Messen bei Euklid 2

Felix Unold – 10.11.2020

Proseminar: Beispiele geometrischer Strukturen

Prof. Dr. Moritz Weber

Überblick

- Buch 10: Inkommensurable Größen
- Pythagoräer
- Der goldene Schnitt
- Kreiszahl Pi

Buch 10: Inkommensurable Größen

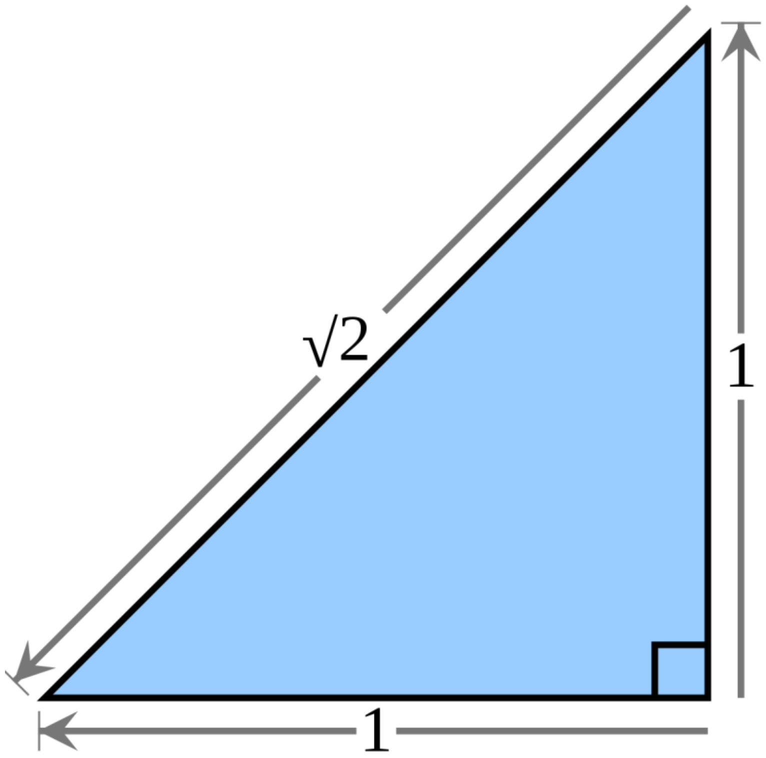
- Vermutlich nicht von Euklid selbst geschrieben sondern von Theaitetos

- Definition *Inkommensurable Größen*: zwei gleichartige Größen, die mit keiner Maßeinheit gleichzeitig in ganzen Zahlen gemessen werden können.

Buch 10: Inkommensurable Größen

- Berühmter Beweis: Irrationalität der Wurzel aus 2

.

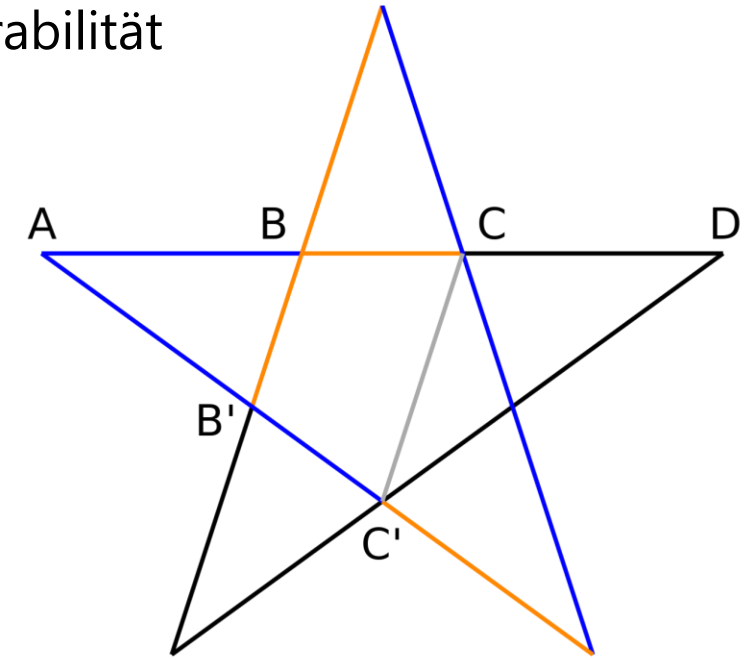


Pythagoräer

- In Süditalien lebende politische und philosophische Sekte um Pythagoras von Samos
- U.a. sehr großer Glauben an Zahlensymbolik, zB:
  - Tetraktys („Vierheit“) und das Dezimalsystem
  - natürliche Zahlen sind von Göttern gegeben (insb. gibt es keine irrationalen Zahlen)

Pythagoräer

- Aber: ein Pythagoräer, Hippasos von Metapont, entdeckte die Inkommensurabilität



- Und damit auch ganz zufällig den Golden Schnitt

Der goldene Schnitt

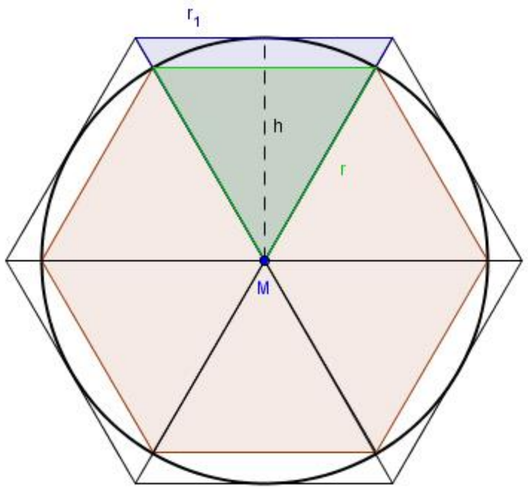
“PHI is one H of a lot cooler than PI!”

- Dan Brown, The Da Vinci Code

$$1{,}618034 < 3{,}141593$$

Kreiszahl Pi

- Auch vor den Griechen war den Ägyptern ein festes Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser bekannt
- Archimedes konnte Pi schon auf zwei Dezimalzahlen genau angeben



- Benötigte dafür allerdings ein 96-Eck

Kreiszahl Pi

- Durch die fortgeschrittene Entwicklung der Algebra in der Renaissance (und die Entdeckung der Analysis) liegt kaum noch Fokus auch der geometrischen Bestimmung.
- Es werden hauptsächlich Reihenentwicklungen verwendet:

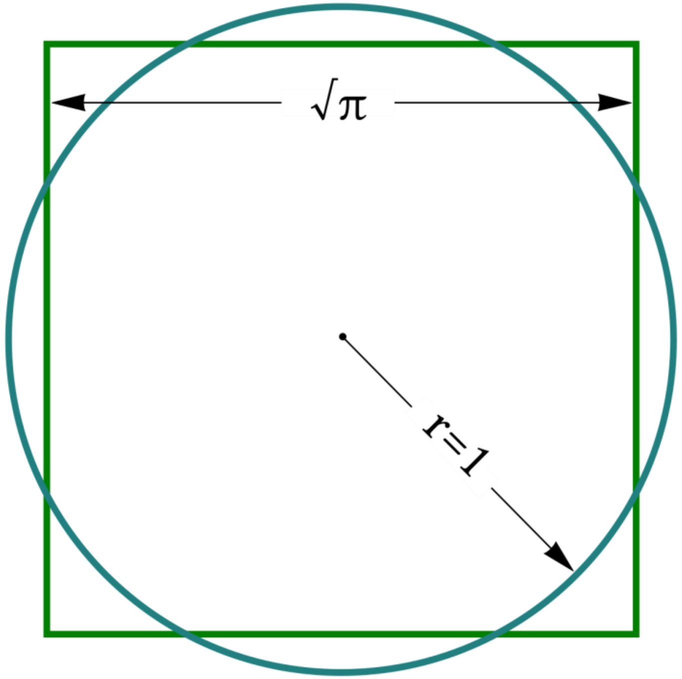
Chudnovsky-Algorithmus

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)! (545140134k + 13591409)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}}$$

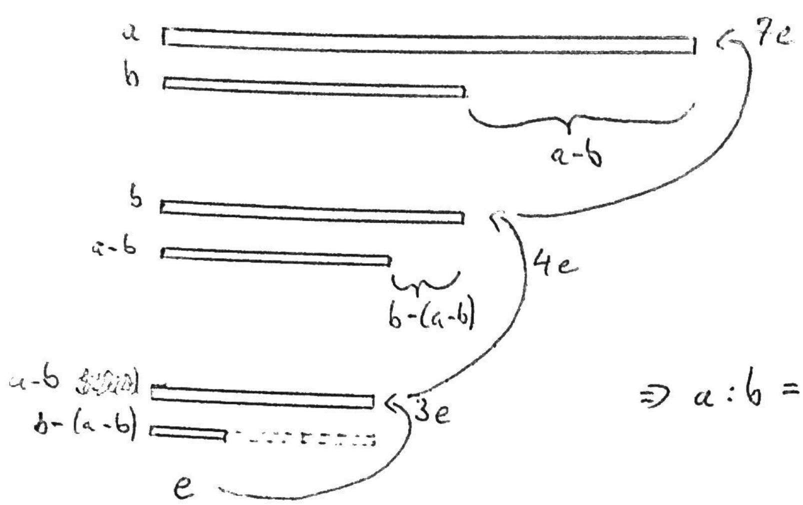
(2020: ca. 50 Billionen Dezimalstellen, bei 303 Tagen Rechenzeit)

Kreiszahl Pi

- Die Quadratur des Kreises

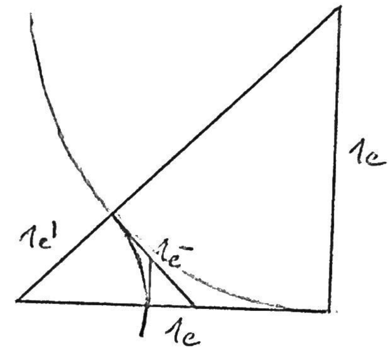


Wechselwegnahme:

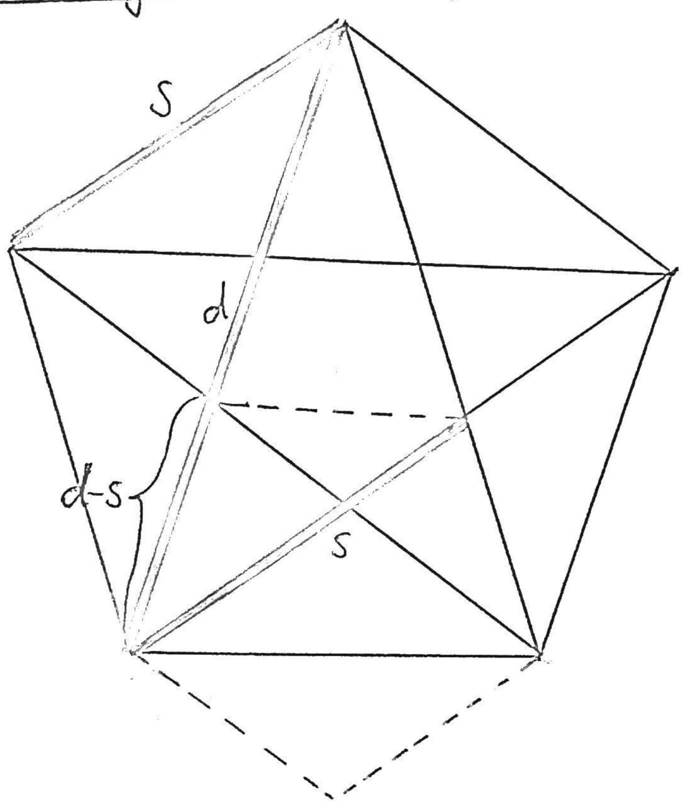


$\Rightarrow a : b = 7e : 4e$

Irrationalität von $\sqrt{2}$:



Wechselwegnahme am Pentagramm:



$$\Rightarrow \frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$$

$$s' := d-s$$

$$d' := s$$

$$\Rightarrow \frac{d'}{s'} = \frac{s'}{d'-s'}$$