Faszination Mathematik

Roland Speicher

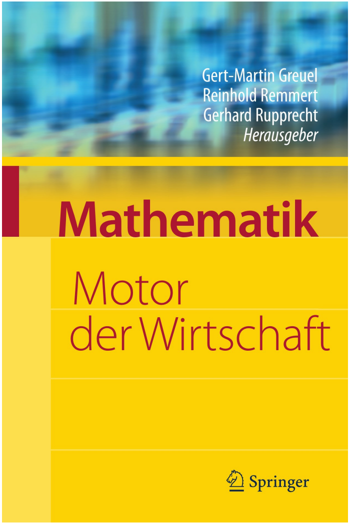
Universität des Saarlandes
Saarbrücken

Section 1

Berufsperspektiven für Mathematiker

Mathematiker werden überall benötigt

Mathematik ist überall. Früher waren es nur einzelne, die das klar erkannten, wie **Alexander von Humboldt** mit seinem zeitlosen Satz **“Mathematische Studien sind die Seele aller industriellen Fortschritte”** oder **Werner von Siemens**, der seinem Bruder Wilhelm den dringenden Rat gab, **“Dein Hauptstudium muss jetzt Mathematik sein”.** Heute besteht Einvernehmen darüber, dass ohne Mathematik der Mensch seinen Alltag nicht gestalten kann. Wir hoffen, mit unserem Band auf überzeugende und eindrucksvolle Weise zu dokumentieren, dass Mathematik in all ihren Facetten eine Schlüsseldisziplin der heutigen Gesellschaft ist.



Mathematiker werden überall benötigt

Daimler	Mathematisches Können ist ein Wettbewerbsvorteil
Dürr	Die Mathematik ist eine zwar häufig verdeckte, aber dafür umso wichtigere Basis für die Innovations- und Technologiekompetenz des Unternehmens.
IBM	Und dennoch gibt es eine Konstante, die alles im Innern zusammenhält und einen wichtigen Baustein für Innovation darstellt: die Mathematik.
SAP	Zahlen sind zwar nicht alles im Wirtschaftsleben. Aber ohne Mathematik ist hier fast alles nichts.
Siemens	Ohne Mathematik gibt es keinen Fortschritt und keine technischen Innovationen.


Berufsperspektiven
Banken
Versicherungen
Unternehmens-beratungen
IT-Bereich
Lehramt
B.Sc., M.Sc., Staatsex., Dr. Mathematik
Technologie-konzerne
Wiss. Laufbahn
Sehr gute Perspektiven, entscheidend ist nicht das Spezialgebiet, sondern strukturiertes Denken und Durchhaltevermögen.

Section 2

Faszination Mathematik

Worum geht es in der Mathematik

"Was macht eigentlich so ein Mathematiker? Ist nicht alles schon bekannt, wurden nicht alle Zahlen schon miteinander multipliziert und alle Integrale berechnet?"

$$
\begin{aligned}
1 \times 8 + 1 &= 9\\
12 \times 8 + 2 &= 98\\
123 \times 8 + 3 &= 987\\
1234 \times 8 + 4 &= 9876\\
12345 \times 8 + 5 &= 98765\\
123456 \times 8 + 6 &= 987654\\
1234567 \times 8 + 7 &= 9876543\\
12345678 \times 8 + 8 &= 98765432\\
123456789 \times 8 + 9 &= 987654321
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 \times 9 + 2 &= 11\\
12 \times 9 + 3 &= 111\\
123 \times 9 + 4 &= 1111\\
1234 \times 9 + 5 &= 11111\\
12345 \times 9 + 6 &= 111111\\
123456 \times 9 + 7 &= 1111111\\
1234567 \times 9 + 8 &= 11111111\\
12345678 \times 9 + 9 &= 111111111\\
123456789 \times 9 + 10 &= 1111111111
\end{aligned}
$$

Worum geht es in der Mathematik

"Was macht eigentlich so ein Mathematiker? Ist nicht alles schon bekannt, wurden nicht alle Zahlen schon miteinander multipliziert und alle Integrale berechnet?"

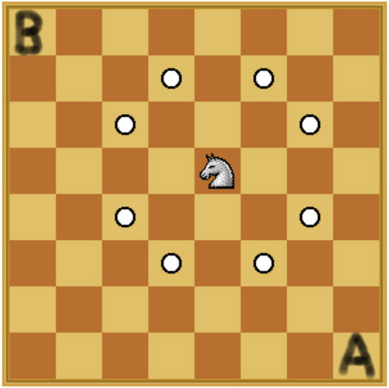
In der Mathematik geht es nicht wirklich um Zahlen und Integrale, sondern um

1 x 8 + 1 = 9	1 x 9 + 2 = 11
12 x 8 + 2 = 98	12 x 9 + 3 = 111
123 x 8 + 3 = 987	123 x 9 + 4 = 1111
1234 x 8 + 4 = 9876	1234 x 9 + 5 = 11111
12345 x 8 + 5 = 98765	12345 x 9 + 6 = 111111
123456 x 8 + 6 = 987654	123456 x 9 + 7 = 1111111
1234567 x 8 + 7 = 9876543	1234567 x 9 + 8 =11111111
12345678 x 8 + 8 = 98765432	12345678 x 9 + 9 =111111111
123456789 x 8 + 9 = 987654321	123456789 x 9 +10=1111111111

Struktur, Muster und Schönheit.

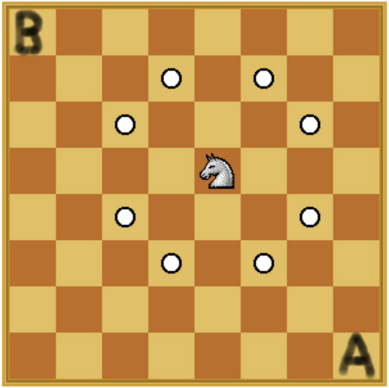
Wie hilft das Erkennen von Mustern

Gibt es eine Springertour, die in A startet, jedes Feld genau einmal besucht und in B endet?



Wie hilft das Erkennen von Mustern

Gibt es eine Springertour, die in A startet, jedes Feld genau einmal besucht und in B endet?



Antwort: Nein, weil wir in jedem Zug die Farbe wechseln und wir insgesamt 63, also eine ungerade Anzahl von Zügen machen.

Eine unserer Lieblingsfragen:

Das ist der "Nicht-Knoten":

Eine unserer Lieblingsfragen:

Das ist der "Nicht-Knoten":

Und was ist mit dem hier ...

Eine unserer Lieblingsfragen: Sind sie gleich?

Das ist der "Nicht-Knoten":

Und was ist mit dem hier ...

Eine unserer Lieblingsfragen: Sind sie gleich?

... oder der hier ...

Figure 3.5. Wolfgang Haken's "Gordian knot."

Sind die zwei Kleeblattschlingen gleich?

Sind die zwei Kleeblattschlingen gleich?

Nein - aber das ist nicht offensichtlich!

Kommen wir jetzt zu etwas völlig anderem: von-Neumann-Algebren als unendliche Matrizen

von-Neumann-Algebren

- wurden 1929 von Johann von Neumann eingeführt
- sind nicht-triviale Versionen von $\infty \times \infty$ Matrizen
- beschreiben Geometrien mit nicht-ganzzahligen Dimensionen
- dienen zur mathematischen Beschreibung der Quantenmechanik

Vaughan Jones vergleicht von-Neumann- Algebren mit dem tiefsten Objekt, das er sich vorstellen kann, dem Pazifischen Ozean.

Warum interessieren wir uns dafür?

Vaughan Jones vergleicht von-Neumann- Algebren mit dem tiefsten Objekt, das er sich vorstellen kann, dem Pazifischen Ozean.

Warum interessieren wir uns dafür?

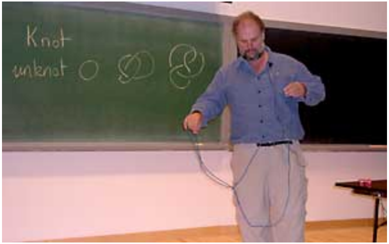
Weil uns ihre Schönheit fasziniert und wir sie verstehen wollen!!!

Wie können kleine von-Neumann-Algebren in großen von-Neumann-Algebren sitzen?

Wie können kleine von-Neumann-Algebren in großen von-Neumann-Algebren sitzen?

1984 entdeckte Vaughan Jones, dass

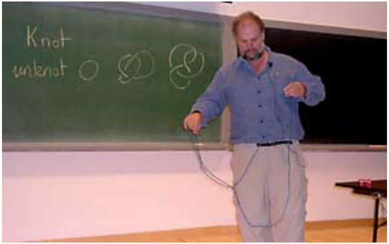
die kleinen in den großen verknotet sind.



Wie können kleine von-Neumann-Algebren in großen von-Neumann-Algebren sitzen?

1984 entdeckte Vaughan Jones, dass

die kleinen in den großen verknotet sind.



und seine Ergebnisse über von-Neumann-Algebren lieferten unerwartete neue Resultate über Knoten: insbesondere das Jones Polynom!

Sind die zwei Kleeblattschlingen gleich?

Sind die zwei Kleeblattschlingen gleich?

Einfach zu entscheiden mit dem Jones Polynom: Nein!

Mehr zu Knoten und zum Jones Polynom:

KNOTENTHEORIE – MATHEMATIK ZUM SELBERBASTELN

Gabriela Weitze-Schmithüsen

Knoten sind nicht immer das, was sie zu sein scheinen:

Chefalo-Knoten

- Stellen Sie diesen Knoten selbst her. (Anleitung und Schnüre liegen auf dem Tisch bereit.)
- Ziehen Sie kräftig an beiden Enden!
- Was stellen Sie fest?

Problemstellung:

Gehören diese beiden Diagramme zum selben Knoten?

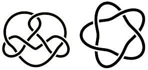


Diagramm 1 von Knoten A — Diagramm 2 von Knoten B

Lösungsstrategie:

- Finde eine Eigenschaft, die sich aus dem Diagramm bestimmen lässt und die Knoten unterscheidet: Das heißt sie ist für alle Diagramme gleich, die zum selben Knoten gehören. Eine solche Größe heißt Invariante.
- Sind also die Invarianten von Diagramm 1 und Diagramm 2 verschieden, so sind auch die beiden Knoten A und B verschieden.

Herausforderung:

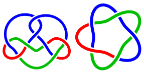
Wie findet man eine solche Invariante?

Ein Werkzeug: Beispiel einer Invariante: Färbbarkeit

Das Knotendiagramm soll nach den folgenden Spielregeln eingefärbt werden:

1. Jeder Bogen erhält eine der drei Farben blau, rot und grün.
2. Es müssen mindestens zwei verschiedene Farben benutzt werden.
3. An einer Kreuzung kommen entweder alle drei Farben oder nur eine Farbe vor.

Beispiel:



erlaubt √ — *nicht erlaubt* ×

Beispiele zum selbst Ausprobieren liegen auf dem Tisch für Sie bereit.

Konklusion:

Ein mathematischer Lehrsatz besagt, dass die Eigenschaft "färbbar" eine Knoteninvariante ist.

Ergebnis:
In unserem Beispiel ist Diagramm 1 färbbar und Diagramm 2 nicht, also sind Knoten A und Knoten B verschieden.

Drei magische Bewegungen:

Die folgenden lokalen Veränderungen in einem Knotendiagramm verändern den Knoten nicht:

Bewegung Ω_1 — Bewegung Ω_2 — Bewegung Ω_3

Ein mathematischer Lehrsatz:

Der Satz von Reidemeister*:
Zwei Knotendiagramme, die zum gleichen Knoten gehören, lassen sich durch eine endliche Folge der drei Bewegungen Ω_1, Ω_2 und Ω_3 ineinander überführen.

*Kurt Reidemeister (1893-1971)

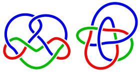
Mit diesem Hilfsmittel kann man auf einfache Weise Knoteninvarianten nachweisen.

Führen Sie selbst den Beweis für die Invariante Färbbarkeit mit den auf dem Tisch bereitgestellten Materialien.

Einordnung:

Wie gut ist die Invariante Färbbarkeit?

Beispiel:



Knoten A — **Knoten C**

Frage: Sind Knoten A und Knoten C gleich?
Dies kann mit der Invariante "Färbbarkeit" nicht entschieden werden, weil beide Diagramme färbbar sind.
Die Knotentheorie hat aber feinere Invarianten entwickelt, z.B. *Knotengruppen*, *Jones-Polynome* und *Vassiliev-Invarianten*.

Antwort: Knoten A und Knoten C sind verschieden.

Ziel der Knotentheorie:

Entwicklung einer einfachen Invariante, die *alle* Knoten unterscheiden kann.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES — Universität des Saarlandes