Zufall und Chaos

aus der Sicht der Mathematik

Prof. Dr. Roland Speicher

Universität des Saarlandes

Worüber wollen wir reden

1. Die mathematische Bändigung des Zufalls
2. Chaos und der Schmetterlingseffekt
3. Mathematische Struktur im Chaos
4. Zusammenfassung

Section 1

Die mathematische Bändigung des Zufalls

Was ist Zufall?

Deutsches Wörterbuch der Brüder Grimm

"Zufall ist das unberechenbare Geschehen, das sich unserer Vernunft und unserer Absicht entzieht."

Zufall = das, was man nicht vorhersehen kann ...

- radioaktive Zerfall eines Cäsium-Atoms ^{137}Cs geschieht zu einer "zufälligen" Zeit
- beim Werfen eines Würfels erhält man "zufällig" eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6

Zufall = das, was man nicht vorhersehen kann ... ... über das man aber trotzdem sehr genaue "statistische" Aussagen machen kann

- radioaktive Zerfall eines Cäsium-Atoms ^{137}Cs geschieht zu einer "zufälligen" Zeit
  - nach 30 Jahren ist ziemlich genau die Hälfte von einer größeren Menge ^{137}Cs zerfallen
- beim Werfen eines Würfels erhält man "zufällig" eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6
  - bei 1000-maligem Werfen eines Würfels ist die Augensumme aller Würfe recht nahe bei 3.500

Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie

Einzelne Ereignisse sind zufällig und unvorhersehbar...

- und entziehen sich somit einer wissenschaftlichen Beschreibung
- es gibt keine Anzeichen einer systematischen Theorie des Zufalls im Altertum oder Mittelalter

- Aristoteles: der Zufall entzieht sich grundsätzlich der menschlichen Erkenntnis und damit auch der Wissenschaft

Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie

Einzelne Ereignisse sind zufällig und unvorhersehbar...

- und entziehen sich somit einer wissenschaftlichen Beschreibung
- es gibt keine Anzeichen einer systematischen Theorie des Zufalls im Altertum oder Mittelalter

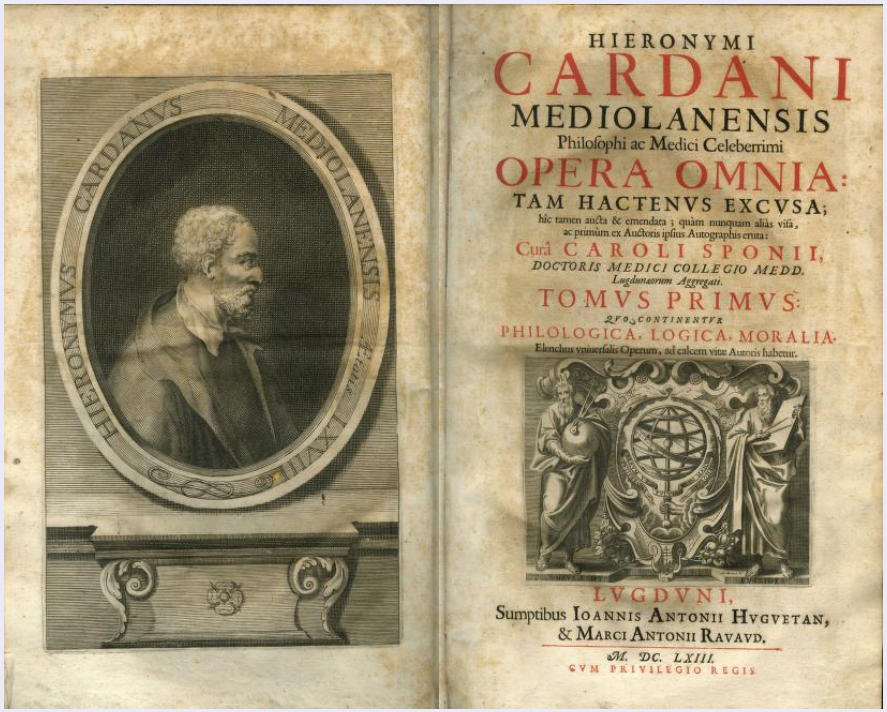
- Aristoteles: der Zufall entzieht sich grundsätzlich der menschlichen Erkenntnis und damit auch der Wissenschaft

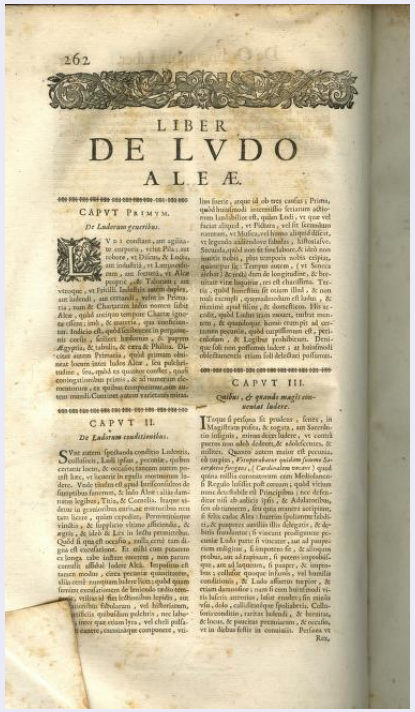
... aber viele solcher Ereignisse zeigen eine Struktur und sind mathematischen Untersuchungen zugänglich

- Gerolamo Cardano: Liber de Ludo Aleae (Buch vom Würfelspiel), 1524
- Briefwechsel zwischen Blaise Pascal und Pierre Fermat, 1654
- Johan de Witt: Wert von Leibrenten im Vergleich zu Anleihen, 1671

Gerolamo Cardano (1501 – 1576)

- Universalgelehrter der Renaissance
- Kardangelenk = Kreuzgelenk
- Liber de Ludo Alea = Buch der Glücksspiele





- entstanden ab 1524, aber erst 1663 posthum veröffentlicht

Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat 1654

- Blaise Pascal (1623 - 1662): französischer Mathematiker, Physiker, Literat, christlicher Philosoph
- Pierre Fermat (1607 - 1665): französischer Mathematiker und Jurist; einer der bedeutensten Mathematiker seiner Zeit

Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat 1654

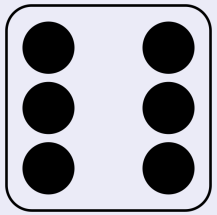
- Blaise Pascal (1623 - 1662): französischer Mathematiker, Physiker, Literat, christlicher Philosoph
- Pierre Fermat (1607 - 1665): französischer Mathematiker und Jurist; einer der bedeutensten Mathematiker seiner Zeit
- Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat 1654 gilt als Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitstheorie

Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat 1654

- Blaise Pascal (1623 - 1662): französischer Mathematiker, Physiker, Literat, christlicher Philosoph
- Pierre Fermat (1607 - 1665): französischer Mathematiker und Jurist; einer der bedeutensten Mathematiker seiner Zeit
- Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat 1654 gilt als Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitstheorie
- behandelt zwei von Chevalier de Méré an Pascal gestellte Probleme:
  - das Problem der Würfel
  - das Problem der Gewinnaufteilung

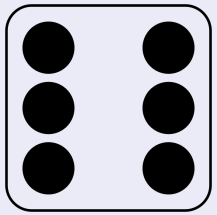
Das Problem der Würfel

- Man wirft einen Würfel 4 Mal. Lohnt es sich, darauf Geld zu wetten, dass dabei mindestens einmal eine Sechs kommt?



Das Problem der Würfel

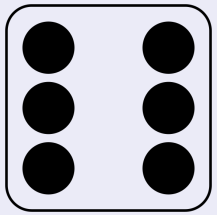
- Man wirft einen Würfel 4 Mal. Lohnt es sich, darauf Geld zu wetten, dass dabei mindestens einmal eine Sechs kommt? JA!



$$P(\text{mind. eine Sechs}) = 1 - P(\text{keine Sechser}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 52\%$$

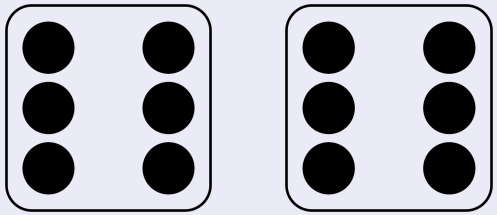
Das Problem der Würfel

- Man wirft einen Würfel 4 Mal. Lohnt es sich, darauf Geld zu wetten, dass dabei mindestens einmal eine Sechs kommt? JA!



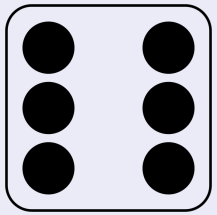
$$P(\text{mind. eine Sechs}) = 1 - P(\text{keine Sechser}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 52\%$$

- Man wirft ein Paar Würfel 24 Mal. Lohnt es sich, darauf Geld zu wetten, dass dabei mindestens einmal eine Doppel-Sechs kommt?



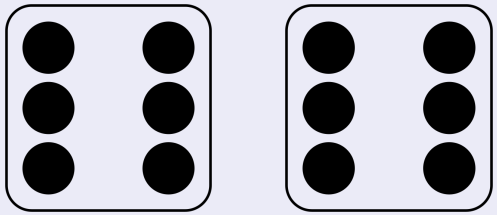
Das Problem der Würfel

- Man wirft einen Würfel 4 Mal. Lohnt es sich, darauf Geld zu wetten, dass dabei mindestens einmal eine Sechs kommt? JA!



$$P(\text{mind. eine Sechs}) = 1 - P(\text{keine Sechser}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 52\%$$

- Man wirft ein Paar Würfel 24 Mal. Lohnt es sich, darauf Geld zu wetten, dass dabei mindestens einmal eine Doppel-Sechs kommt? NEIN!



$$P(\text{mind. Doppelsechs}) = 1 - P(\text{keine Doppelsechser}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 49\%$$

Das Problem der Gewinnaufteilung

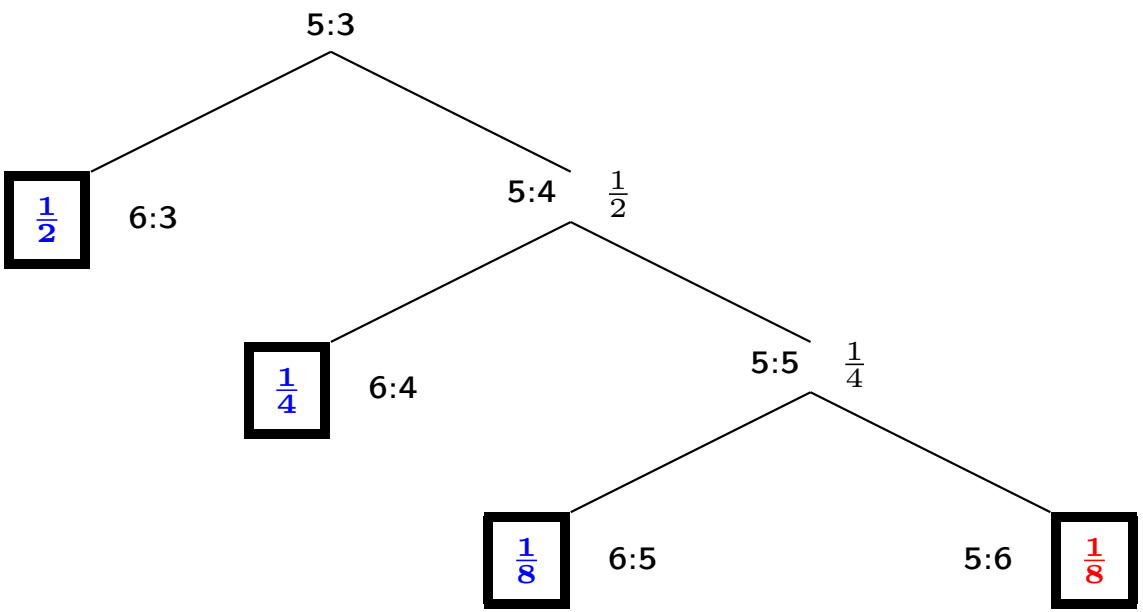
- In jeder Runde wird eine Münze geworfen. Es wird so lange gespielt, bis einer der beiden Spieler 6 Mal gewonnen hat. Derjenige, der zuerst 6 Mal gewonnen hat, bekommt das Preisgeld.

Das Problem der Gewinnaufteilung

- In jeder Runde wird eine Münze geworfen. Es wird so lange gespielt, bis einer der beiden Spieler 6 Mal gewonnen hat. Derjenige, der zuerst 6 Mal gewonnen hat, bekommt das Preisgeld.
- Auf Grund höherer Gewalt muss das Spiel jedoch vor der Entscheidung beim Stande von 5:3 unerwartet abgebrochen werden. Wie soll das Preisgeld in dem Fall gerecht verteilt werden?

Das Problem der Gewinnaufteilung

- In jeder Runde wird eine Münze geworfen. Es wird so lange gespielt, bis einer der beiden Spieler 6 Mal gewonnen hat. Derjenige, der zuerst 6 Mal gewonnen hat, bekommt das Preisgeld.
- Auf Grund höherer Gewalt muss das Spiel jedoch vor der Entscheidung beim Stande von 5:3 unerwartet abgebrochen werden. Wie soll das Preisgeld in dem Fall gerecht verteilt werden?

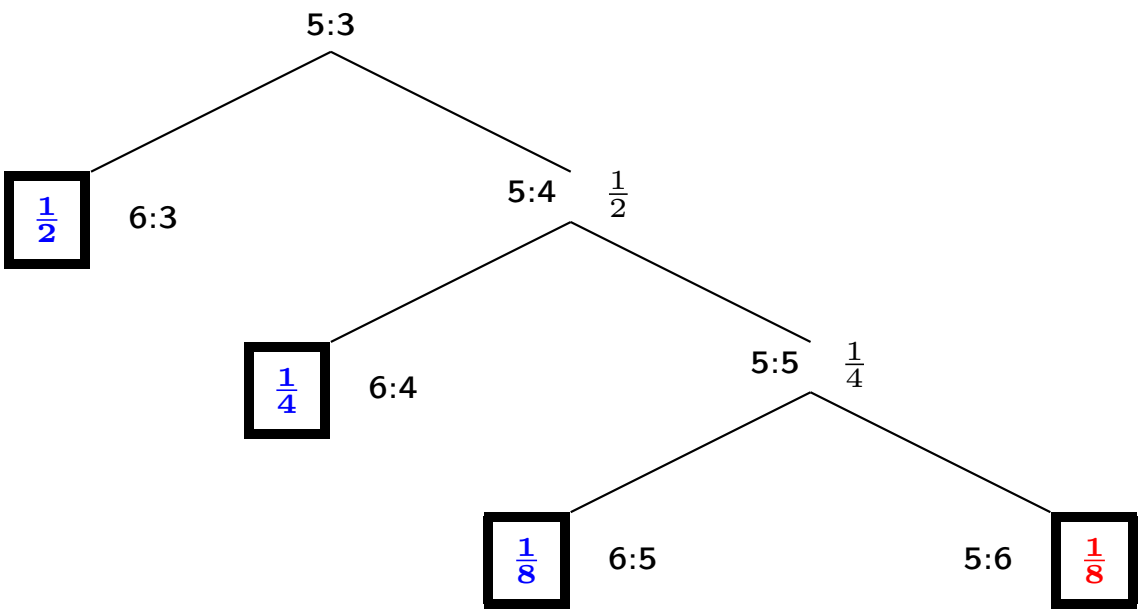


Spieler 1 gewinnt mit Wahrscheinlichkeit:
$1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8$

Spieler 2 gewinnt mit Wahrscheinlichkeit: $1/8$

Das Problem der Gewinnaufteilung

- In jeder Runde wird eine Münze geworfen. Es wird so lange gespielt, bis einer der beiden Spieler 6 Mal gewonnen hat. Derjenige, der zuerst 6 Mal gewonnen hat, bekommt das Preisgeld.
- Auf Grund höherer Gewalt muss das Spiel jedoch vor der Entscheidung beim Stande von 5:3 unerwartet abgebrochen werden. Wie soll das Preisgeld in dem Fall gerecht verteilt werden?



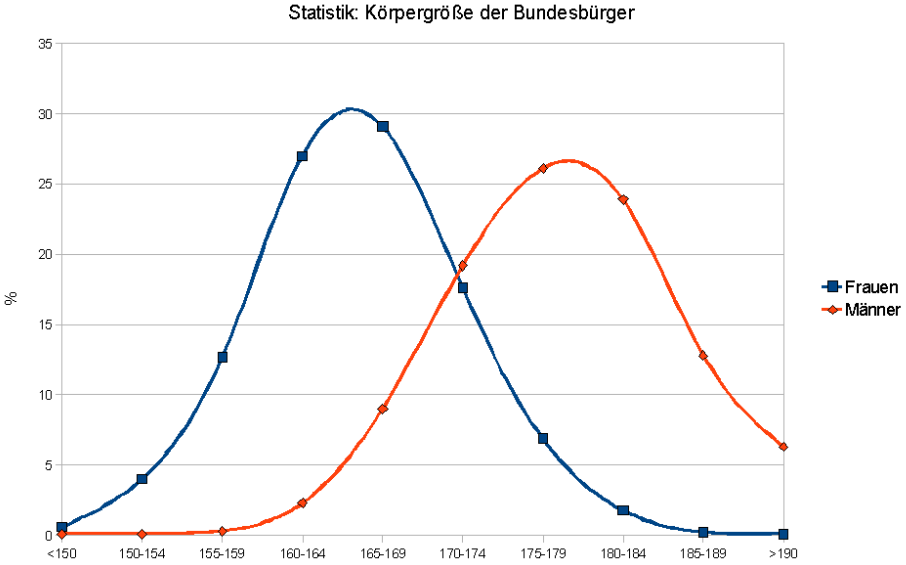
Spieler 1 gewinnt mit Wahrscheinlichkeit:
$1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8$

Spieler 2 gewinnt mit Wahrscheinlichkeit: $1/8$

deshalb: Aufteilung 7:1

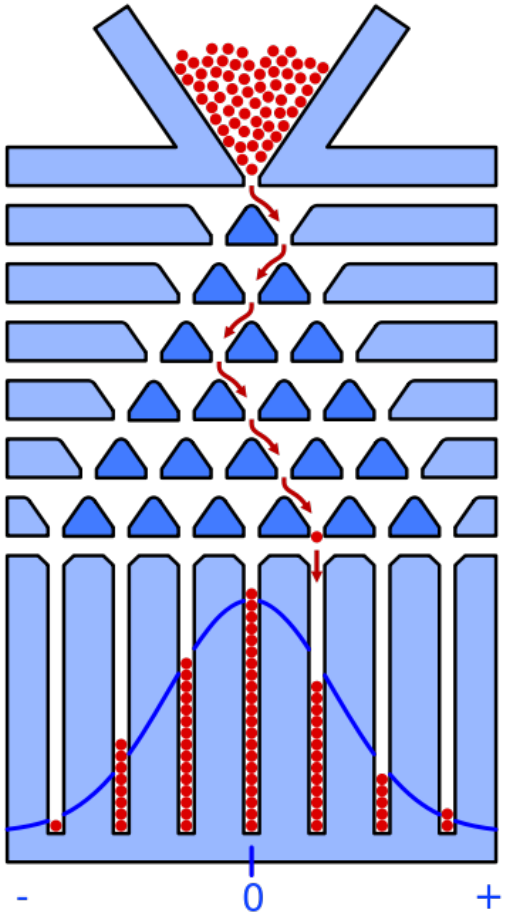
Normal- (oder Gauß-) Verteilung

Normal- (oder Gauß-) Verteilung



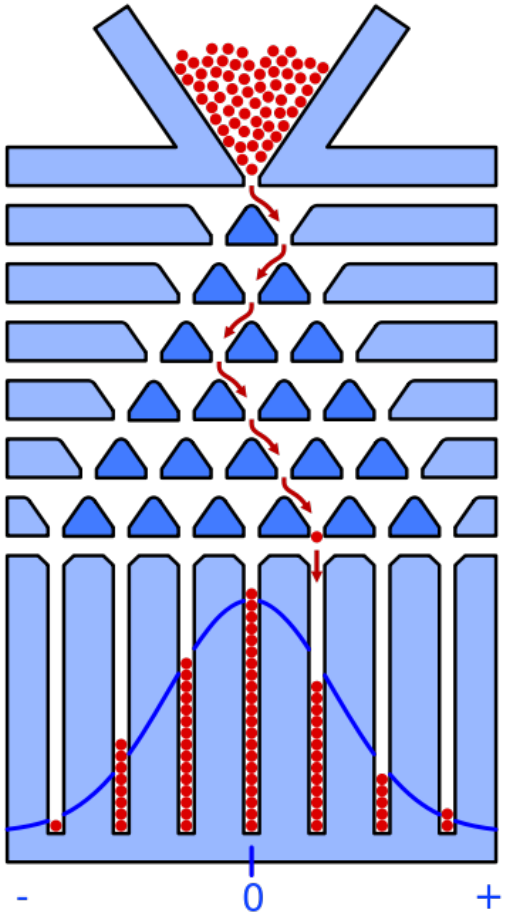
Von IchBinEuerHeld, statista.org, SOEP - SOEP & statista.org, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=57191516

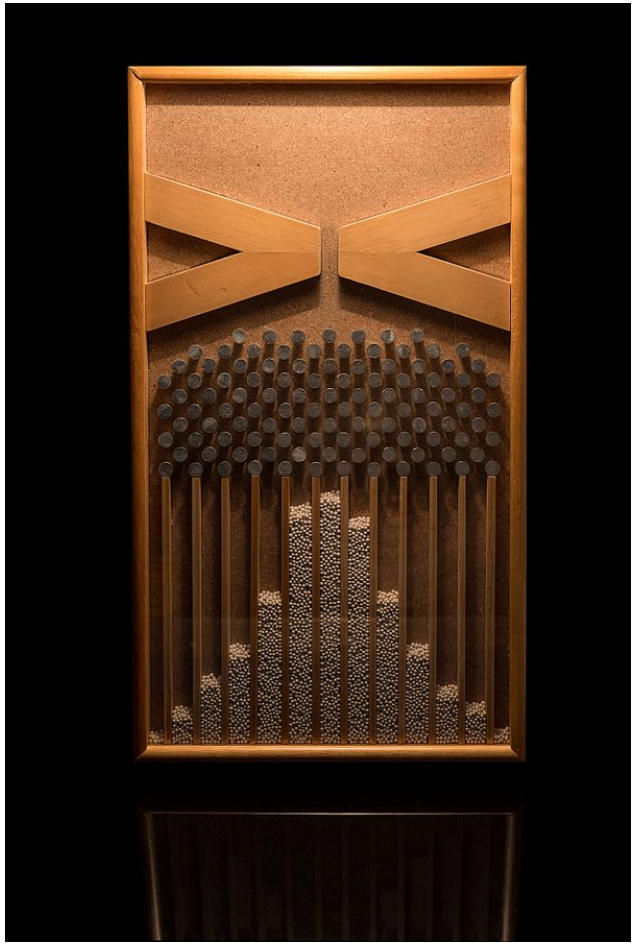
Zentraler Grenzwertsatz: Die Überlagerung einer großen Zahl von unabhängigen Einflüssen ist annäherend normalverteilt.



Galton-Brett

Zentraler Grenzwertsatz: Die Überlagerung einer großen Zahl von unabhängigen Einflüssen ist annäherend normalverteilt.





Galton-Brett

"Zufall" wird mathematisch dadurch gezähmt, dass wir ...

- über Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen reden
- Rechenregeln für diese Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen haben

"Zufall" wird mathematisch dadurch gezähmt, dass wir ...

- über Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen reden
- Rechenregeln für diese Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen haben

Aber was "bedeutet" die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses?

- frequentistischer (objektiver) Wahrscheinlichkeitsbegriff:
  wird das gleiche Experiment (unendlich) oft durchgeführt, so ist

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl der Versuche, bei denen Ereignis eintritt}}{\text{Anzahl aller Versuche}}$$

- Bayesscher (subjektiver) Wahrscheinlichkeitsbegriff:
  Wahrscheinlichkeit ist ein Maß dafür, wie stark man von dem Eintreten des Ereignisses überzeugt ist

... und wie kommt der Zufall in die reale Welt?

- Quantenzufall
- Unkenntnis der Anfangsbedingungen
- Sensitivität gegenüber kleinen Abweichungen bei Anfangsbedingungen

Section 2

Chaos und der Schmetterlingseffekt

Henri Poincaré (1854 – 1920)

- bedeutender französischer Mathematiker, theoretischer Physiker, theoretischer Astronom und Philosoph;
- einer der bedeutensten Mathematiker seiner Zeit (vergleichbar mit Hilbert in Deutschland)
- Cousin von Raymond Poincare = Ministerpräsident und Staatspräsident von Frankreich um 1920

"Eine sehr kleine Ursache, die uns entgehen mag, bewirkt einen beachtlichen Effekt, den wir nicht ignorieren können, und dann sagen wir, dass dieser Effekt auf Zufall beruht."

Kleine Ursachen haben grosse Wirkungen

... sprichwörtlich ...

- *Türkisches Sprichwort*
  "Ein Nagel kann ein Hufeisen retten, ein Hufeisen ein Pferd, ein Pferd einen Reiter und ein Reiter ein Land."
- *Chinesisches Sprichwort*
  "Weil ein Nagel verloren ging,
  ging das Hufeisen verloren.
  Weil das Hufeisen verloren ging,
  ging auch das Pferd verloren.
  Weil das Pferd verloren ging,
  ging auch der Reiter verloren.
  Weil der Reiter verloren ging,
  konnte die Nachricht nie übermittelt werden.
  Und weil die Nachricht nie übermittelt werden konnte,
  wurde der Krieg verloren."

Kleine Ursachen haben grosse Wirkungen

... insbesondere Schmetterlinge ...

- Philipp Bradbury: A Sound of Thunder (Ferner Donner), 1952

Das versehentliche Zertreten eines Schmetterlings auf einer Zeitreise in die Vergangenheit bei einer Dinosaurier-Safari ändert die Gegenwart (von einer demokratischen in eine totalitär regierte Welt)

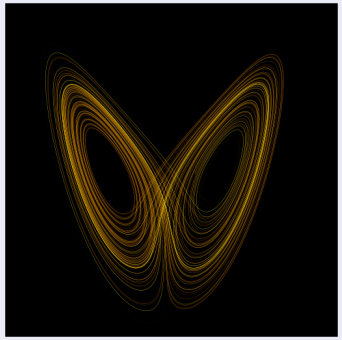
Kleine Ursachen haben grosse Wirkungen

... insbesondere Schmetterlinge ...

- Philipp Bradbury: A Sound of Thunder (Ferner Donner), 1952

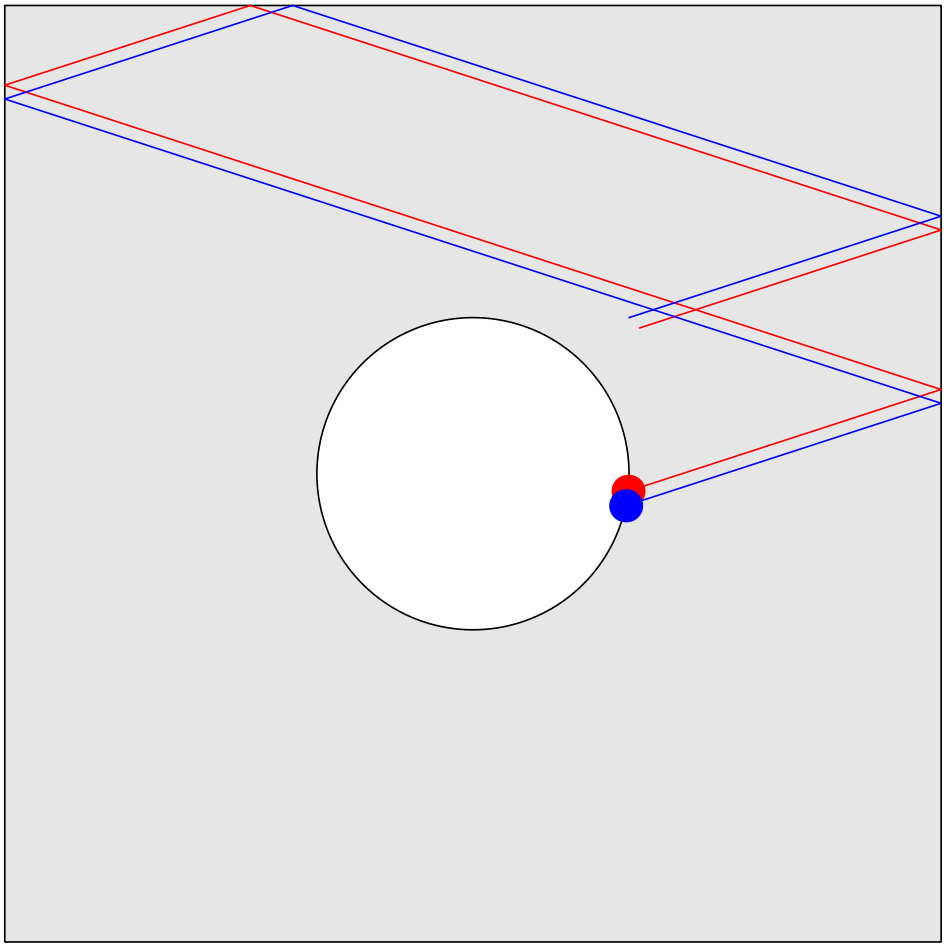
Das versehentliche Zertreten eines Schmetterlings auf einer Zeitreise in die Vergangenheit bei einer Dinosaurier-Safari ändert die Gegenwart (von einer demokratischen in eine totalitär regierte Welt)

- Edward N. Lorenz: Butterfly Effect (Schmetterlingseffekt), 1972

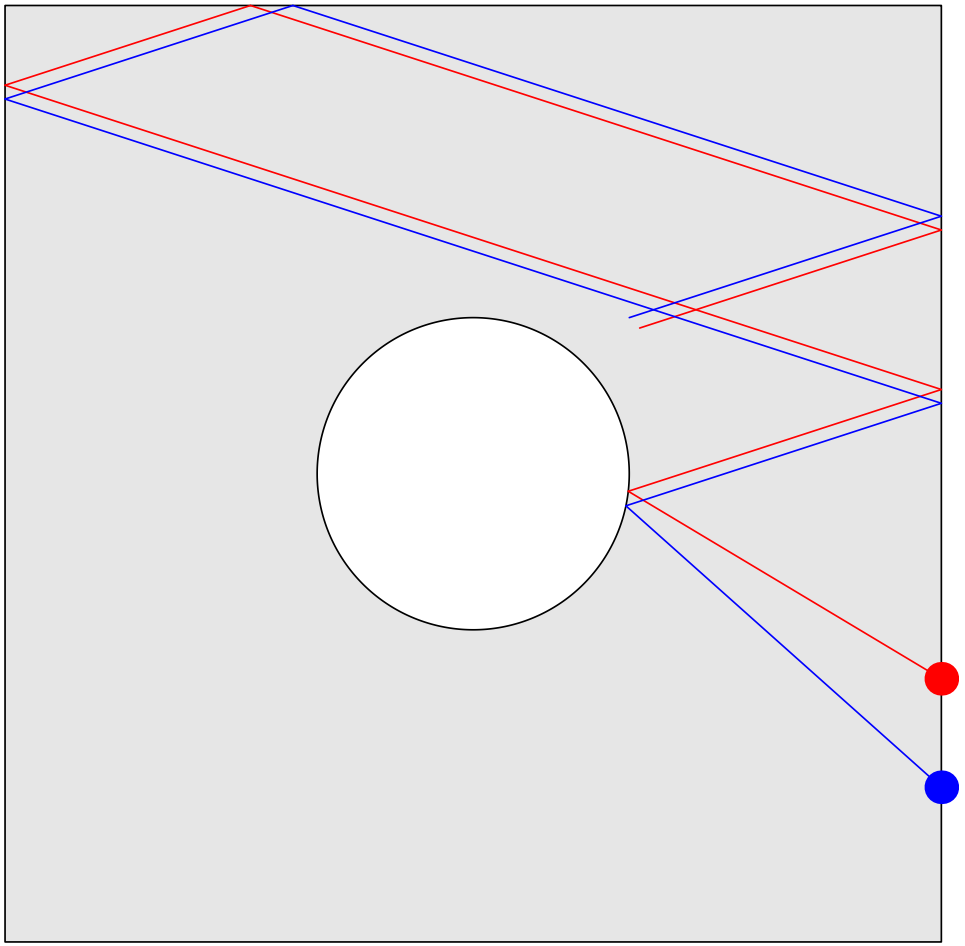


"Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil set off a Tornado in Texas?"
"Kann der Flügelschlag eines Schmetterlings in Brasilien einen Tornado in Texas auslösen?"

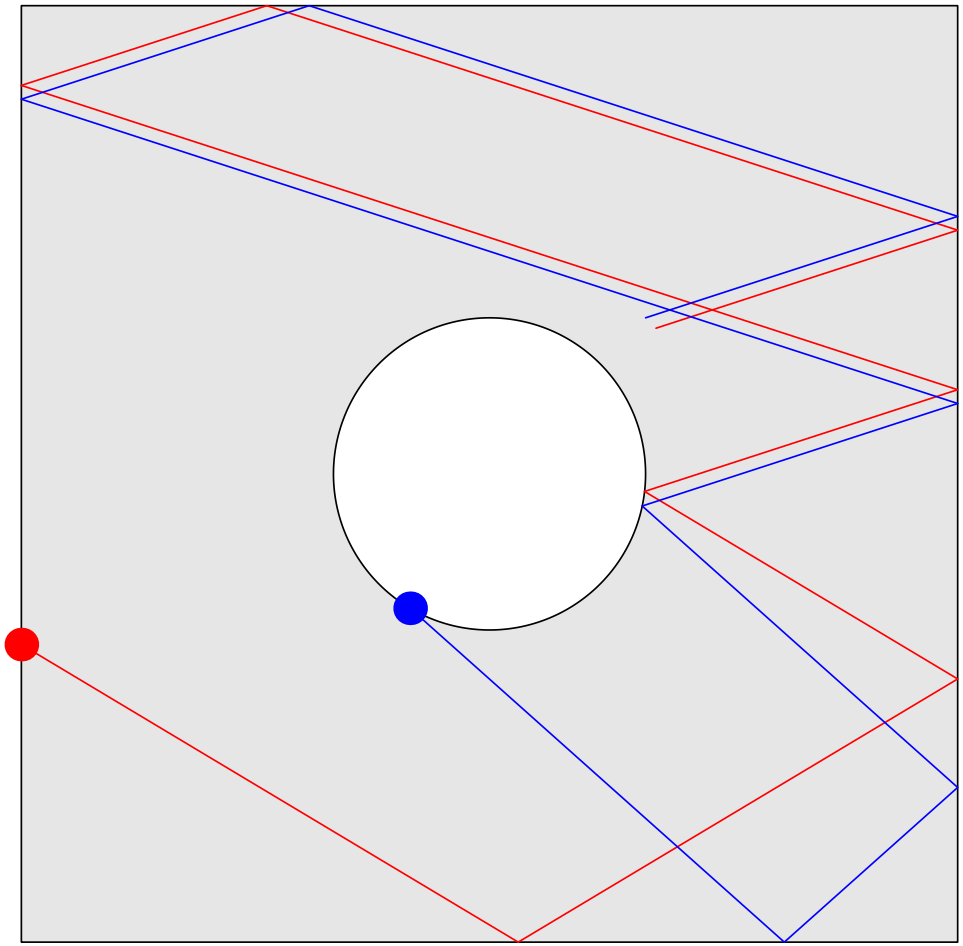
Kleine Ursachen haben große Wirkungen – allerdings oft unvorhersehbare



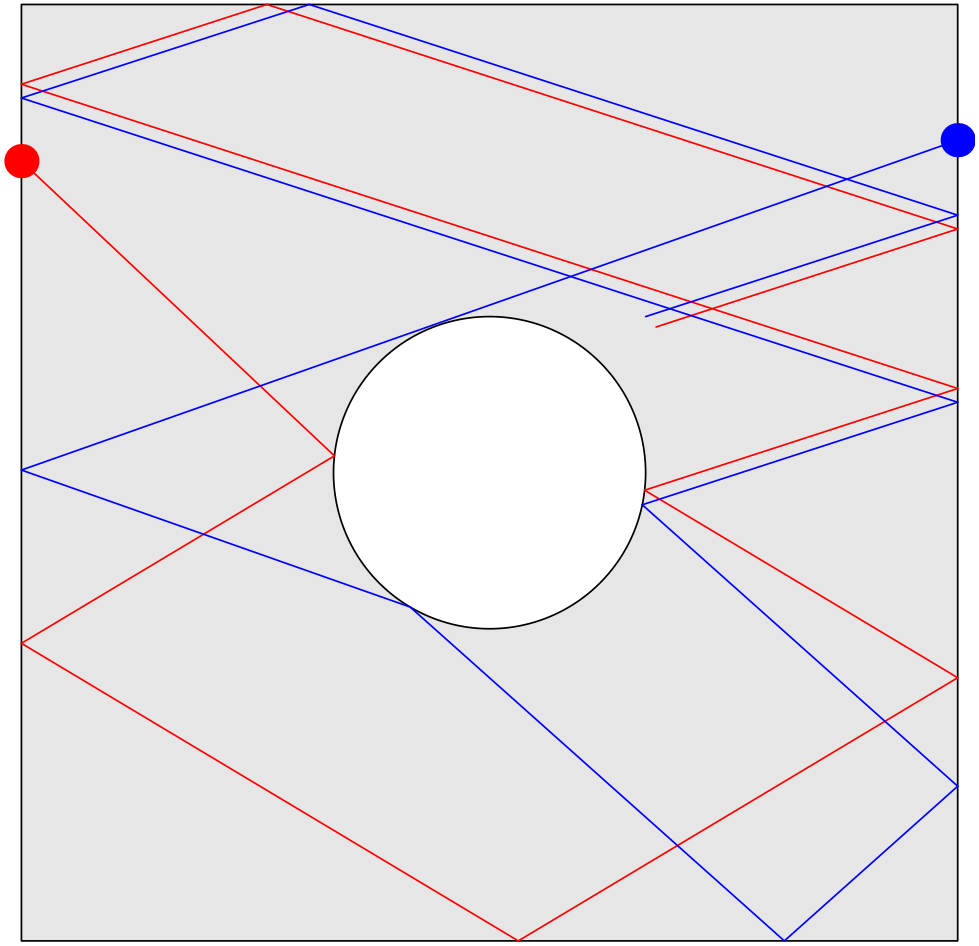
Kleine Ursachen haben große Wirkungen – allerdings oft unvorhersehbare



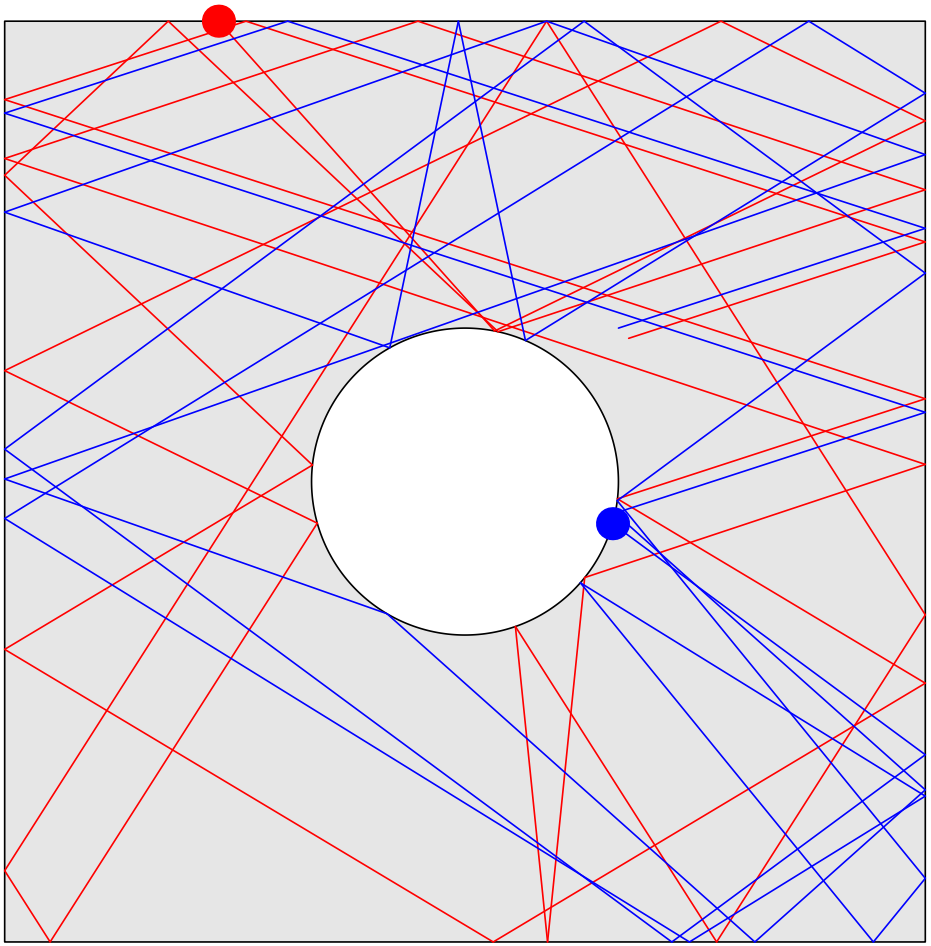
Kleine Ursachen haben große Wirkungen – allerdings oft unvorhersehbare



Kleine Ursachen haben große Wirkungen – allerdings oft unvorhersehbare



Kleine Ursachen haben große Wirkungen – allerdings oft unvorhersehbare



Deterministische Systeme zeigen chaotisches Verhalten

Beispiele

- "einfache" klassische mechanische Systeme
  - Billard (Hadamard 1898, Sinai 1970)
  - Dreikörperproblem: Sonne, Erde, Mond (Poincarè 1890)
  - Doppelpendel
- Wettervorhersage (Edward Lorenz 1972, "seltsamer Attraktor")
- Populationsdynamik, logistisches Wachstums (Robert May 1976)

Deterministische Systeme zeigen chaotisches Verhalten

Beispiele

- "einfache" klassische mechanische Systeme
  - Billard (Hadamard 1898, Sinai 1970)
  - Dreikörperproblem: Sonne, Erde, Mond (Poincarè 1890)
  - Doppelpendel
- Wettervorhersage (Edward Lorenz 1972, "seltsamer Attraktor")
- Populationsdynamik, logistisches Wachstums (Robert May 1976)

Diese Systeme sind nicht nur sehr schwierig langfristig vorherzusagen, sondern es ist hoffnungslos nach einer exakten Lösung zu suchen.

Deterministische Systeme zeigen chaotisches Verhalten ... aber auch Chaos zeigt Struktur

Beispiele

- "einfache" klassische mechanische Systeme
  - Billard (Hadamard 1898, Sinai 1970)
  - Dreikörperproblem: Sonne, Erde, Mond (Poincarè 1890)
  - Doppelpendel
- Wettervorhersage (Edward Lorenz 1972, "seltsamer Attraktor")
- Populationsdynamik, logistisches Wachstums (Robert May 1976)

Diese Systeme sind nicht nur sehr schwierig langfristig vorherzusagen, sondern es ist hoffnungslos nach einer exakten Lösung zu suchen.

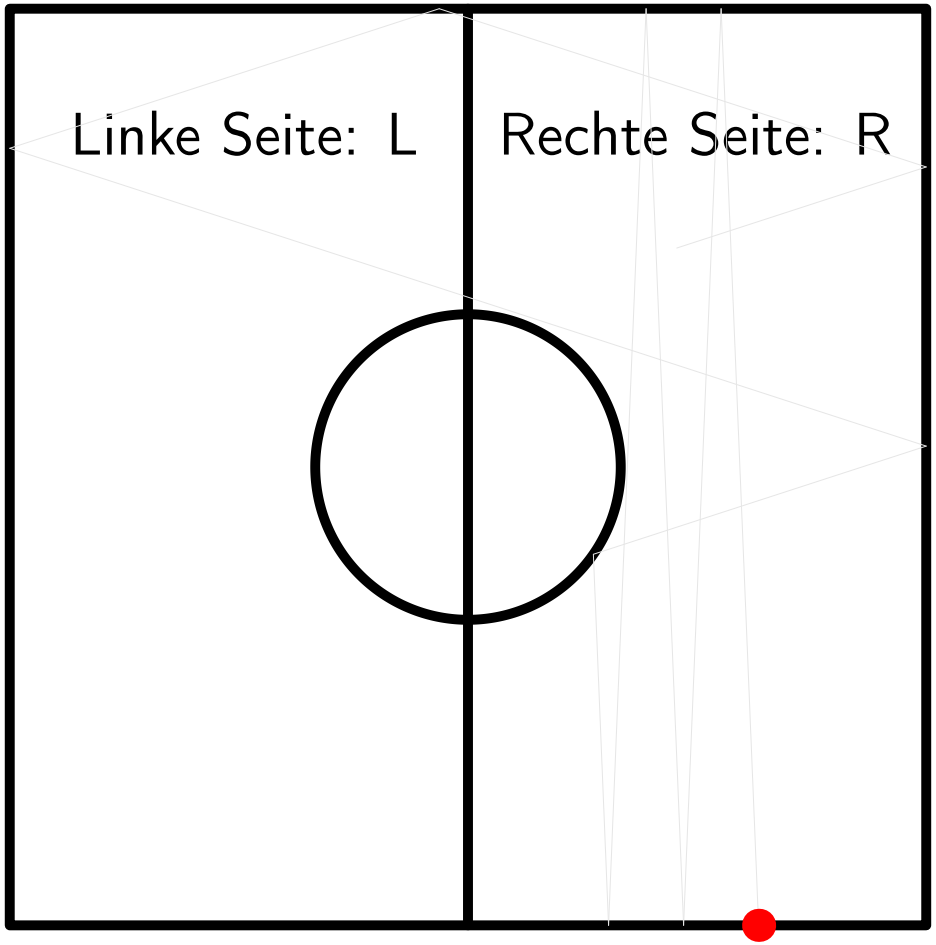
Allerdings:

Chaotische Systeme (in obigen deterministischen Sinne) sind nicht total willkürlich, sondern haben berechenbare statistische Eigenschaften.

Section 3

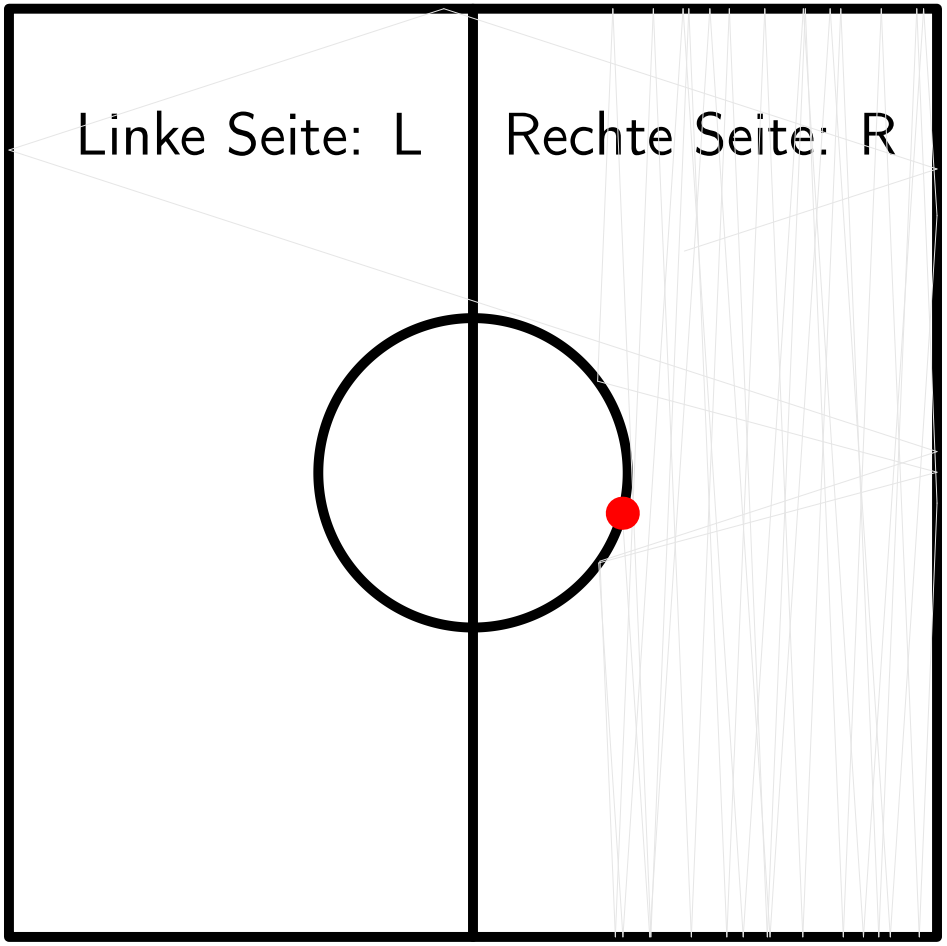
Mathematische Struktur im Chaos

Deterministisches Chaos zeigt Struktur



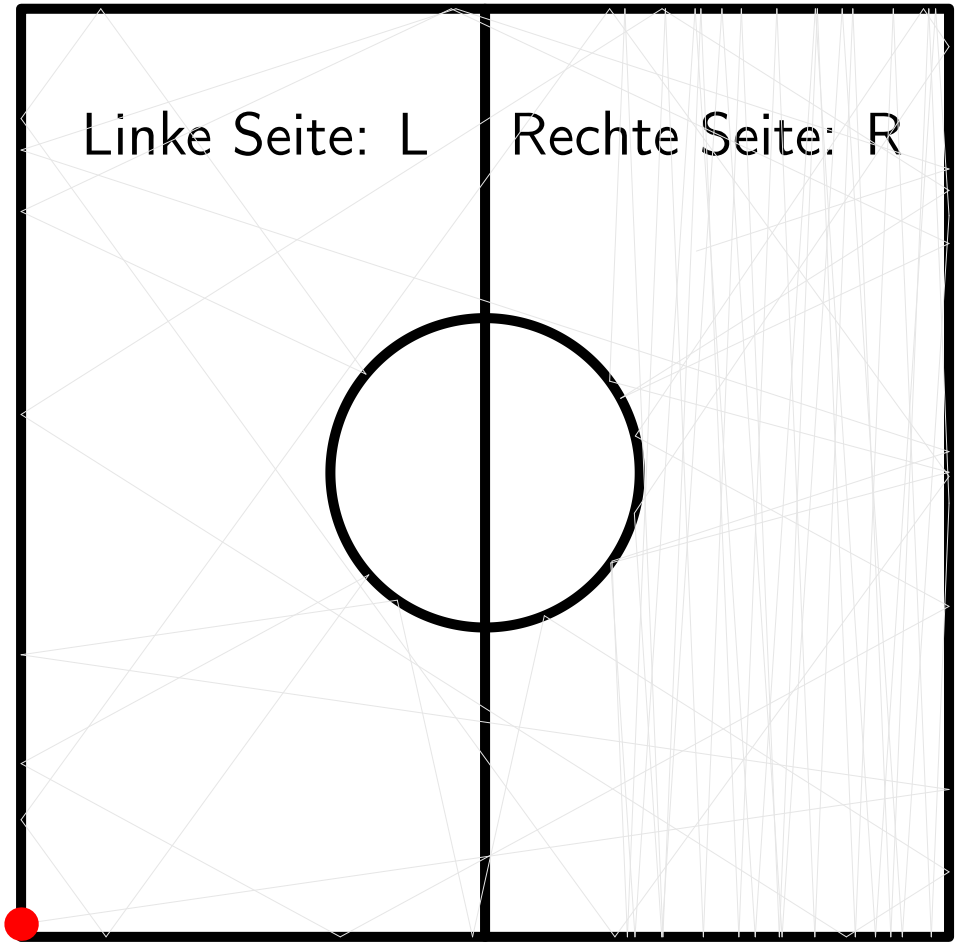
Trajektorie der Billardkugel: R

Deterministisches Chaos zeigt Struktur



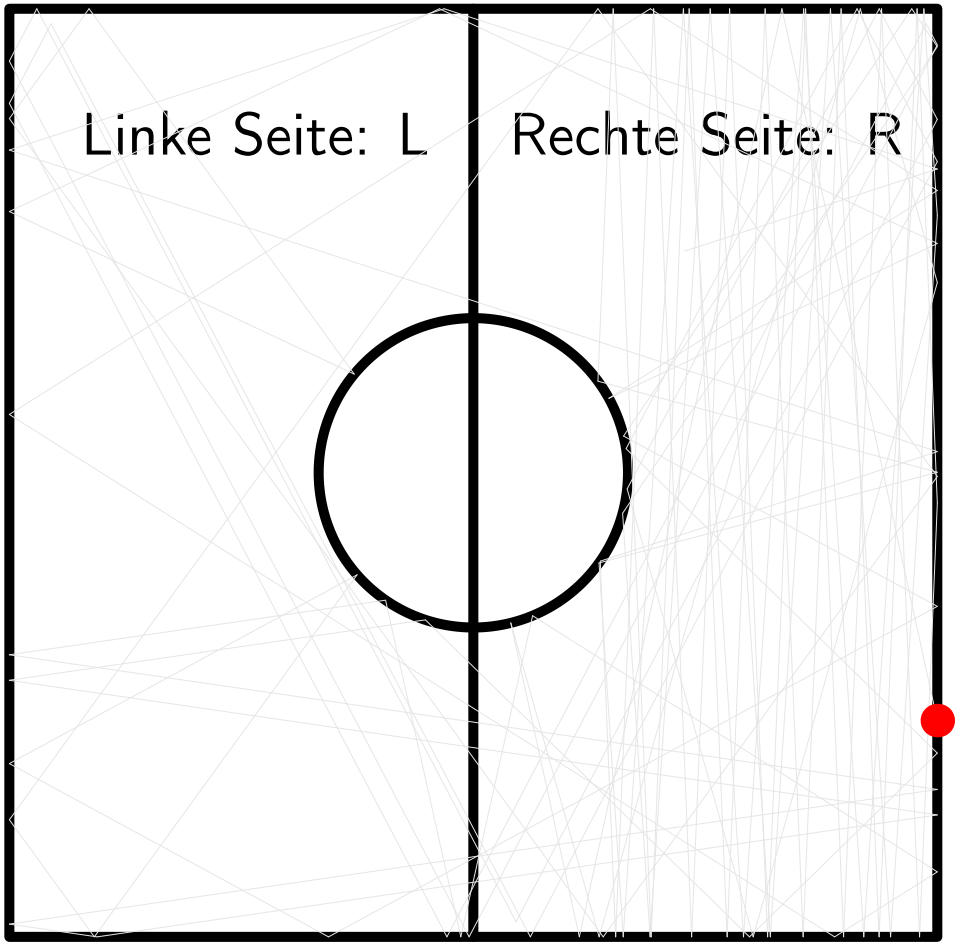
Trajektorie der Billardkugel: $R\,R$

Deterministisches Chaos zeigt Struktur



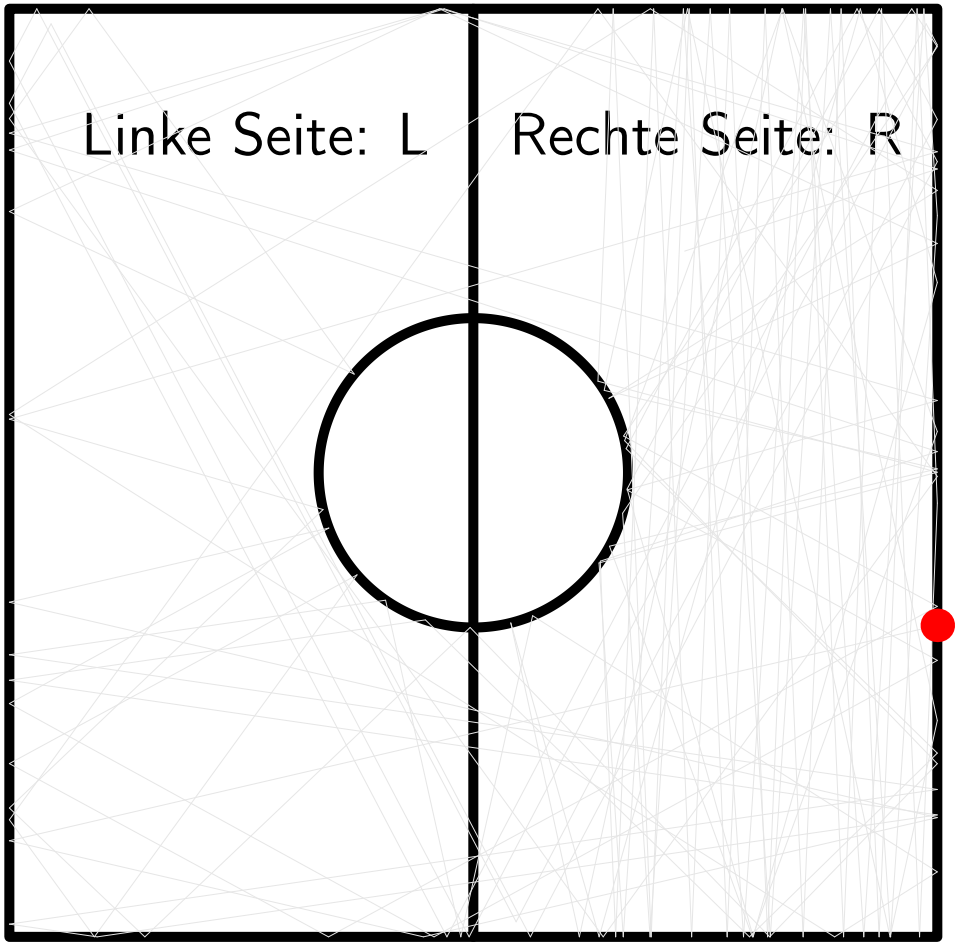
Trajektorie der Billardkugel: $R\,R\,L$

Deterministisches Chaos zeigt Struktur



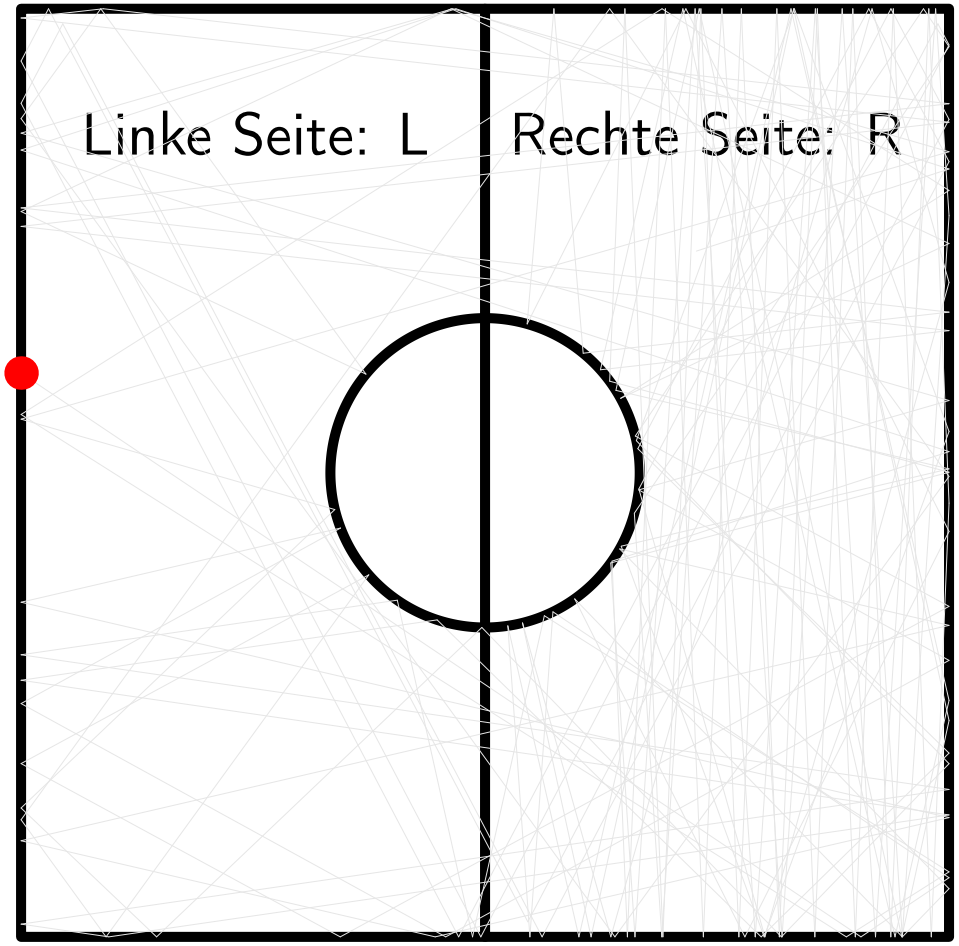
Trajektorie der Billardkugel: $R\,R\,L\,R$

Deterministisches Chaos zeigt Struktur



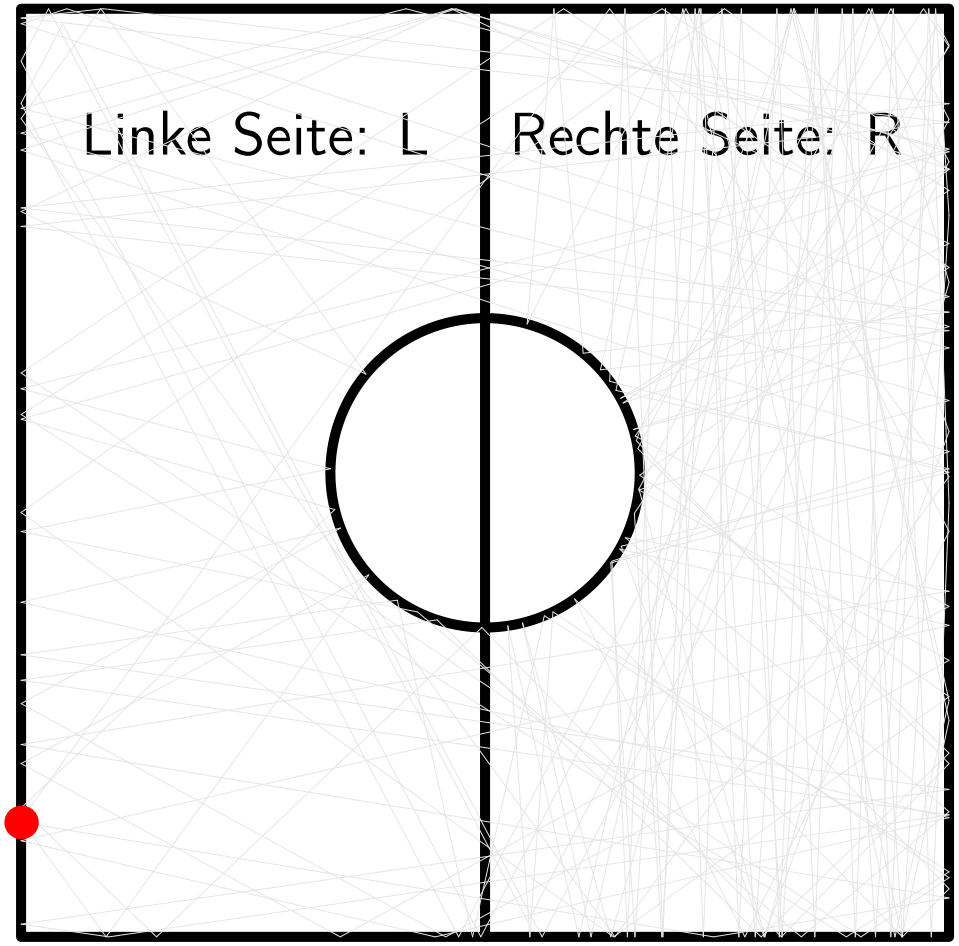
Trajektorie der Billardkugel: $R\,R\,L\,R\,R$

Deterministisches Chaos zeigt Struktur



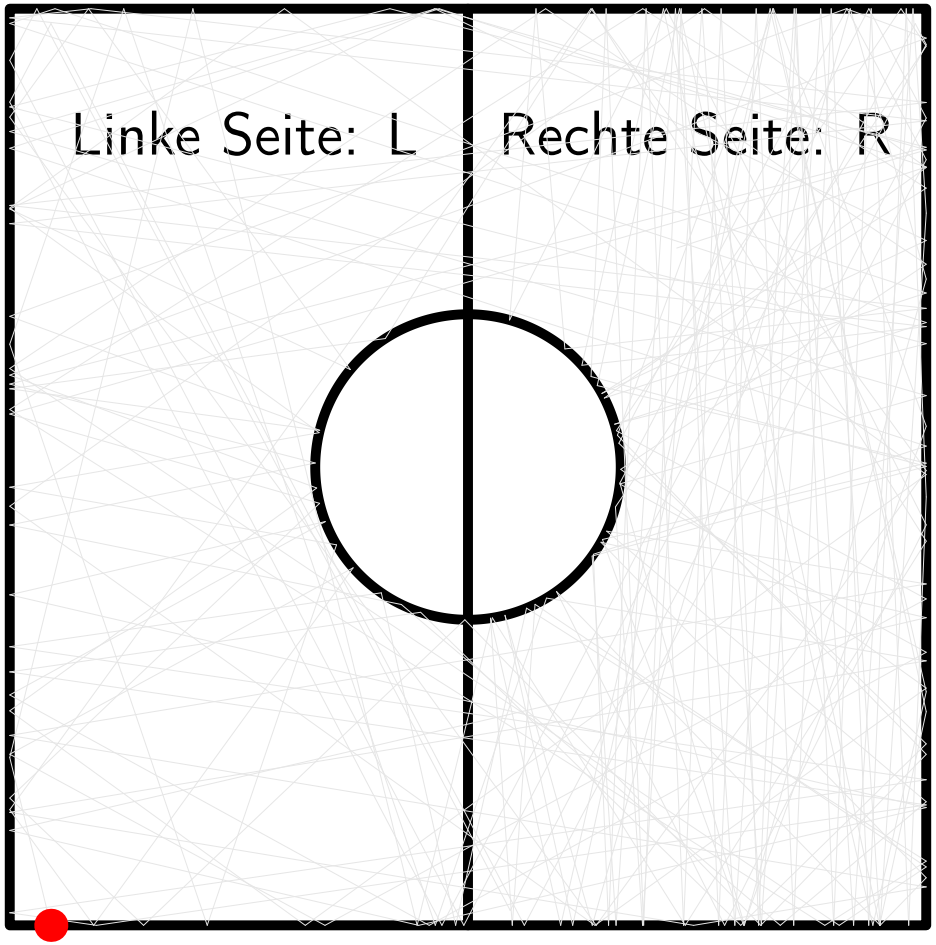
Trajektorie der Billardkugel: $R\,R\,L\,R\,R\,L$

Deterministisches Chaos zeigt Struktur



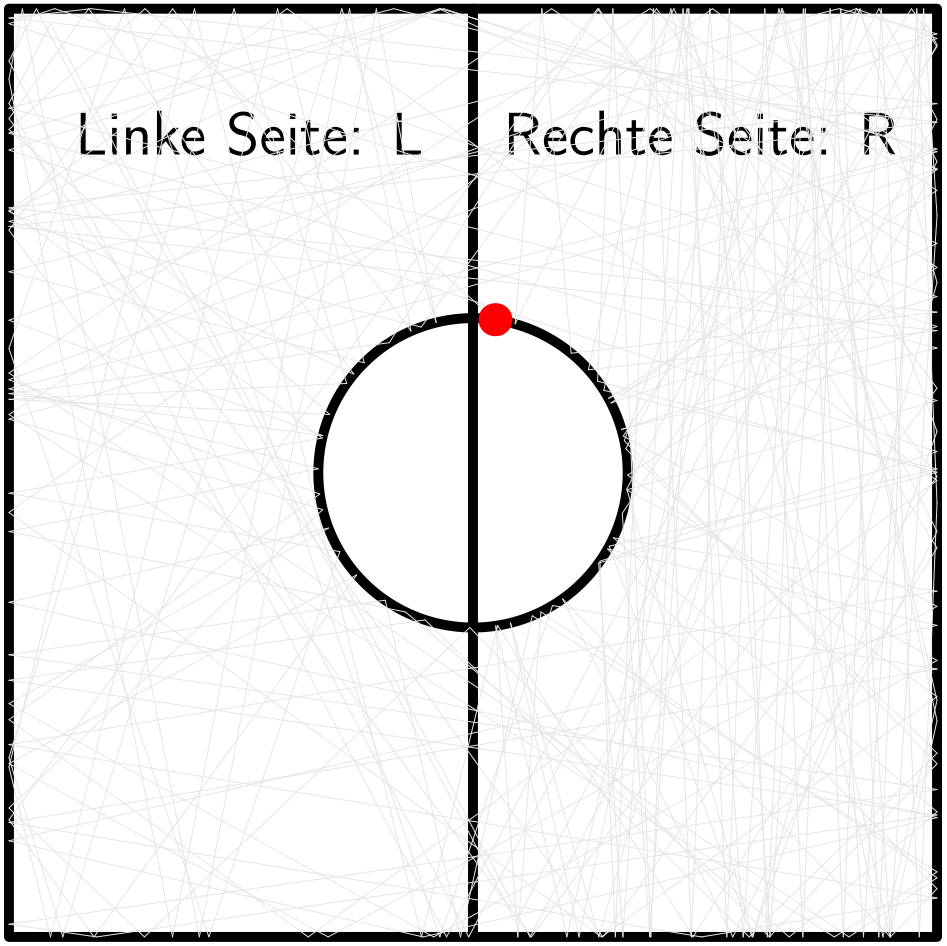
Trajektorie der Billardkugel: $R\,R\,L\,R\,R\,L\,L$

Deterministisches Chaos zeigt Struktur



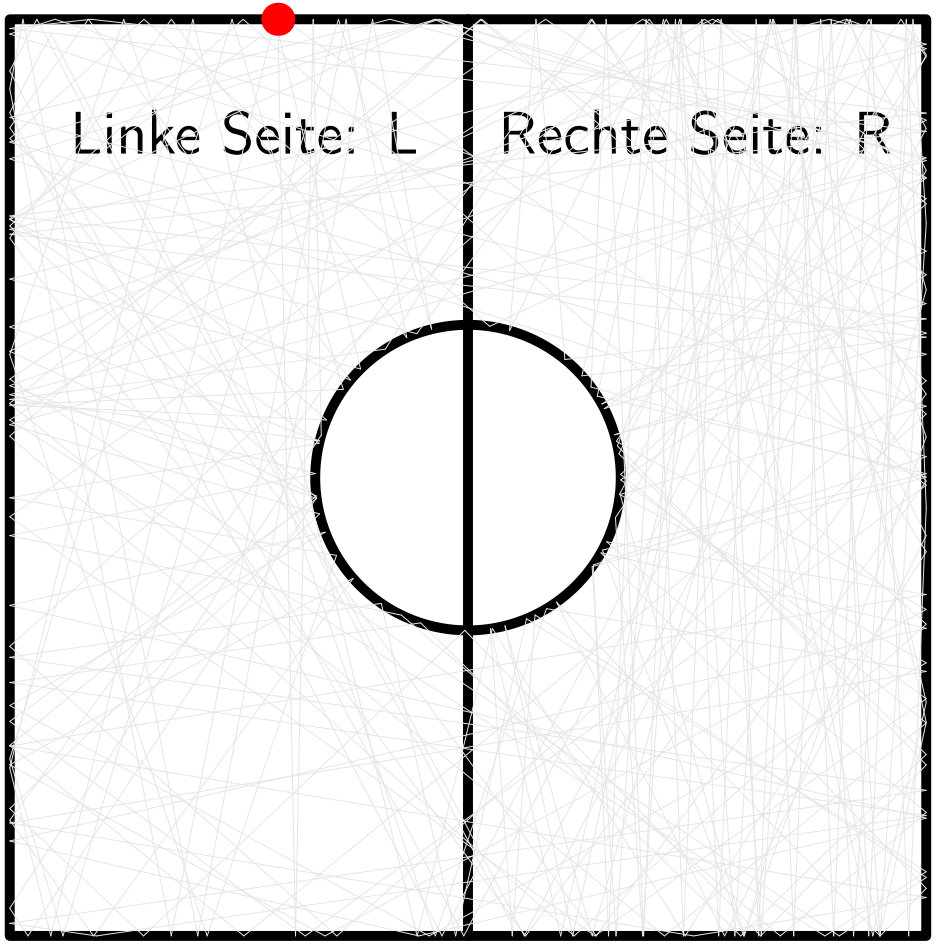
Trajektorie der Billardkugel: $R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L$

Deterministisches Chaos zeigt Struktur



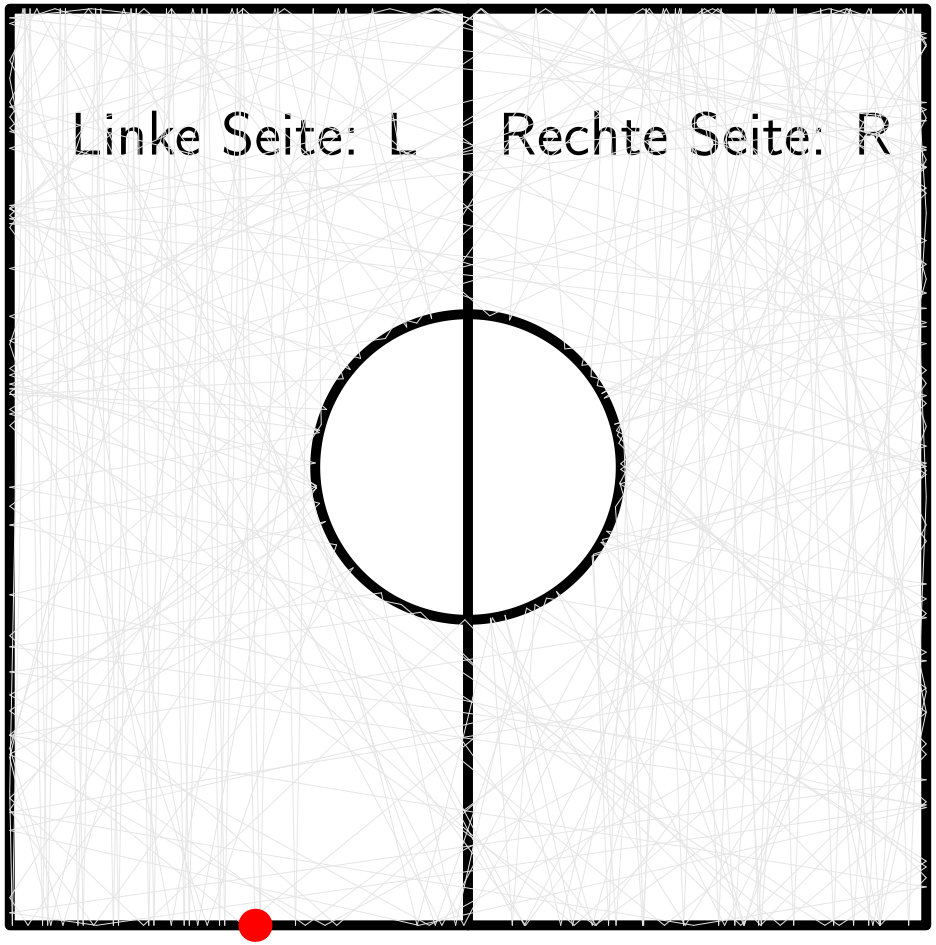
Trajektorie der Billardkugel: $R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R$

Deterministisches Chaos zeigt Struktur



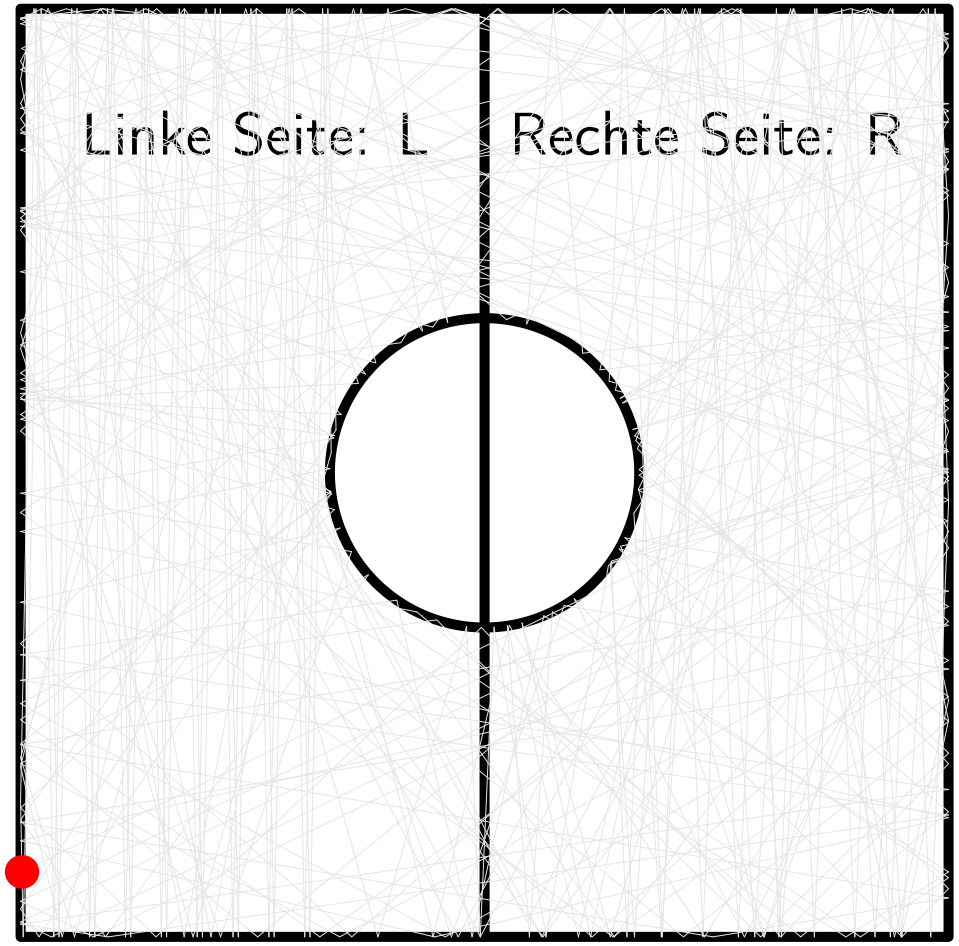
Trajektorie der Billardkugel: $R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L$

Deterministisches Chaos zeigt Struktur



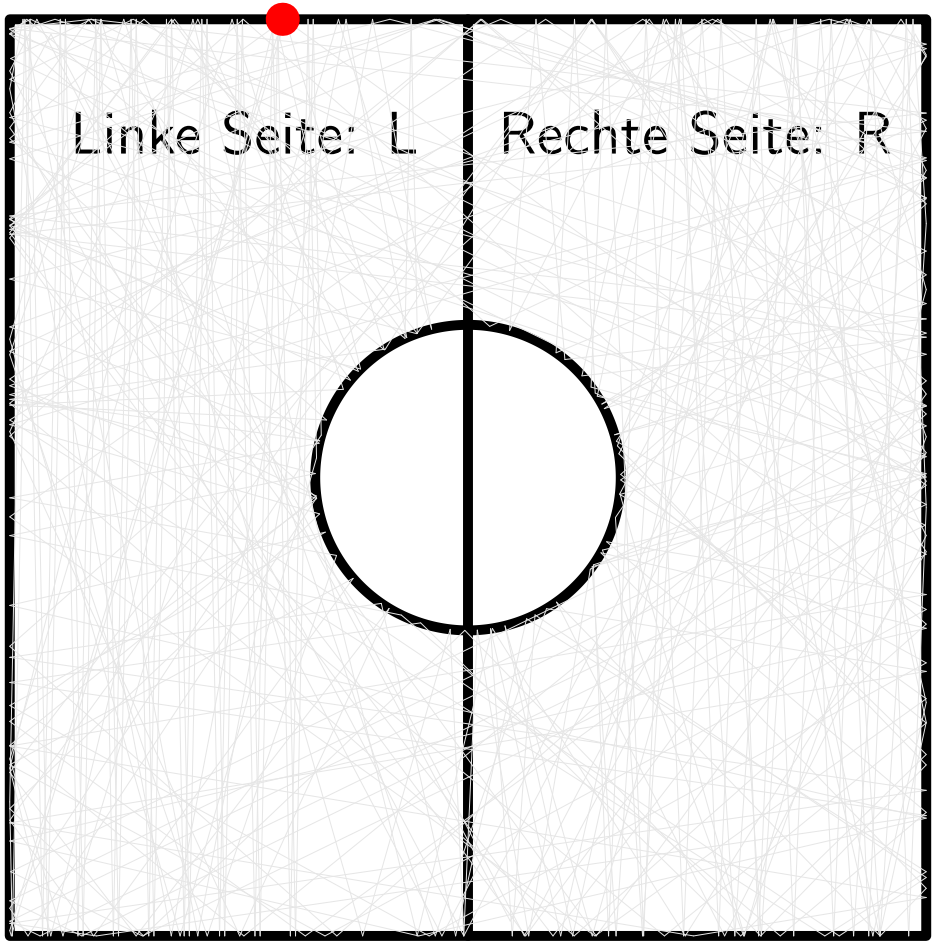
Trajektorie der Billardkugel: $R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L$

Deterministisches Chaos zeigt Struktur



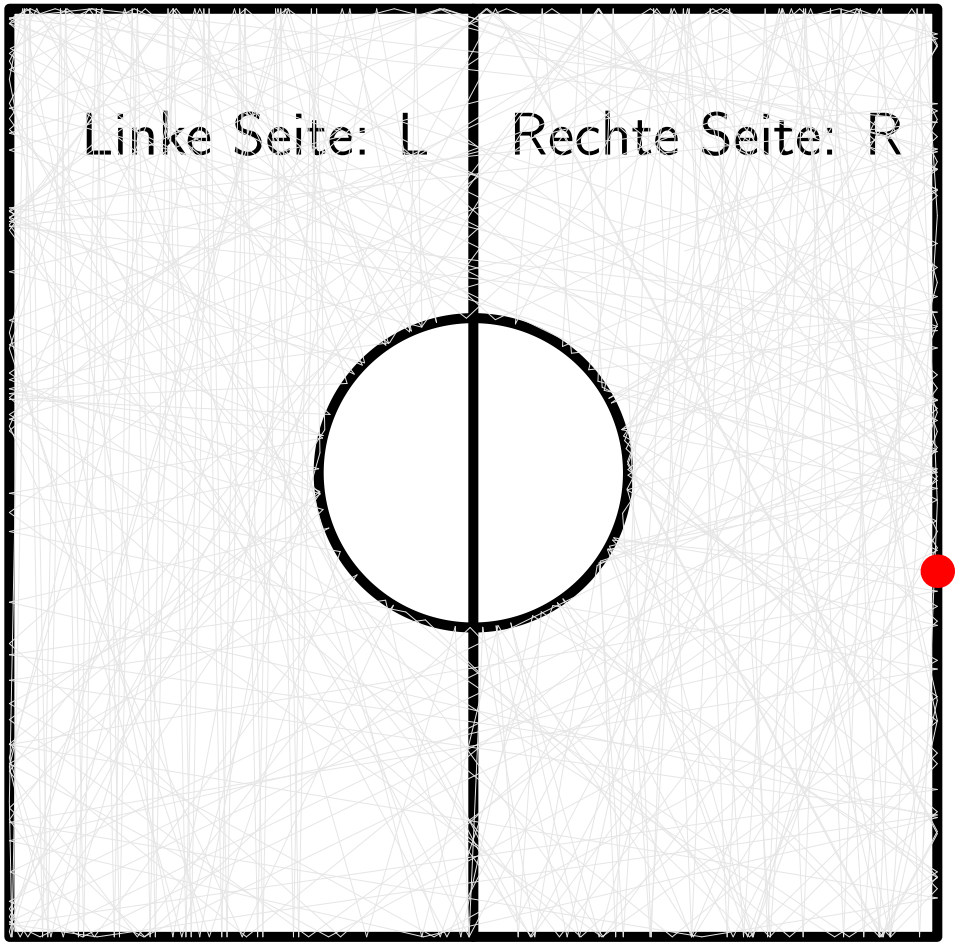
Trajektorie der Billardkugel: $R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L$

Deterministisches Chaos zeigt Struktur



Trajektorie der Billardkugel: $R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L$

Deterministisches Chaos zeigt Struktur



Trajektorie der Billardkugel: $R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$

Deterministisches Chaos zeigt Struktur

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

beschrieben werden.

Deterministisches Chaos zeigt Struktur

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

  beschrieben werden.
- Diese Symbolfolge kann aber auch als Ergebnis einer Reihe von Münzwürfen angesehen werden:

R

Deterministisches Chaos zeigt Struktur

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

  beschrieben werden.
- Diese Symbolfolge kann aber auch als Ergebnis einer Reihe von Münzwürfen angesehen werden:

R R

Deterministisches Chaos zeigt Struktur

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

  beschrieben werden.
- Diese Symbolfolge kann aber auch als Ergebnis einer Reihe von Münzwürfen angesehen werden:

R R L

Deterministisches Chaos zeigt Struktur

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

  beschrieben werden.
- Diese Symbolfolge kann aber auch als Ergebnis einer Reihe von Münzwürfen angesehen werden:

R R L R

Deterministisches Chaos zeigt Struktur

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

  beschrieben werden.
- Diese Symbolfolge kann aber auch als Ergebnis einer Reihe von Münzwürfen angesehen werden:

R R L R R

Deterministisches Chaos zeigt Struktur

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

  beschrieben werden.
- Diese Symbolfolge kann aber auch als Ergebnis einer Reihe von Münzwürfen angesehen werden:

R R L R R L

Deterministisches Chaos zeigt Struktur

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

  beschrieben werden.
- Diese Symbolfolge kann aber auch als Ergebnis einer Reihe von Münzwürfen angesehen werden:

R R L R R L L

Deterministisches Chaos zeigt Struktur

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

  beschrieben werden.
- Diese Symbolfolge kann aber auch als Ergebnis einer Reihe von Münzwürfen angesehen werden:

R R L R R L L L

Deterministisches Chaos zeigt Struktur

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

  beschrieben werden.
- Diese Symbolfolge kann aber auch als Ergebnis einer Reihe von Münzwürfen angesehen werden:

R R L R R L L L R

Deterministisches Chaos zeigt Struktur

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

  beschrieben werden.
- Diese Symbolfolge kann aber auch als Ergebnis einer Reihe von Münzwürfen angesehen werden:

R R L R R L L L R L

Deterministisches Chaos zeigt Struktur

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

  beschrieben werden.
- Diese Symbolfolge kann aber auch als Ergebnis einer Reihe von Münzwürfen angesehen werden:

R R L R R L L L R L L

Deterministisches Chaos zeigt Struktur

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

  beschrieben werden.
- Diese Symbolfolge kann aber auch als Ergebnis einer Reihe von Münzwürfen angesehen werden:

R R L R R L L L R L L L

Deterministisches Chaos zeigt Struktur

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

  beschrieben werden.
- Diese Symbolfolge kann aber auch als Ergebnis einer Reihe von Münzwürfen angesehen werden:

R R L R R L L L R L L L L

Deterministisches Chaos zeigt Struktur

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

  beschrieben werden.
- Diese Symbolfolge kann aber auch als Ergebnis einer Reihe von Münzwürfen angesehen werden:

R R L R R L L L R L L L L R ...

Deterministisches Chaos zeigt Struktur – und verhält sich auf lange Sicht wie eine Serie zufälliger Münzwürfe

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

  beschrieben werden.
- Diese Symbolfolge kann aber auch als Ergebnis einer Reihe von Münzwürfen angesehen werden:

R R L R R L L L R L L L L R ...

- Bezüglich dieser Beschreibung sind deterministische Trajektorien und zufällige Münzwürfe nicht zu unterscheiden

Deterministisches Chaos zeigt Struktur – und verhält sich auf lange Sicht wie eine Serie zufälliger Münzwürfe

- Trajektorie der Billardkugel kann durch Symbolfolge

$$R\,R\,L\,R\,R\,L\,L\,L\,R\,L\,L\,L\,L\,R\,\cdots$$

  beschrieben werden.
- Diese Symbolfolge kann aber auch als Ergebnis einer Reihe von Münzwürfen angesehen werden:

R R L R R L L L R L L L L R ...

- Bezüglich dieser Beschreibung sind deterministische Trajektorien und zufällige Münzwürfe nicht zu unterscheiden
- deterministisches Chaos *ist* Zufall

Section 4

Zusammenfassung

Zusammenfassung

Schmetterlingseffekt

- deterministische Systeme zeigen oft Sensitivität gegenüber kleinen Änderungen in den Anfangsbedingungen ("Schmetterlingseffekt")

Zusammenfassung

Schmetterlingseffekt ergibt Chaos

- deterministische Systeme zeigen oft Sensitivität gegenüber kleinen Änderungen in den Anfangsbedingungen ("Schmetterlingseffekt")
- ihr Verhalten wird dann unberechenbar und chaotisch

Zusammenfassung

Schmetterlingseffekt ergibt Chaos ergibt Zufall

- deterministische Systeme zeigen oft Sensitivität gegenüber kleinen Änderungen in den Anfangsbedingungen ("Schmetterlingseffekt")
- ihr Verhalten wird dann unberechenbar und chaotisch
- dieses Chaos ist aber nicht total chaotisch, sondern "zufällig"

Zusammenfassung

Schmetterlingseffekt ergibt Chaos ergibt Zufall

- deterministische Systeme zeigen oft Sensitivität gegenüber kleinen Änderungen in den Anfangsbedingungen ("Schmetterlingseffekt")
- ihr Verhalten wird dann unberechenbar und chaotisch
- dieses Chaos ist aber nicht total chaotisch, sondern "zufällig"
- Zufall ist mathematisch beschreibbar

Zusammenfassung

Schmetterlingseffekt ergibt Chaos ergibt Zufall

- deterministische Systeme zeigen oft Sensitivität gegenüber kleinen Änderungen in den Anfangsbedingungen ("Schmetterlingseffekt")
- ihr Verhalten wird dann unberechenbar und chaotisch
- dieses Chaos ist aber nicht total chaotisch, sondern "zufällig"
- Zufall ist mathematisch beschreibbar
- und erlaubt insbesondere statistische Aussagen

Zusammenfassung

Schmetterlingseffekt ergibt Chaos ergibt Zufall

- deterministische Systeme zeigen oft Sensitivität gegenüber kleinen Änderungen in den Anfangsbedingungen ("Schmetterlingseffekt")
- ihr Verhalten wird dann unberechenbar und chaotisch
- dieses Chaos ist aber nicht total chaotisch, sondern "zufällig"
- Zufall ist mathematisch beschreibbar
- und erlaubt insbesondere statistische Aussagen

Vielen Dank!