^m)$$

Vollständige stochastische Beschreibung des Prozesses  $A_N(t)$  im Limes  $N \rightarrow \infty$  erfordert nicht nur Kenntnis von Marginalverteilungen  $\mu_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Vert}(A(t))$ , sondern auch

**gemeinsame Verteilung zu verschiedenen Zeiten.**

Aber:  $A_N(t)A_N(s) \neq A_N(s)A_N(t)$ ,

d.h. gemeinsame Eigenwertverteilung von  $A_N(t)$  und  $A_N(s)$  macht keinen Sinn.

Allgemeiner betrachte

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Tr} \left( A_N(t_1) \cdots A_N(t_m) \right) \quad \forall t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}_+$$

Die **freie Brownsche Bewegung**  $\{S(t) \mid t \geq 0\}$  ist definiert als der Grenzwert von den  $N \times N$ -matrixwertigen Brownschen Bewegungen  $\{A_N(t) \mid t \geq 0\}$  durch

- nicht-kommutierende Variable  $S(t)$  ( $t \geq 0$ )
- Zustand  $E$  auf der von den  $S(t)$  erzeugten Algebra, definiert durch

$$E[S(t_1) \cdots S(t_m)] := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Tr}(A_N(t_1) \cdots A_N(t_m))$$

Die freie Brownsche Bewegung kann beschrieben werden

- abstrakt als GNS Konstruktion bzgl.  $E$
- konkret durch Operatoren auf Fockräumen

## Realisierung auf Fockraum

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+), \quad \mathcal{F}(\mathcal{H}) = \Omega\mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}$$

Für  $g \in \mathcal{H}$  haben wir zugehörigen Erzeugungsoperator  $l^*(g)$ :

$$\begin{aligned} l^*(g)\Omega &= g \\ l^*(g)h_1 \otimes \cdots \otimes h_n &= g \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_n \end{aligned}$$

Dann realisiert

$$S(t) = l^*(1_{[0,t]}) + l(1_{[0,t]})$$

und

$$E[a] = \langle \Omega, a\Omega \rangle$$

die freie Brownsche Bewegung.



Auf der von  $S(t)$  ( $t \geq 0$ ) erzeugten Algebra haben wir die  $L^p$ -Normen bzgl.  $E$ , insbesondere

- $L^2$ -norm

$$\|a\|_2 := E[aa^*]^{1/2}$$

- $L^\infty$ -Norm = Operatornorm

$$\|a\|_\infty = \|a\| = \lim_{p \rightarrow \infty} E[(aa^*)^p]^{1/2p}$$

Beachte: Verteilung von  $S(t)$  ist Halbkreis mit Radius  $2\sqrt{t}$ , d.h.

$$\|S(t)\| = 2\sqrt{t}$$

## Ito-Kalkül für freie Brownsche Bewegung

Prozess  $\{A(t) \mid t \geq 0\}$  heißt **adaptiert**, falls  $A(t)$  nur von  $S(\tau)$  ( $\tau \leq t$ ) abhängt.

Für adaptierte Prozesse  $\{A(t) \mid t \geq 0\}$  und  $\{B(t) \mid t \geq 0\}$  definiere **stochastisches Integral**

$$\int A(t)dS(t)B(t)$$

[ Definition für stückweise konstante Prozesse:

$$\int A(t)dS(t)B(t) := \sum_i A(t_i) \left( S(t_{i+1}) - S(t_i) \right) B(t_i) ]$$

**Theorem [Biane, Speicher]:** Es gilt

- Ito Isometrie

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|_2^2 = \int \|A(t)\|_2^2 \cdot \|B(t)\|_2^2 dt$$

**Theorem [Biane, Speicher]:** Es gilt

- Ito Isometrie

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|_2^2 = \int \|A(t)\|_2^2 \cdot \|B(t)\|_2^2 dt$$

- Burkholder-Gundy-Ungleichung

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|^2 \leq 2\sqrt{2} \int \|A(t)\|^2 \cdot \|B(t)\|^2 dt$$

**Theorem [Biane, Speicher]:** Es gilt

- Ito Isometrie

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|_2^2 = \int \|A(t)\|_2^2 \cdot \|B(t)\|_2^2 dt$$

- Burkholder-Gundy-Ungleichung

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|^2 \leq 2\sqrt{2} \int \|A(t)\|^2 \cdot \|B(t)\|^2 dt$$

- Ito-Formel

$$dS(t)dS(t) = dt$$

**Theorem [Biane, Speicher]:** Es gilt

- Ito Isometrie

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|_2^2 = \int \|A(t)\|_2^2 \cdot \|B(t)\|_2^2 dt$$

- Burkholder-Gundy-Ungleichung

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|^2 \leq 2\sqrt{2} \int \|A(t)\|^2 \cdot \|B(t)\|^2 dt$$

- Ito-Formel

$$dS(t) A dS(t) = ??$$

**Theorem [Biane, Speicher]:** Es gilt

- Ito Isometrie

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|_2^2 = \int \|A(t)\|_2^2 \cdot \|B(t)\|_2^2 dt$$

- Burkholder-Gundy-Ungleichung

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|^2 \leq 2\sqrt{2} \int \|A(t)\|^2 \cdot \|B(t)\|^2 dt$$

- Ito-Formel

$$dS(t) A dS(t) = E[A] dt$$

**Theorem [Biane, Speicher]:** Es gilt

- Ito Isometrie

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|_2^2 = \int \|A(t)\|_2^2 \cdot \|B(t)\|_2^2 dt$$

- Burkholder-Gundy-Ungleichung

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|^2 \leq 2\sqrt{2} \int \|A(t)\|^2 \cdot \|B(t)\|^2 dt$$

- Ito-Formel

$$dS(t) A dS(t) = E[A] dt$$

- Chaos-Zerlegung, Skorohod-Integral, ...



**Theorem [Biane, Speicher]:** Es gilt

- Ito Isometrie

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|_2^2 = \int \|A(t)\|_2^2 \cdot \|B(t)\|_2^2 dt$$

- Burkholder-Gundy-Ungleichung

$$\left\| \int A(t) dS(t) B(t) \right\|^2 \leq 2\sqrt{2} \int \|A(t)\|^2 \cdot \|B(t)\|^2 dt$$

- Ito-Formel

$$dS(t) A dS(t) = E[A] dt$$

- stochastische Analysis auf 'Wignerraum'

## Anwendungen des freien stochastischen Kalküls

- freie Diffusionsgleichungen (Biane, Speicher 2001)
- Existenz des Grenzwertes von Multi-Matrix-Modellen der Form

$$\frac{1}{Z_N} e^{-N \text{Tr}(P(A_1, \dots, A_m))} dA_1 \cdots dA_m$$

und Zusammenhang mit diagrammatischen Entwicklungen für 'konvexe' Potentiale (Guionnet, Shlyakhtenko 2007)

**Theorem [Biane, Speicher]:** Sei  $V'$  eine Operator Lipschitz Funktion. Betrachte die freie stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = -\frac{1}{2}V'(X_t)dt + dS_t$$

Dann gilt

- Existenz, Eindeutigkeit der Lösung; Stetigkeit von  $t \mapsto \|X_t\|$
- $d\mu_t(x) = p_t dx$ , wobei  $p_t$  beschränkt und  $p_t \in L^3(\mathbb{R})$
- **freie Fokker-Planck-Gleichung:** [ $H$  Hilbert-Transformierte]

$$\frac{\partial p_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ (Hp_t(x) - \frac{1}{2}V'(x))p_t(x) \right],$$

- Definiere **relative freie Entropie**

$$\Sigma(\mu) := \iint_{\mathbb{R}^2} \log |x - y| d\mu(x) d\mu(y) - \int_{\mathbb{R}} V(x) d\mu(x)$$

und **relative freie Fisher Information**

$$I(\mu) = 4 \int_{\mathbb{R}} \left( H p(x) - \frac{1}{2} V'(x) \right)^2 p(x) dx.$$

Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \Sigma(\mu_t) = \frac{1}{2} I(\mu_t).$$

- Für **freien Ornstein Uhlenbeck Prozess** ( $V(x) = \lambda x^2$ ) haben wir **freie log Sobolev Ungleichung**

$$\frac{1}{4\lambda} I(\mu) \geq \Sigma(\mu_\infty) - \Sigma(\mu)$$

## Globale Fluktuationen der Eigenwerte

Sei  $A_N$  Gaußsche Zufallsmatrix.

Wignersches Halbkreisgesetz sagt

$$\frac{1}{N} \operatorname{Tr}(A_N^k) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 t^k \sqrt{4-t^2} dt,$$

also z.B.

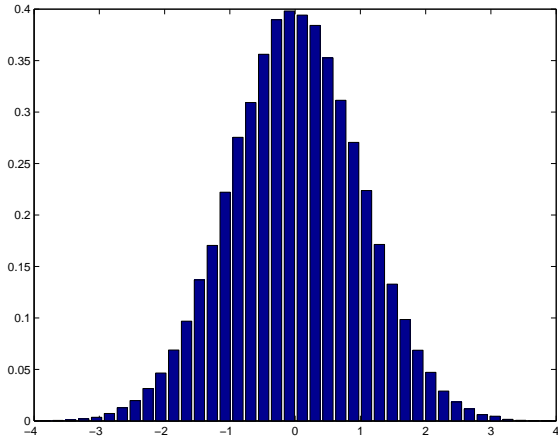
$$\frac{1}{N} \operatorname{Tr}(A_N) \rightarrow 0 \quad \frac{1}{N} \operatorname{Tr}(A_N^2) \rightarrow 1 \quad \frac{1}{N} \operatorname{Tr}(A_N^4) \rightarrow 2$$

Skalierte Fluktuationen um diesen Grenzwert

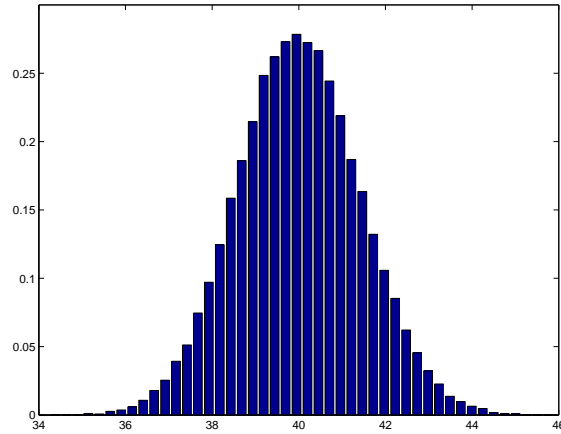
$$\text{Tr}(A_N^k) - N \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 t^k \sqrt{4 - t^2} dt$$

sind, für  $N \rightarrow \infty$ , Gauß-verteilt mit berechenbarer Varianz

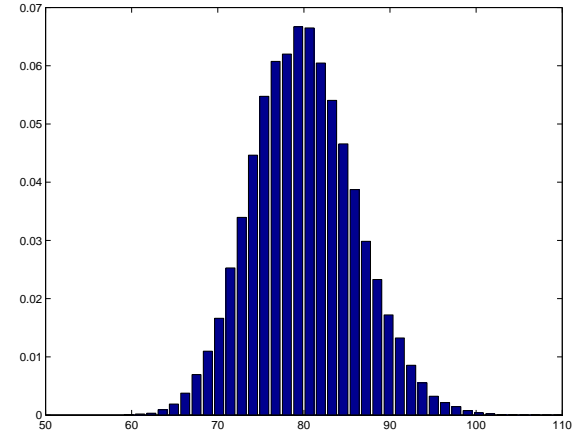
Example: Gaussian random matrix  $A$  ( $N = 40$ , trials=50.000)



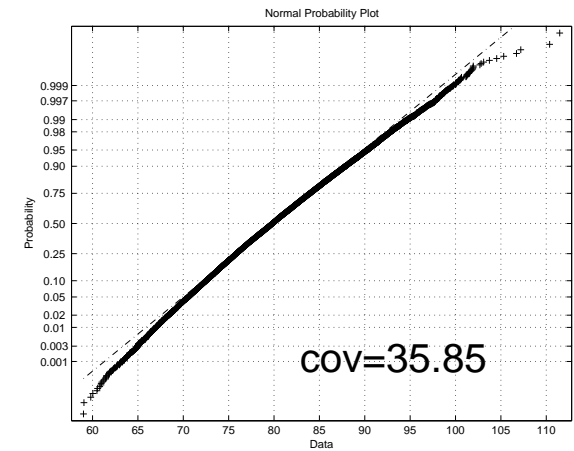
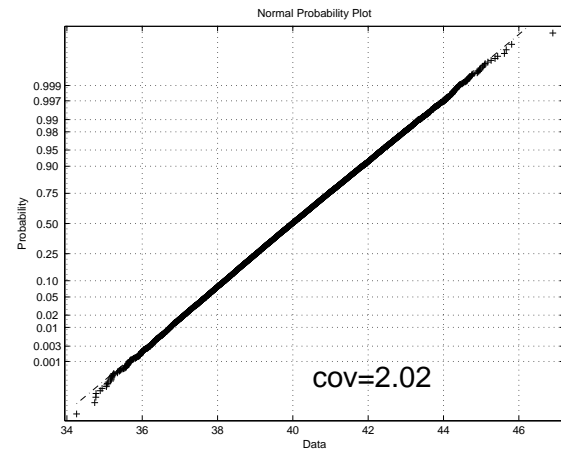
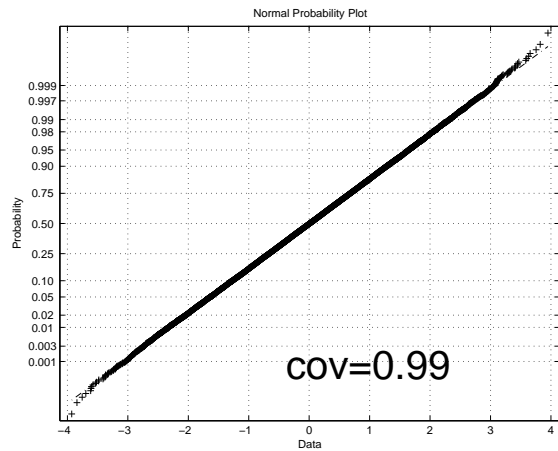
$$\text{Var}(\text{Tr}(A)) = 1$$



$$\text{Var}(\text{Tr}(A^2)) = 2$$



$$\text{Var}(\text{Tr}(A^4)) = 36$$



**Problem:** Betrachte andere Zufallsmatrizenmodelle, insbesondere Multi-Matrix-Modelle. Zeige, dass auch dort Fluktuationen von Spuren normalverteilt sind und beschreibe ihre Varianz!

### Ergebnisse:

- Gaußsche Zufallsmatrizen  
(Johansson 1998; Cabanal-Duvillard 2001)
- Wishart Zufallsmatrizen  
(Jonsson 1982; Kusalik, Mingo, Speicher 2006)
- unitäre Zufallsmatrizen  
(Diaconis, Shahshahani 1994; Mingo, Sniady, Speicher 2006, Radulescu 2006)



**Theorem [Mingo, Sniady, Speicher]:** Betrachte unabhängige Folgen  $\{U_1\}_N, \dots, \{U_r\}_N$  von Haar verteilten unitären  $N \times N$ -Zufallsmatrizen. Dann konvergiert die Familie

$$\text{Tr}[U_{i(1)}^{k(1)} \cdots U_{i(n)}^{k(n)}]$$

von Spuren in zyklisch reduzierten Wörtern in diesen Zufallsmatrizen gegen eine Gaußsche Familie von zentrierten Zufallsvariablen, wobei die Kovarianz gegeben ist durch die zyklischen Matchings zwischen den zwei reduzierten Wörtern

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov} \left\{ \text{Tr}[U_{i(1)}^{k(1)} \cdots U_{i(m)}^{k(m)}], \text{Tr}[U_{j(n)}^{l(n)} \cdots U_{j(1)}^{l(1)}] \right\}$$

$$= \delta_{mn} \cdot \# \left\{ r \in \{1, \dots, n\} \mid \begin{aligned} i(s) &= j(s+r), \\ k(s) &= -l(s+r) \quad \forall s = 1, \dots, n \end{aligned} \right\}$$