Faszination Mathematik: von-Neumann-Algebren und Zufallsmatrizen

Roland Speicher

Universität des Saarlandes
Saarbrücken, Germany

Section 1

Faszination Mathematik

Worum geht es in der Mathematik

"Was macht eigentlich so ein Mathematiker? Ist nicht alles schon bekannt, wurden nicht alle Zahlen schon miteinander multipliziert und alle Integrale berechnet?"

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$
$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$
$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$
$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$
$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$
$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

$$1 \times 9 + 2 = 11$$
$$12 \times 9 + 3 = 111$$
$$123 \times 9 + 4 = 1111$$
$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$
$$12345 \times 9 + 6 = 111111$$
$$123456 \times 9 + 7 = 1111111$$
$$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$$
$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$
$$123456789 \times 9 + 10 = 1111111111$$

Worum geht es in der Mathematik

"Was macht eigentlich so ein Mathematiker? Ist nicht alles schon bekannt, wurden nicht alle Zahlen schon miteinander multipliziert und alle Integrale berechnet?"

In der Mathematik geht es nicht wirklich um Zahlen und Integrale, sondern um

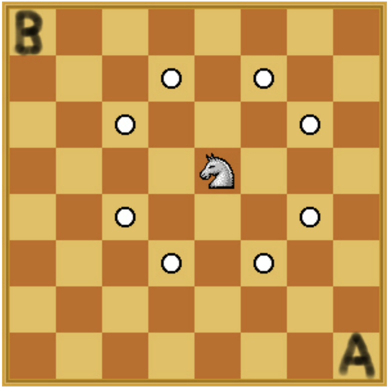
$$
\begin{aligned}
1 \times 8 + 1 &= 9 \\
12 \times 8 + 2 &= 98 \\
123 \times 8 + 3 &= 987 \\
1234 \times 8 + 4 &= 9876 \\
12345 \times 8 + 5 &= 98765 \\
123456 \times 8 + 6 &= 987654 \\
1234567 \times 8 + 7 &= 9876543 \\
12345678 \times 8 + 8 &= 98765432 \\
123456789 \times 8 + 9 &= 987654321
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 \times 9 + 2 &= 11 \\
12 \times 9 + 3 &= 111 \\
123 \times 9 + 4 &= 1111 \\
1234 \times 9 + 5 &= 11111 \\
12345 \times 9 + 6 &= 111111 \\
123456 \times 9 + 7 &= 1111111 \\
1234567 \times 9 + 8 &= 11111111 \\
12345678 \times 9 + 9 &= 111111111 \\
123456789 \times 9 + 10 &= 1111111111
\end{aligned}
$$

Struktur, Muster und Schönheit.

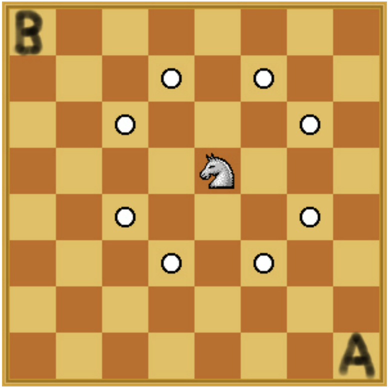
Wie hilft das Erkennen von Mustern

Gibt es eine Springertour, die in A startet, jedes Feld genau einmal besucht und in B endet?



Wie hilft das Erkennen von Mustern

Gibt es eine Springertour, die in A startet, jedes Feld genau einmal besucht und in B endet?



Antwort: Nein, weil wir in jedem Zug die Farbe wechseln und wir insgesamt 63, also eine ungerade Anzahl von Zügen machen.

Eine unserer Lieblingsfragen:

Das ist der "Nicht-Knoten":

Eine unserer Lieblingsfragen:

Das ist der "Nicht-Knoten":

Und was ist mit dem hier ...

Eine unserer Lieblingsfragen: Sind sie gleich?

Das ist der "Nicht-Knoten":

Und was ist mit dem hier ...

Eine unserer Lieblingsfragen: Sind sie gleich?

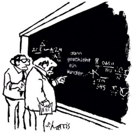
... oder der hier ...

Figure 3.5. Wolfgang Haken's "Gordian knot."

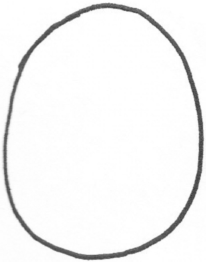
Eine unserer Lieblingsfragen: Sind sie gleich?

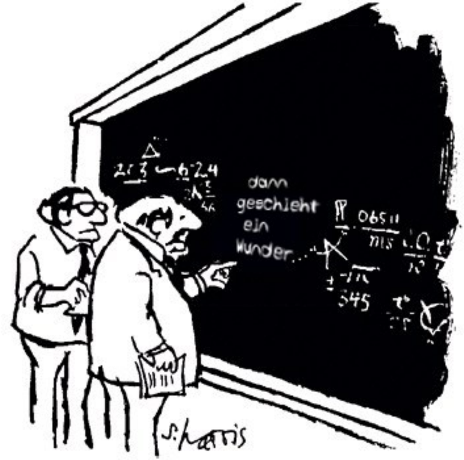
... tatsächlich ...

Figure 3.5. Wolfgang Haken's "Gordian knot."



"Ich denke, an dieser Stelle sollten Sie etwas genauer argumentieren."





"Ich denke, an dieser Stelle sollten Sie etwas genauer argumentieren."

Sind die zwei Kleeblattschlingen gleich?

Sind die zwei Kleeblattschlingen gleich?

Nein - aber das ist nicht offensichtlich!

Section 2

Unsere Helden

Johann von Neumann
1903 – 1957

Eugene Wigner
1902 – 1995

Vaughan Jones

Dan Voiculescu

Section 3

von-Neumann-Algebren

von-Neumann-Algebren als unendliche Matrizen

von-Neumann-Algebren

- wurden 1929 von Johann von Neumann eingeführt
- sind nicht-triviale Versionen von $\infty \times \infty$ Matrizen
- beschreiben Geometrien mit nicht-ganzzahligen Dimensionen
- dienen zur mathematischen Beschreibung der Quantenmechanik

Was sind von-Neumann-Algebren

- von-Neumann-Algebren sind Algebren von $\infty \times \infty$-Matrizen

Was sind von-Neumann-Algebren

- von-Neumann-Algebren sind Algebren von $\infty \times \infty$-Matrizen
- präziser: von-Neumann-Algebren sind
  - Algebren von beschränkten Operatoren auf Hilberträumen,

Was sind von-Neumann-Algebren

- von-Neumann-Algebren sind Algebren von $\infty \times \infty$-Matrizen
- präziser: von-Neumann-Algebren sind
  - Algebren von beschränkten Operatoren auf Hilberträumen,
  - die unter "punktweiser Konvergenz" von den Operatoren abgeschlossen sind

Was sind von-Neumann-Algebren

- von-Neumann-Algebren sind Algebren von $\infty \times \infty$-Matrizen
- präziser: von-Neumann-Algebren sind
  - Algebren von beschränkten Operatoren auf Hilberträumen,
  - die unter "punktweiser Konvergenz" von den Operatoren abgeschlossen sind

Historie

- 1936-43: grundlegende Arbeiten von Murray und von Neumann

Was sind von-Neumann-Algebren

- von-Neumann-Algebren sind Algebren von $\infty \times \infty$-Matrizen
- präziser: von-Neumann-Algebren sind
  - Algebren von beschränkten Operatoren auf Hilberträumen,
  - die unter "punktweiser Konvergenz" von den Operatoren abgeschlossen sind

Historie

- 1936-43: grundlegende Arbeiten von Murray und von Neumann
- 1976: weitgehende Klassifizierung durch Connes (Fields Medaille 1982)

Was sind von-Neumann-Algebren

- von-Neumann-Algebren sind Algebren von $\infty \times \infty$-Matrizen
- präziser: von-Neumann-Algebren sind
  - Algebren von beschränkten Operatoren auf Hilberträumen,
  - die unter "punktweiser Konvergenz" von den Operatoren abgeschlossen sind

Historie

- 1936-43: grundlegende Arbeiten von Murray und von Neumann
- 1976: weitgehende Klassifizierung durch Connes (Fields Medaille 1982)
- ab 1982: Arbeiten von Jones zu Unterfaktoren und Verbindung zur Knotentheorie (Fields Medaille 1990)

Was sind von-Neumann-Algebren

- von-Neumann-Algebren sind Algebren von $\infty \times \infty$-Matrizen
- präziser: von-Neumann-Algebren sind
  - Algebren von beschränkten Operatoren auf Hilberträumen,
  - die unter "punktweiser Konvergenz" von den Operatoren abgeschlossen sind

Historie

- 1936-43: grundlegende Arbeiten von Murray und von Neumann
- 1976: weitgehende Klassifizierung durch Connes (Fields Medaille 1982)
- ab 1982: Arbeiten von Jones zu Unterfaktoren und Verbindung zur Knotentheorie (Fields Medaille 1990)
- ab 1985: freie Wahrscheinlichkeitstheorie als Hilfsmittel zum Verständnis gewisser Klassen von von-Neumann-Algebren

Was sind von-Neumann-Algebren

- von-Neumann-Algebren sind Algebren von $\infty \times \infty$-Matrizen
- präziser: von-Neumann-Algebren sind
  - Algebren von beschränkten Operatoren auf Hilberträumen,
  - die unter "punktweiser Konvergenz" von den Operatoren abgeschlossen sind

Historie

- 1936-43: grundlegende Arbeiten von Murray und von Neumann
- 1976: weitgehende Klassifizierung durch Connes (Fields Medaille 1982)
- ab 1982: Arbeiten von Jones zu Unterfaktoren und Verbindung zur Knotentheorie (Fields Medaille 1990)
- ab 1985: freie Wahrscheinlichkeitstheorie als Hilfsmittel zum Verständnis gewisser Klassen von von-Neumann-Algebren
- zur Zeit: sehr aktives Gebiet; z.B. Hausdorff-Trimester Programm 2016 über von-Neumann-Algebren in Bonn

Vaughan Jones vergleicht von-Neumann- Algebren mit dem tiefsten Objekt, das er sich vorstellen kann, dem Pazifischen Ozean.

Warum interessieren wir uns dafür?

Vaughan Jones vergleicht von-Neumann- Algebren mit dem tiefsten Objekt, das er sich vorstellen kann, dem Pazifischen Ozean.

Warum interessieren wir uns dafür?

Weil uns ihre Schönheit fasziniert und wir sie verstehen wollen!!!

Typische Fragen über von-Neumann-Algebren

Gleich oder nicht gleich - die Frage nach Isomorphismus

Zwei von-Neumann-Algebren können auf den ersten Blick recht verschieden aussehen, sind aber oft trotzdem gleich – wie können wir das herausfinden?

Beispiel

Typische Fragen über von-Neumann-Algebren

Gleich oder nicht gleich - die Frage nach Isomorphismus

Zwei von-Neumann-Algebren können auf den ersten Blick recht verschieden aussehen, sind aber oft trotzdem gleich – wie können wir das herausfinden?

Beispiel

Hier sind z.B. die 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Typische Fragen über von-Neumann-Algebren

Gleich oder nicht gleich - die Frage nach Isomorphismus

Zwei von-Neumann-Algebren können auf den ersten Blick recht verschieden aussehen, sind aber oft trotzdem gleich – wie können wir das herausfinden?

Beispiel

Hier sind z.B. die 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und hier sind sie nochmal, verkleidet als 4×4-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

Typische Fragen über von-Neumann-Algebren

Gleich oder nicht gleich - die Frage nach Isomorphismus

Zwei von-Neumann-Algebren können auf den ersten Blick recht verschieden aussehen, sind aber oft trotzdem gleich – wie können wir das herausfinden?

Beispiel

Hier sind z.B. die 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und hier sind sie nochmal, verkleidet als 4×4-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

Diese sind natürlich isomorph!

Typische Fragen über von-Neumann-Algebren

Gleich oder nicht gleich - die Frage nach Isomorphismus

Zwei von-Neumann-Algebren können auf den ersten Blick recht verschieden aussehen, sind aber oft trotzdem gleich – wie können wir das herausfinden?

Beispiel

Hier sind zwei "abstrakte" unendlich-dimensionale von-Neumann-Algebren

$$L(\mathbb{F}_2) = \text{vN-Algebra erzeugt von den zwei Generatoren der freien Gruppe } \mathbb{F}_2 \text{ in "regulärer" Darstellung}$$

$$L(\mathbb{F}_3) = \text{vN-Algebra erzeugt von den drei Generatoren der freien Gruppe } \mathbb{F}_3 \text{ in "regulärer" Darstellung}$$

Sind diese gleich?

Typische Fragen über von-Neumann-Algebren

Gleich oder nicht gleich - die Frage nach Isomorphismus

Zwei von-Neumann-Algebren können auf den ersten Blick recht verschieden aussehen, sind aber oft trotzdem gleich – wie können wir das herausfinden?

Beispiel

Hier sind zwei "abstrakte" unendlich-dimensionale von-Neumann-Algebren

$$\begin{aligned} L(\mathbb{F}_2) &= \text{vN-Algebra erzeugt von den zwei Generatoren der} \\ &\quad \text{freien Gruppe } \mathbb{F}_2 \text{ in "regulärer" Darstellung} \\ L(\mathbb{F}_3) &= \text{vN-Algebra erzeugt von den drei Generatoren der} \\ &\quad \text{freien Gruppe } \mathbb{F}_3 \text{ in "regulärer" Darstellung} \end{aligned}$$

Sind diese gleich?

Dies ist eine offene Frage seit den Zeiten von Murray und von Neumann. Voiculescu führte die freie Wahrscheinlichkeitstheorie ein, um diese Frage anzugehen.

Typische Fragen über von-Neumann-Algebren

Aus klein mach groß

Oft sitzen kleine von-Neumann-Algebren in größeren von-Neumann-Algebren – welche Möglichkeiten gibt es dafür?

Beispiel

Typische Fragen über von-Neumann-Algebren

Aus klein mach groß

Oft sitzen kleine von-Neumann-Algebren in größeren von-Neumann-Algebren – welche Möglichkeiten gibt es dafür?

Beispiel

Hier sitzen die (verkleideten) 2×2-Matrizen in den 4×4-Matrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \right\} \subset \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \epsilon & \zeta & \eta & \theta \\ \iota & \kappa & \lambda & \mu \\ \nu & \xi & o & \pi \end{pmatrix} \right\}$$

Typische Fragen über von-Neumann-Algebren

Aus klein mach groß

Oft sitzen kleine von-Neumann-Algebren in größeren von-Neumann-Algebren – welche Möglichkeiten gibt es dafür?

Beispiel

Hier sitzen die (verkleideten) 2×2-Matrizen in den 4×4-Matrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \right\} \subset \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \epsilon & \zeta & \eta & \theta \\ \iota & \kappa & \lambda & \mu \\ \nu & \xi & o & \pi \end{pmatrix} \right\}$$

Die Größe dieser Einbettung kann man beschreiben durch den Index

$$[M_4(\mathbb{C}) : M_2(\mathbb{C})] = \frac{16}{4} = 4$$

Typische Fragen über von-Neumann-Algebren

Aus klein mach groß

Oft sitzen kleine von-Neumann-Algebren in größeren von-Neumann-Algebren – welche Möglichkeiten gibt es dafür?

Beispiel

Für unendlich-dimensionale

$$N \subset M$$

kann man die Größe der Einbettung nicht einfach durch Dimensionsbetrachtungen ermitteln. (Typischerweise ist jetzt N isomorph zu M.)

Typische Fragen über von-Neumann-Algebren

Aus klein mach groß

Oft sitzen kleine von-Neumann-Algebren in größeren von-Neumann-Algebren – welche Möglichkeiten gibt es dafür?

Beispiel

Für unendlich-dimensionale

$$N \subset M$$

kann man die Größe der Einbettung nicht einfach durch Dimensionsbetrachtungen ermitteln. (Typischerweise ist jetzt N isomorph zu M.)
Jones zeigte 1982 das erstaunliche Resultat:

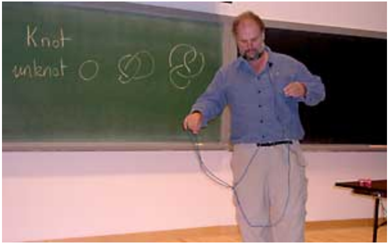
$$[M : N] \in \{4\cos^2(\pi/n) \mid n = 3, 4, 5, \ldots\} \cup [4, \infty].$$

Wie können kleine von-Neumann-Algebren in großen von-Neumann-Algebren sitzen?

Wie können kleine von-Neumann-Algebren in großen von-Neumann-Algebren sitzen?

1984 entdeckte Vaughan Jones, dass

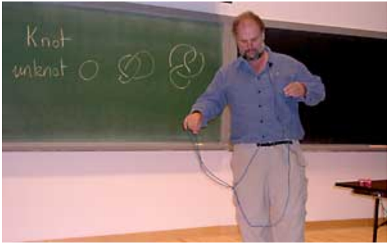
die kleinen in den großen verknotet sind.



Wie können kleine von-Neumann-Algebren in großen von-Neumann-Algebren sitzen?

1984 entdeckte Vaughan Jones, dass

die kleinen in den großen verknotet sind.



und seine Ergebnisse über von-Neumann-Algebren lieferten unerwartete neue Resultate über Knoten: insbesondere das Jones Polynom!

Sind die zwei Kleeblattschlingen gleich?

Sind die zwei Kleeblattschlingen gleich?

Einfach zu entscheiden mit dem Jones Polynom: Nein!

Section 4

Zufallsmatrizen

Was sind Zufallsmatrizen

- Zufallsmatrizen sind “typische” Folgen von $N \times N$-Matrizen, mit wachsender Größe N

Was sind Zufallsmatrizen

- Zufallsmatrizen sind "typische" Folgen von $N \times N$-Matrizen, mit wachsender Größe N

Historie

- 1928: Wishart führt Zufallsmatrizen in Statistik ein, für endliches N

Was sind Zufallsmatrizen

- Zufallsmatrizen sind "typische" Folgen von $N \times N$-Matrizen, mit wachsender Größe N

Historie

- 1928: Wishart führt Zufallsmatrizen in Statistik ein, für endliches N
- 1955: Wigner führt Zufallsmatrizen in der Physik ein zur statistischen Beschreibung von Atomkernen und untersucht $N \to \infty$ Asymptotik der "Wigner-Matrizen"

Was sind Zufallsmatrizen

- Zufallsmatrizen sind “typische” Folgen von $N \times N$-Matrizen, mit wachsender Größe N

Historie

- 1928: Wishart führt Zufallsmatrizen in Statistik ein, für endliches N
- 1955: Wigner führt Zufallsmatrizen in der Physik ein zur statistischen Beschreibung von Atomkernen und untersucht $N \to \infty$ Asymptotik der “Wigner-Matrizen”
- 1967: Marchenko und Pastur untersuchen $N \to \infty$ Asymptotik der “Wishart-Matrizen”

Was sind Zufallsmatrizen

- Zufallsmatrizen sind “typische” Folgen von $N \times N$-Matrizen, mit wachsender Größe N

Historie

- 1928: Wishart führt Zufallsmatrizen in Statistik ein, für endliches N
- 1955: Wigner führt Zufallsmatrizen in der Physik ein zur statistischen Beschreibung von Atomkernen und untersucht $N \to \infty$ Asymptotik der “Wigner-Matrizen”
- 1967: Marchenko und Pastur untersuchen $N \to \infty$ Asymptotik der “Wishart-Matrizen”
- 1972: Montgomery und Dyson stellen Zusammenhang zwischen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion und Eigenwerten von Zufallsmatrizen her

Was sind Zufallsmatrizen

- Zufallsmatrizen sind "typische" Folgen von $N \times N$-Matrizen, mit wachsender Größe N

Historie

- 1928: Wishart führt Zufallsmatrizen in Statistik ein, für endliches N
- 1955: Wigner führt Zufallsmatrizen in der Physik ein zur statistischen Beschreibung von Atomkernen und untersucht $N \to \infty$ Asymptotik der "Wigner-Matrizen"
- 1967: Marchenko und Pastur untersuchen $N \to \infty$ Asymptotik der "Wishart-Matrizen"
- 1972: Montgomery und Dyson stellen Zusammenhang zwischen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion und Eigenwerten von Zufallsmatrizen her
- ab 2000: Zufallsmatrizentheorie entwickelt sich in der Mathematik zu einem zentralen Gebiet, mit vielen verschiedenen Anknüpfpunkten

Oberwolfach-Tagung “Random Matrices” 2000

Was sind Zufallsmatrizen

- Zufallsmatrizen sind "typische" Folgen von $N \times N$-Matrizen $(X_N)_N$, mit wachsender Größe N
- genauer: Zufallsmatrizen sind Folgen von $N \times N$-Matrizen, deren Einträge zufällig gewählt werden (gemäß vorgegebener Verteilung)

Was sind Zufallsmatrizen

- Zufallsmatrizen sind "typische" Folgen von $N \times N$-Matrizen $(X_N)_N$, mit wachsender Größe N
- genauer: Zufallsmatrizen sind Folgen von $N \times N$-Matrizen, deren Einträge zufällig gewählt werden (gemäß vorgegebener Verteilung)

Fundamentale Beobachtung

Viele Zufallsatrizen zeigen für $N \to \infty$ ein *deterministisches* (und interessantes) Verhalten

Konzentrationsphänomene

Eine Funktion, die von vielen unabhängigen Variablen abhängt, so dass keine Variable dominanten Einfluss hat, ist fast konstant.

Konzentrationsphänomene

Eine Funktion, die von vielen unabhängigen Variablen abhängt, so dass keine Variable dominanten Einfluss hat, ist fast konstant.

Zufälliges Verhalten kann deterministische (d.h. nicht zufällige) Effekte zeigen

Konzentrationsphänomene

Eine Funktion, die von vielen unabhängigen Variablen abhängt, so dass keine Variable dominanten Einfluss hat, ist fast konstant.

Zufälliges Verhalten kann deterministische (d.h. nicht zufällige) Effekte zeigen

Beispiele

- Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \approx E[x_1]$$

Konzentrationsphänomene

Eine Funktion, die von vielen unabhängigen Variablen abhängt, so dass keine Variable dominanten Einfluss hat, ist fast konstant.

Zufälliges Verhalten kann deterministische (d.h. nicht zufällige) Effekte zeigen

Beispiele

- Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \approx E[x_1]$$

- große Zufallsmatrizen haben typischerweise deterministische Eigenwerte

Wignersche Zufallsmatrizen (Wigner 1955)

Definition

Eine **Wignersche Zufallsmatrix** $X_N = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(x_{ij}\right)_{i,j=1}^{N}$

- ist symmetrisch: $X_N^* = X_N$, d.h. $x_{ij} = x_{ji}$ für alle i, j
- Einträge $\{x_{ij} \mid 1 \le i \le j \le N\}$ werden durch unabhängige Münzwürfe ermittelt: Kopf $= +1$, Zahl $= -1$

Wignersche Zufallsmatrizen (Wigner 1955)

Definition

Eine **Wignersche Zufallsmatrix** $X_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(x_{ij}\right)_{i,j=1}^{N}$

- ist symmetrisch: $X_N^* = X_N$, d.h. $x_{ij} = x_{ji}$ für alle i, j
- Einträge $\{x_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq N\}$ werden durch unabhängige Münzwürfe ermittelt: Kopf $= +1$, Zahl $=-1$

$$\begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1
\end{pmatrix}$$

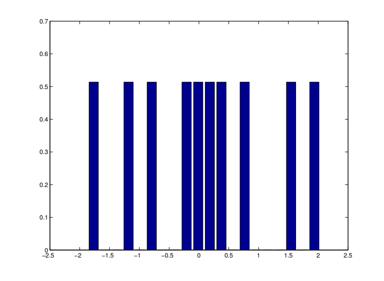
Wignersche Zufallsmatrizen (Wigner 1955)

Definition

Eine **Wignersche Zufallsmatrix** $X_N = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(x_{ij}\right)_{i,j=1}^{N}$

- ist symmetrisch: $X_N^* = X_N$, d.h. $x_{ij} = x_{ji}$ für alle i, j
- Einträge $\{x_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq N\}$ werden durch unabhängige Münzwürfe ermittelt: Kopf $= +1$, Zahl $= -1$

Beispiel: Eigenwertverteilung für $N = 10$



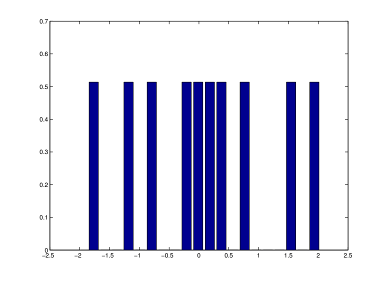
Wignersche Zufallsmatrizen (Wigner 1955)

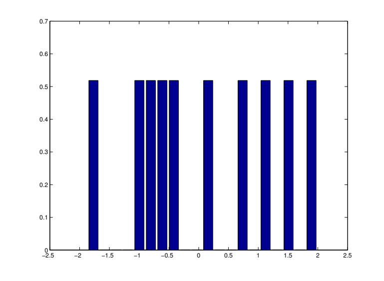
Definition

Eine **Wignersche Zufallsmatrix** $X_N = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(x_{ij}\right)_{i,j=1}^{N}$

- ist symmetrisch: $X_N^* = X_N$, d.h. $x_{ij} = x_{ji}$ für alle i, j
- Einträge $\{x_{ij} \mid 1 \le i \le j \le N\}$ werden durch unabhängige Münzwürfe ermittelt: Kopf $= +1$, Zahl $= -1$

Beispiel: Eigenwertverteilung für $N = 10$





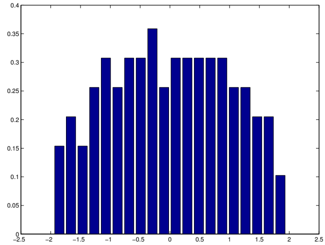
Wignersche Zufallsmatrizen (Wigner 1955)

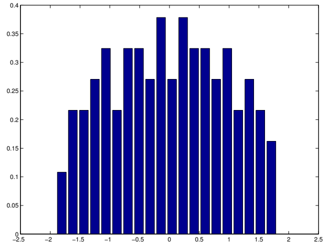
Definition

Eine **Wignersche Zufallsmatrix** $X_N = \frac{1}{\sqrt{N}}(x_{ij})_{i,j=1}^{N}$

- ist symmetrisch: $X_N^* = X_N$, d.h. $x_{ij} = x_{ji}$ für alle i, j
- Einträge $\{x_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq N\}$ werden durch unabhängige Münzwürfe ermittelt: Kopf $= +1$, Zahl $= -1$

Beispiel: Eigenwertverteilung für $N = 100$





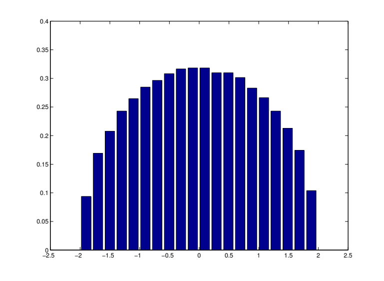
Wignersche Zufallsmatrizen (Wigner 1955)

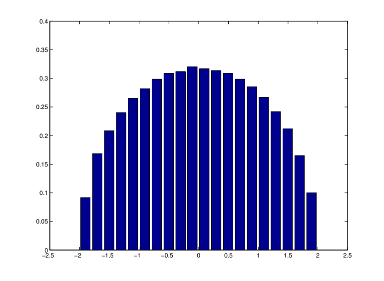
Definition

Eine **Wignersche Zufallsmatrix** $X_N = \frac{1}{\sqrt{N}}(x_{ij})_{i,j=1}^{N}$

- ist symmetrisch: $X_N^* = X_N$, d.h. $x_{ij} = x_{ji}$ für alle i, j
- Einträge $\{x_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq N\}$ werden durch unabhängige Münzwürfe ermittelt: Kopf $= +1$, Zahl $= -1$

Beispiel: Eigenwertverteilung für $N = 3000$





Section 5

Freie Wahrscheinlichkeitstheorie

The odd couple: Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren

Fundamentale Beobachtung von Voiculescu

Limes von Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren haben was miteinander zu tun

The odd couple: Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren

Fundamentale Beobachtung von Voiculescu

Limes von Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren haben was miteinander zu tun

Wigner-Matrix

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}$$

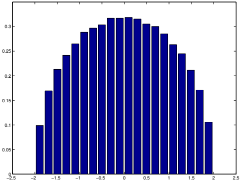
The odd couple: Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren

Fundamentale Beobachtung von Voiculescu

Limes von Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren haben was miteinander zu tun

Wigner-Matrix

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}$$



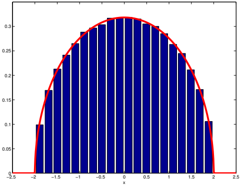
The odd couple: Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren

Fundamentale Beobachtung von Voiculescu

Limes von Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren haben was miteinander zu tun

Wigner-Matrix

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}$$



Wignersche Halbkreis

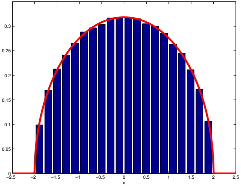
The odd couple: Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren

Fundamentale Beobachtung von Voiculescu

Limes von Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren haben was miteinander zu tun

Wigner-Matrix

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}$$



Wignersche Halbkreis

Shift-Operator

Der einseitige Shift $l + l^*$ hat die Halbkreisverteilung.

The odd couple: Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren

Fundamentale Beobachtung von Voiculescu

Limes von Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren haben was miteinander zu tun; auch im Fall mehrerer Matrizen

The odd couple: Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren

Fundamentale Beobachtung von Voiculescu

Limes von Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren haben was miteinander zu tun; auch im Fall mehrerer Matrizen

unabhängige Wigner

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdots$$

$$\begin{pmatrix} \mp 1 & \cdots & \mp 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mp 1 & \cdots & \mp 1 \end{pmatrix}$$

The odd couple: Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren

Fundamentale Beobachtung von Voiculescu

Limes von Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren haben was miteinander zu tun; auch im Fall mehrerer Matrizen

unabhängige Wigner

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdots$$

$$\begin{pmatrix} \mp 1 & \cdots & \mp 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mp 1 & \cdots & \mp 1 \end{pmatrix}$$

orthogonale Shifts

mehrere Shifts in orthogonale Richtungen

$l_1 + l_1^*, \dots, l_n + l_n^*$

The odd couple: Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren

Fundamentale Beobachtung von Voiculescu

Limes von Zufallsmatrizen und von-Neumann-Algebren haben was miteinander zu tun; auch im Fall mehrerer Matrizen

unabhängige Wigner

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdots$$

$$\begin{pmatrix} \mp 1 & \cdots & \mp 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mp 1 & \cdots & \mp 1 \end{pmatrix}$$

Voiculescus Konzept der “freien Unabhängigkeit”

orthogonale Shifts

mehrere Shifts in orthogonale Richtungen

$l_1 + l_1^*, \dots, l_n + l_n^*$

von-Neumann-Algebren können oft als Limes von unabhängigen Zufallsmatrizen realisiert werden

Beispiel: $L(\mathbb{F}_n)$

$$< l_1 + l_1^*, \dots, l_n + l_n^* > = \lim_{N \to \infty} < \begin{pmatrix} \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mp 1 & \cdots & \mp 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mp 1 & \cdots & \mp 1 \end{pmatrix} >$$

von-Neumann-Algebren können oft als Limes von unabhängigen Zufallsmatrizen realisiert werden

Beispiel: $L(\mathbb{F}_n)$

$$< l_1 + l_1^*, \dots, l_n + l_n^* > = \lim_{N\to\infty} < \begin{pmatrix} \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mp 1 & \cdots & \mp 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mp 1 & \cdots & \mp 1 \end{pmatrix} >$$

Somit können wir

- einerseits unsere doch recht abstrakten von-Neumann-Algebren durch viel konkretere Zufallsmatrizen besser verstehen

von-Neumann-Algebren können oft als Limes von unabhängigen Zufallsmatrizen realisiert werden

Beispiel: $L(\mathbb{F}_n)$

$$< l_1 + l_1^*, \dots, l_n + l_n^* > = \lim_{N\to\infty} < \begin{pmatrix} \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mp 1 & \cdots & \mp 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mp 1 & \cdots & \mp 1 \end{pmatrix} >$$

Somit können wir

- einerseits unsere doch recht abstrakten von-Neumann-Algebren durch viel konkretere Zufallsmatrizen besser verstehen
- andererseits aber auch operatoralgebraische Methoden benutzen, um asymptotische Eigenschaften von Zufallsmatrizen zu kontrollieren

Warum betreiben wir freie Wahrscheinlichkeitstheorie:

Zufallsmatrizen

Freie Wahrscheinlichkeitstheorie

von-Neumann-Algebren

Warum betreiben wir freie Wahrscheinlichkeitstheorie:

Zufallsmatrizen

$\Longleftarrow$

von-Neumann-Algebren

Beispiele

Viele neue Ergebnisse über von-Neumann-Algebren; z.B.

- alle $L(\mathbb{F}_n)$ sind isomorph oder paarweise verschieden (Dykema, Radulescu, Voiculescu)
- $L(\mathbb{F}_n)$ hat keine Cartan-Unteralgebra (Voiculescu)
- ...

Warum betreiben wir freie Wahrscheinlichkeitstheorie:

Beispiele

Berechnung von asymptotischen Eigenwertverteilungen von Polynomen in unabhängigen Zufallsmatrizen (Belinschi, Mai, Speicher)

Zufallsmatrizen $\Longrightarrow$ von-Neumann-Algebren

Warum betreiben wir freie Wahrscheinlichkeitstheorie: weil sie uns ganz neue Einblicke gibt!

Beispiele

Berechnung von asymptotischen Eigenwertverteilungen von Polynomen in unabhängigen Zufallsmatrizen (Belinschi, Mai, Speicher)

Zufallsmatrizen

Freie Wahrscheinlichkeitstheorie

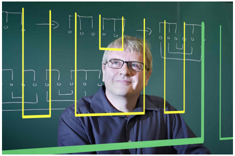
von-Neumann-Algebren

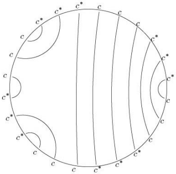
Beispiele

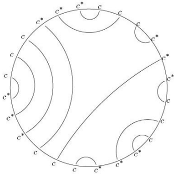
Viele neue Ergebnisse über von-Neumann-Algebren; z.B.

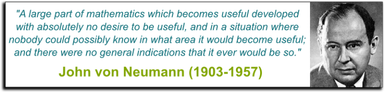
- alle $L(\mathbb{F}_n)$ sind isomorph oder paarweise verschieden (Dykema, Radulescu, Voiculescu)
- $L(\mathbb{F}_n)$ hat keine Cartan-Unteralgebra (Voiculescu)
- ...

Warum betreiben wir freie Wahrscheinlichkeitstheorie: oder einfach weil sie cool ist!









$$\phi(a^n) = \sum_{\pi \in \mathrm{NC}(n)} \prod_j k_j^{N_j(\pi)}$$