Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Universität des Saarlandes

24.11.2020

Inhalt

1 Geschichte
- Euklid
- Die 5 Postulate
- Das 5. Postulat
- Das Parallelenpostulat

2 Die hyperbolische Geometrie
- Die Begründer
- Die Konstruktion
  - Die obere Halbebene
  - Distanz
- Geodäten

3 Dreiecke
- Winkel
- Fläche
- Gauß-Bonnet

Euklid

Geschichte
- Euklid
- Die 5 Postulate
- Das 5. Postulat
- Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
- Die Begründer
- Die Konstruktion
  - Die obere Halbebene
  - Distanz
- Geodäten

Dreiecke
- Winkel
- Fläche
- Gauß-Bonnet

- 300 vor Christus

Euklid

- 300 vor Christus
- "Die Elemente"

Euklid

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- 300 vor Christus
- "Die Elemente"
- ebene Geometrie

Euklid

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- 300 vor Christus
- "Die Elemente"
- ebene Geometrie
- axiomatischer Aufbau mit 5 Postulaten

Die 5 Postulate

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

1. Von einem Punkt zu einem anderen Punkt kann man eine Strecke ziehen

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Die 5 Postulate

1. Von einem Punkt zu einem anderen Punkt kann man eine Strecke ziehen
2. Man kann eine Strecke zu einer Geraden verlängern

Die 5 Postulate

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

1. Von einem Punkt zu einem anderen Punkt kann man eine Strecke ziehen
2. Man kann eine Strecke zu einer Geraden verlängern
3. Man kann einen Kreis mit jedem gegebenen Radius und jedem gegebenen Mittelpunkt zeichnen

Die 5 Postulate

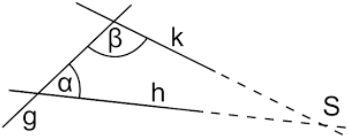
1. Von einem Punkt zu einem anderen Punkt kann man eine Strecke ziehen
2. Man kann eine Strecke zu einer Geraden verlängern
3. Man kann einen Kreis mit jedem gegebenen Radius und jedem gegebenen Mittelpunkt zeichnen
4. Alle rechten Winkel sind einander gleich

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Die 5 Postulate

1. Von einem Punkt zu einem anderen Punkt kann man eine Strecke ziehen
2. Man kann eine Strecke zu einer Geraden verlängern
3. Man kann einen Kreis mit jedem gegebenen Radius und jedem gegebenen Mittelpunkt zeichnen
4. Alle rechten Winkel sind einander gleich
5. Wenn bei einer Geraden, die zwei andere Geraden schneidet, die Summe der beiden Innenwinkel (Nachbarwinkel) an der gleichen Seite kleiner ist als die Summe von zwei rechten Winkeln, so werden sich die beiden Geraden auf der Seite schneiden, an der sich diese beiden Winkel befinden

Das 5. Postulat



$\Rightarrow$ nicht unbedingt evident

$\Rightarrow$ Versuch aus ersten 4 Postulaten zu beweisen oder Versuch einer Umformulierung

eine Parallele

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Definition (Parallele nach Euklid)

Parallele Geraden sind Geraden, die in derselben Ebene liegen und sich in beide Richtungen bis ins Unendliche verlängert in keinem Punkt schneiden.

Das Parallelenpostulat

Theorem (Parallelenpostulat)

Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden verläuft genau eine Gerade, die parallel zu dieser ist.

Das Parallelenpostulat

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Theorem (Parallelenpostulat)

Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden verläuft genau eine Gerade, die parallel zu dieser ist.

- John Playfair (1748-1819)

Das Parallelenpostulat

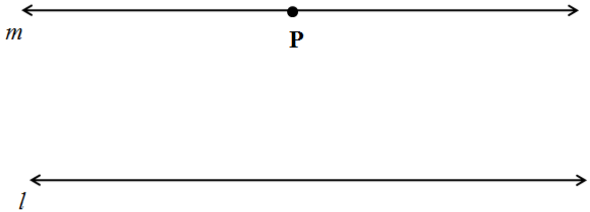
Theorem (Parallelenpostulat)

Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden verläuft genau eine Gerade, die parallel zu dieser ist.

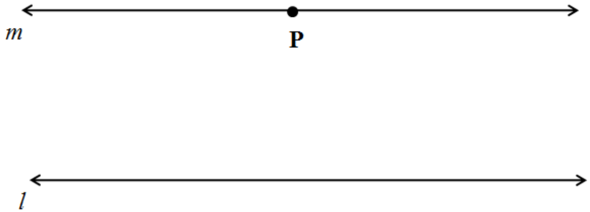
- John Playfair (1748-1819)
- 1795 veröffentlicht

Das Parallelenpostulat

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

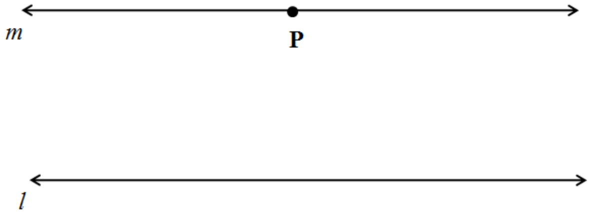


Das Parallelenpostulat



- äquivalent zu Euklids 5tem Postulat

Das Parallelenpostulat



- äquivalent zu Euklids 5tem Postulat
- Versuche Widerspruchsbeweis zu führen

Das Parallelenpostulat

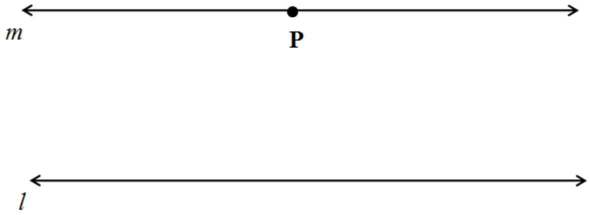
Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet



- äquivalent zu Euklids 5tem Postulat
- Versuche Widerspruchsbeweis zu führen
- auch diese scheiterten

$\rightarrow$ neue Idee: die ersten 4 + Negation des 5.

Die Begründer

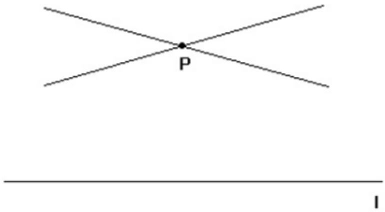
(a) János Bolyai (1802 - 1860)

(b) N.I.Lobačevskii (1792-1856)

(c) C.F. Gauß (1777 - 1855)

die Idee

- Parallelenpostulat durch Negation ersetzt
- Es gibt mehrere zu einer Geraden l parallele Geraden, die durch einen Punkt P verlaufen, welcher nicht auf l liegt ($\rightarrow$ hyperbolisch)



$\rightarrow$ kein Widerspruch sondern neue Geometrie

Was ist eigentlich Geometrie?

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- Definition einer Menge z.B.: $\mathbb{R}^2$

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Was ist eigentlich Geometrie?

- Definition einer Menge z.B.: $\mathbb{R}^2$
- Definition einer Metrik
  z.B.: $\delta(x,y)=\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$

Was ist eigentlich Geometrie?

- Definition einer Menge z.B.: $\mathbb{R}^2$
- Definition einer Metrik
  z.B.: $\delta(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$
- Untersuchung von Transformationen, die die Abstände zwischen Punkten erhalten z.B.: Rotation, Translation

Felix Klein (1849-1929): "Given a set with some structure and a group of transformations that preserve that structure,geometry is the study of objects that are invariant under these transformations."

Modelle

- Wie konsistent ist diese neue Geometrie?

Modelle

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- Wie konsistent ist diese neue Geometrie?
- zur Überprüfung: Angabe von Modellen

Modelle

- Wie konsistent ist diese neue Geometrie?
- zur Überprüfung: Angabe von Modellen
- bekannte mathematische Strukturen
- erfüllen Axiome und Postulate

Modelle

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- Wie konsistent ist diese neue Geometrie?

- zur Überprüfung: Angabe von Modellen

- bekannte mathematische Strukturen
- erfüllen Axiome und Postulate

- Realisierung der Geometrie innerhalb des Modells

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Modelle

- Darstellung der hyperbolischen Ebene

Modelle

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- Darstellung der hyperbolischen Ebene
- Existenz mehrerer Darstellungen

Modelle

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- Darstellung der hyperbolischen Ebene
- Existenz mehrerer Darstellungen
- Wahl eines Modells ist unabhängig

Modelle

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- Darstellung der hyperbolischen Ebene
- Existenz mehrerer Darstellungen
- Wahl eines Modells ist unabhängig
- Umrechnungen möglich

Modelle

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- Darstellung der hyperbolischen Ebene
- Existenz mehrerer Darstellungen
- Wahl eines Modells ist unabhängig
- Umrechnungen möglich
- Aussagen bleiben erhalten

Die obere Halbebene

Definition (obere Halbebene)

$\mathbb{H} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0 \,\}$

Die obere Halbebene

Definition (obere Halbebene)

$$\mathbb{H} = \{ \ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0 \ \}$$

Definition (Rand der Halbebene)

$$\partial\mathbb{H} = \{ \ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0 \ \} \cup \{\infty\}$$

Die obere Halbebene

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Definition (obere Halbebene)

$\mathbb{H} = \{ \ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0 \ \}$

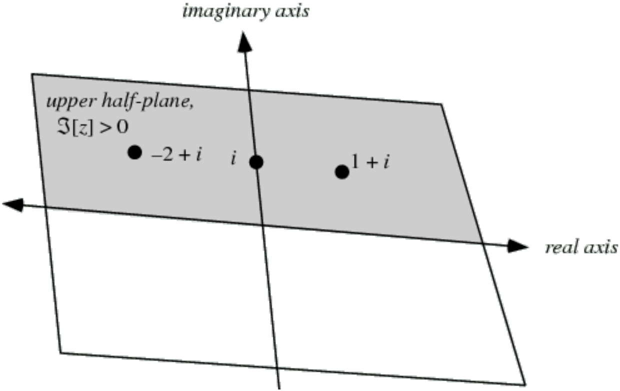
Definition (Rand der Halbebene)

$\partial\mathbb{H} = \{ \ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0 \ \} \cup \{\infty\}$

- Rand nennt man auch "circle at infinity"
- ∞ ist definierter Punkt (z.B.: $\frac{1}{x} \to 0$ für x gegen ∞)

Die obere Halbebene

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet



Wegintegrale

Definition (Weg)

Bild einer stetigen Funktion σ : [a,b] $\longrightarrow \mathbb{C}$, wobei σ diff'bar und σ' stetig.

Bildlich also eine durchgehende Kurve in der Ebene.

σ(a) und σ(b) nennt man Endpunkte.

Die Funktion σ ist eine Parametrisierung.

Wegintegrale

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Definition (Weg)

Bild einer stetigen Funktion σ : [a,b] $\longrightarrow \mathbb{C}$, wobei σ diff'bar und σ' stetig.
Bildlich also eine durchgehende Kurve in der Ebene.
σ(a) und σ(b) nennt man Endpunkte.
Die Funktion σ ist eine Parametrisierung.

Definition (Weglänge)

$$L(\sigma) = \int_\sigma \frac{1}{Im(z)} = \int_b^a \frac{|\sigma(t)'|}{Im(\sigma(t))} dt$$

Wegintegrale

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

$\rightarrow$ Längenberechnung von Wegen

Wegintegrale

$\rightarrow$ Längenberechnung von Wegen
$\rightarrow$ zwischen 2 gegebenen Punkte alle Wege berechnen

Wegintegrale

$\rightarrow$ Längenberechnung von Wegen
$\rightarrow$ zwischen 2 gegebenen Punkte alle Wege berechnen
$\rightarrow$ nimm den Kürzesten

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie
Dean Zenner
Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Wegintegrale

$\rightarrow$ Längenberechnung von Wegen
$\rightarrow$ zwischen 2 gegebenen Punkte alle Wege berechnen
$\rightarrow$ nimm den Kürzesten

Definition (hyperbolischer Abstand)

Sei z,z' $\in \mathbb{H}$.
$\delta_{\mathbb{H}}(\text{z}, \text{z'}) = \inf\{\text{L}(\sigma); \sigma \text{ Weg von z nach z'}\}$

$\rightarrow$ erfüllt Eigenschaften einer Metrik

Geodäten

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- kürzeste Strecke zwischen 2 gegeben Punkten nennen wir jetzt Geodäte

Geodäten

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- kürzeste Strecke zwischen 2 gegeben Punkten nennen wir jetzt Geodäte
- existent und eindeutig

Geodäten

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

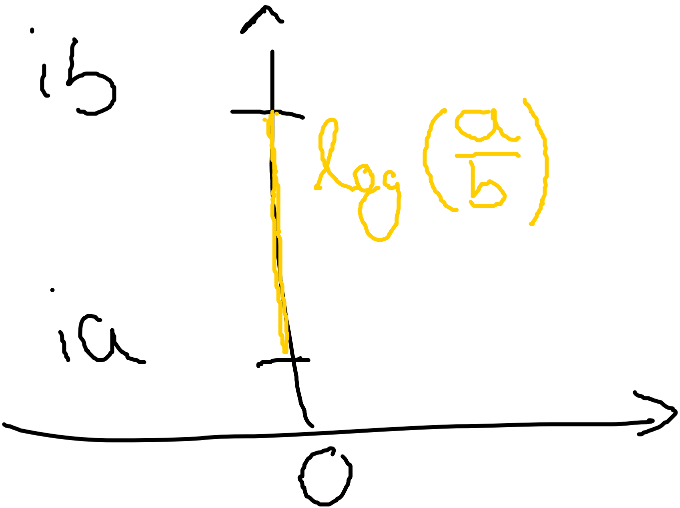
- kürzeste Strecke zwischen 2 gegeben Punkten nennen wir jetzt Geodäte
- existent und eindeutig
- die imaginäre Achse ist eine Geodäte

Geodäten

Theorem

Sei $a \leqslant b$. Der hyperbolische Abstand zwischen ia und ib ist $\log(\frac{a}{b})$. Die vertikale Linie zwischen ia und ib ist der eindeutige Weg mit dieser Länge. Jeder andere Weg ist länger.

Geodäten



Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Geodäten

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

Sei $\sigma(t) = it$, $a \leqslant t \leqslant b$.

Geodäten

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

Sei $\sigma(\mathrm{t}) = \mathrm{it}$, $\mathrm{a} \leqslant \mathrm{t} \leqslant \mathrm{b}$. Es gilt

$\mathrm{L}(\sigma) = \int_\sigma \frac{1}{\mathrm{Im(z)}} = \int_\mathrm{b}^\mathrm{a} \frac{|\sigma(\mathrm{t})'|}{\mathrm{Im}(\sigma(\mathrm{t}))}\mathrm{dt}$

Geodäten

Beweis.

Sei $\sigma(t) = it$, $a \leqslant t \leqslant b$. Es gilt

$$L(\sigma) = \int_\sigma \frac{1}{\mathrm{Im}(z)} = \int_b^a \frac{|\sigma(t)'|}{\mathrm{Im}(\sigma(t))} dt = \int_b^a \frac{1}{t} dt = \log \frac{a}{b}$$

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

Sei $\sigma(t) = \mathrm{i}t$, $a \leqslant t \leqslant b$. Es gilt

$$L(\sigma) = \int_\sigma \frac{1}{\mathrm{Im}(z)} = \int_b^a \frac{|\sigma(t)'|}{\mathrm{Im}(\sigma(t))} dt = \int_b^a \frac{1}{t} dt = \log \frac{a}{b}$$

Sei $\sigma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{H}$ ein beliebiger Weg von ia nach ib.

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

Sei $\sigma(t) = \mathrm{i}t$, $a \leqslant t \leqslant b$. Es gilt

$$L(\sigma) = \int_\sigma \frac{1}{\mathrm{Im}(z)} = \int_b^a \frac{|\sigma(t)'|}{\mathrm{Im}(\sigma(t))} dt = \int_b^a \frac{1}{t} dt = \log \frac{a}{b}$$

Sei $\sigma(t) = x(t) + iy(t) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{H}$ ein beliebiger Weg von ia nach ib. Dann

$$L(\sigma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^{\ 2}}}{y(t)}$$

Geodäten

Beweis.

Sei $\sigma(t) = it$, $a \leqslant t \leqslant b$. Es gilt

$$L(\sigma) = \int_\sigma \frac{1}{\mathrm{Im}(z)} = \int_b^a \frac{|\sigma(t)'|}{\mathrm{Im}(\sigma(t))} dt = \int_b^a \frac{1}{t} dt = \log \frac{a}{b}$$

Sei $\sigma(t) = x(t) + iy(t) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{H}$ ein beliebiger Weg von ia nach ib. Dann

$$L(\sigma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^{\ 2}}}{y(t)} \geqslant \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt$$

Geodäten

Beweis.

Sei $\sigma(\mathrm{t}) = \mathrm{it}$, a$\leqslant$t$\leqslant$b. Es gilt

$$L(\sigma) = \int_\sigma \frac{1}{\mathrm{Im(z)}} = \int_b^a \frac{|\sigma(t)'|}{\mathrm{Im}(\sigma(t))}dt = \int_b^a \frac{1}{t}dt = \log\frac{a}{b}$$

Sei $\sigma(t)= x(t)+ iy(t)$:[0,1] $\longrightarrow \mathbb{H}$ ein beliebiger Weg von ia nach ib. Dann

$$L(\sigma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^{\ 2}}}{y(t)} \geqslant \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)}dt \geqslant \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)}dt$$

Geodäten

Beweis.

Sei $\sigma(t) = it$, $a \leqslant t \leqslant b$. Es gilt

$$L(\sigma) = \int_\sigma \frac{1}{\mathrm{Im}(z)} = \int_b^a \frac{|\sigma(t)'|}{\mathrm{Im}(\sigma(t))} dt = \int_b^a \frac{1}{t} dt = \log \frac{a}{b}$$

Sei $\sigma(t) = x(t) + iy(t) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{H}$ ein beliebiger Weg von ia nach ib. Dann

$$L(\sigma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^{\ 2}}}{y(t)} \geqslant \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geqslant \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt$$
$$= \log(y(z))\Big|_0^1$$
$$= \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

□

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Geodäten

Beweis.

Zur Eindeutigkeit müssen wir noch strikte Ungleichheit beweisen. Dies zeigen wir durch die Annahme einer Gleichheit.

Geodäten

Beweis.

Zur Eindeutigkeit müssen wir noch strikte Ungleichheit beweisen. Dies zeigen wir durch die Annahme einer Gleichheit.

Zur 1. Ungleichheit: Genau dann wenn $x'(t)=0$. D.h, dass $x(t)$ konstant. Also schon bereits die vertikale Linie.

Geodäten

Beweis.

Zur Eindeutigkeit müssen wir noch strikte Ungleichheit beweisen. Dies zeigen wir durch die Annahme einer Gleichheit.

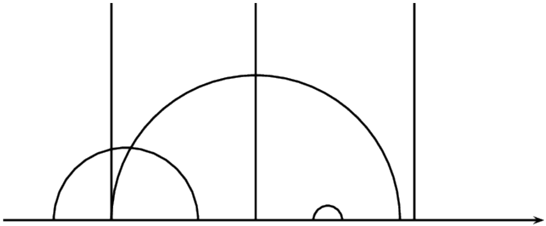
Zur 1. Ungleichheit: Genau dann wenn $x'(t)=0$. D.h, dass $x(t)$ konstant. Also schon bereits die vertikale Linie.

Zur 2. Ungleichheit: Genau dann wenn $|y'(t)| = y'(t)$. Also ist $y(t)$ monoton wachsend. □

Geodäten

Theorem

Die Geodäten in unserem hyperbolischen Raum sind die vertikalen Linien und die Halbkreise, die orthogonal auf unsere reelle Achse treffen.
Für 2 gegebene Punkte existiert stets eine Geodäte.



Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Möbiustransformationen

- $\mathcal{H}$ = Menge aller vertikalen Linien und Halbkreise, die orthogonal auf die reelle Achse treffen

Möbiustransformationen

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- $\mathcal{H}$ = Menge aller vertikalen Linien und Halbkreise, die orthogonal auf die reelle Achse treffen
- Sei a,b,c,d $\in \mathbb{R}$ und ad-bc > 0. Dann ist $\gamma : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ mit $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ eine Möbiustransformation

Möbiustransformationen

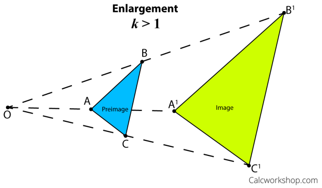
- $\mathcal{H}$ = Menge aller vertikalen Linien und Halbkreise, die orthogonal auf die reelle Achse treffen

- Sei a,b,c,d $\in \mathbb{R}$ und ad-bc > 0. Dann ist $\gamma : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ mit $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ eine Möbiustransformation

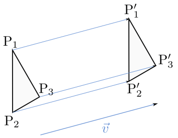
- Möb($\mathbb{H}$) = Menge aller Möbiustransformationen

Möbiustransformationen

- Dilation $z \rightarrow kz$ $(k>0)$ (Verlängern,Ausdehnen)
- Translation $z \rightarrow z+b$ (Parallelverschiebung)



(a) Dilation



(b) Translation

Möbiustransformationen

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- falls $\gamma \in$ Möb($\mathbb{H}$) dann $\gamma^{-1} \in$ Möb($\mathbb{H}$)

Möbiustransformationen

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- falls $\gamma \in$ Möb($\mathbb{H}$) dann $\gamma^{-1} \in$ Möb($\mathbb{H}$)
- Sei h $\in \mathcal{H}$ dann γ(h) $\in \mathcal{H}$

Möbiustransformationen

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- falls $\gamma \in$ Möb($\mathbb{H}$) dann $\gamma^{-1} \in$ Möb($\mathbb{H}$)
- Sei h $\in \mathcal{H}$ dann γ(h) $\in \mathcal{H}$
- Sei σ ein Weg dann L(σ) $=$ L($\gamma \circ \sigma$)

Möbiustransformationen

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- falls $\gamma \in$ Möb($\mathbb{H}$) dann $\gamma^{-1} \in$ Möb($\mathbb{H}$)
- Sei h $\in \mathcal{H}$ dann γ(h) $\in \mathcal{H}$
- Sei σ ein Weg dann L(σ) = L($\gamma \circ \sigma$)
- γ(z)= $\frac{\text{z-b}}{\text{z-a}}$ wobei a<b(Endpunkte)

$\rightarrow \gamma$(a) und γ(b) liegen auf imag. Achse

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Geodäten

Beweis.

Sei z,z' $\in \mathbb{H}$ und $\mathcal{I}$ die imag. Achse.

Geodäten

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

Sei z,z' $\in$ $\mathbb{H}$ und $\mathcal{I}$ die imag. Achse.

$\underrightarrow{\text{Euklid}}$ $\exists$ h $\in \mathcal{H}$, so dass z,z' auf h

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

Sei z,z' $\in$ $\mathbb{H}$ und $\mathcal{I}$ die imag. Achse.

$\xrightarrow{\text{Euklid}}$ $\exists$ h $\in \mathcal{H}$, so dass z,z' auf h

Sei σ ein Weg von z nach z'.

Geodäten

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

Sei z,z' $\in$ $\mathbb{H}$ und $\mathcal{I}$ die imag. Achse.

$\underrightarrow{\text{Euklid}}$ $\exists$ h $\in \mathcal{H}$, so dass z,z' auf h

Sei σ ein Weg von z nach z'. Es existiert eine Möbiustransformation γ ,so dass γ(z) und γ(z') auf $\mathcal{I}$ liegen.

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Geodäten

Beweis.

Sei z,z' $\in \mathbb{H}$ und $\mathcal{I}$ die imag. Achse.

$\xrightarrow{\text{Euklid}} \exists$ h $\in \mathcal{H}$, so dass z,z' auf h

Sei σ ein Weg von z nach z'. Es existiert eine Möbiustransformation γ ,so dass γ(z) und γ(z') auf $\mathcal{I}$ liegen.
L(σ)=L($\gamma \circ \sigma$), da $\gamma \in$ Möb($\mathbb{H}$).

Geodäten

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

Sei z,z' $\in \mathbb{H}$ und $\mathcal{I}$ die imag. Achse.

$\underrightarrow{\text{Euklid}}$ $\exists$ h $\in \mathcal{H}$, so dass z,z' auf h

Sei σ ein Weg von z nach z'. Es existiert eine Möbiustransformation γ ,so dass γ(z) und γ(z') auf $\mathcal{I}$ liegen.
L(σ)=L($\gamma \circ \sigma$), da $\gamma \in$ Möb($\mathbb{H}$).

$\mathcal{I}$ ist Geodäte.

Geodäten

Beweis.

Sei z,z' $\in$ $\mathbb{H}$ und $\mathcal{I}$ die imag. Achse.

$\underrightarrow{\text{Euklid}}$ $\exists$ h $\in \mathcal{H}$, so dass z,z' auf h

Sei σ ein Weg von z nach z'. Es existiert eine Möbiustransformation γ ,so dass γ(z) und γ(z') auf $\mathcal{I}$ liegen.
L(σ)=L($\gamma \circ \sigma$), da $\gamma \in$ Möb($\mathbb{H}$).

$\mathcal{I}$ ist Geodäte.
L($\gamma \circ \sigma$) nimmt Minimum an g.d.w. $\gamma \circ \sigma$ Abschnitt von $\mathcal{I}$.

Geodäten

Beweis.

Sei z,z' $\in \mathbb{H}$ und $\mathcal{I}$ die imag. Achse.

$\underrightarrow{\text{Euklid}}$ $\exists$ h $\in \mathcal{H}$, so dass z,z' auf h

Sei σ ein Weg von z nach z'. Es existiert eine Möbiustransformation γ ,so dass γ(z) und γ(z') auf $\mathcal{I}$ liegen.
L(σ)=L($\gamma \circ \sigma$), da $\gamma \in$ Möb($\mathbb{H}$).
$\mathcal{I}$ ist Geodäte.
L($\gamma \circ \sigma$) nimmt Minimum an g.d.w. $\gamma \circ \sigma$ Abschnitt von $\mathcal{I}$.
σ ist Bild der imag. Achse unter γ^{-1},sprich $\sigma = \gamma^{-1}(\mathcal{I})$

Geodäten

Beweis.

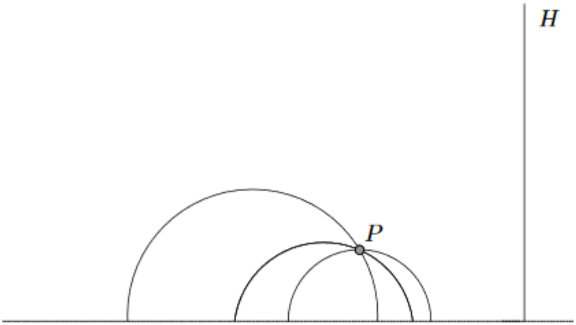
Sei z,z' $\in$ $\mathbb{H}$ und $\mathcal{I}$ die imag. Achse.

$\underrightarrow{\text{Euklid}}$ $\exists$ h $\in \mathcal{H}$, so dass z,z' auf h

Sei σ ein Weg von z nach z'. Es existiert eine Möbiustransformation γ ,so dass γ(z) und γ(z') auf $\mathcal{I}$ liegen.
L(σ)=L($\gamma \circ \sigma$), da $\gamma \in$ Möb($\mathbb{H}$).

$\mathcal{I}$ ist Geodäte.
L($\gamma \circ \sigma$) nimmt Minimum an g.d.w. $\gamma \circ \sigma$ Abschnitt von $\mathcal{I}$.
σ ist Bild der imag. Achse unter γ^{-1},sprich $\sigma = \gamma^{-1}(\mathcal{I})$
Also ist σ in $\mathcal{H}$. □

Parallelenpostulat nicht erfüllt



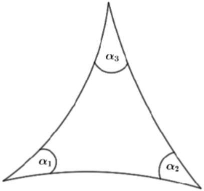
Geschichte
- Euklid
- Die 5 Postulate
- Das 5. Postulat
- Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
- Die Begründer
- Die Konstruktion
  - Die obere Halbebene
  - Distanz
- Geodäten

Dreiecke
- Winkel
- Fläche
- Gauß-Bonnet

Konstruktion

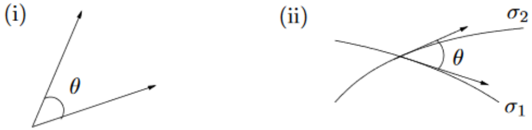
- 3 Punkte werden durch Geodäten verbunden



Winkel

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- Winkelmessung erfolgt mittels Tangenten



Winkel

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

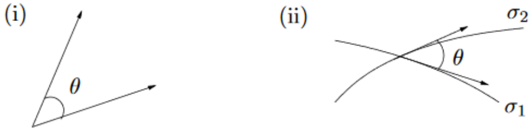
Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

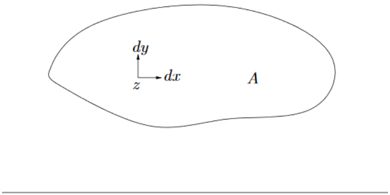
- Winkelmessung erfolgt mittels Tangenten



- Möbiustransformationen erhalten Winkel

Fläche

Sei $A \subset \mathbb{H}$ eine Fläche in der oberen Halbebene.
Sei $z \in A$. Dann können wir die Fläche um z approximieren mittels Rechteck mit den Seiten dx,dy. Für die Fläche des Rechtecks ergibt sich $dx*dy*\frac{1}{\mathrm{Im}(z)^2}$

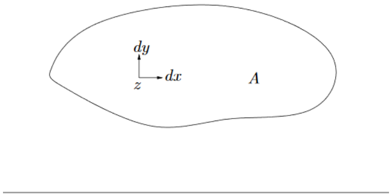


$\rightarrow$ für den Flächeninhalt ergibt sich $\mathrm{Area}_{\mathbb{H}}(A) = \int\int_A \frac{1}{y^2}\, dxdy$

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Fläche

Sei $A \subset \mathbb{H}$ eine Fläche in der oberen Halbebene.
Sei $z \in A$. Dann können wir die Fläche um z approximieren mittels Rechteck mit den Seiten dx,dy. Für die Fläche des Rechtecks ergibt sich dx*dy*$\frac{1}{\text{Im}(z)^2}$



$\rightarrow$ für den Flächeninhalt ergibt sich $\text{Area}_{\mathbb{H}}(A) = \int\int_A \frac{1}{y^2}\, dxdy$

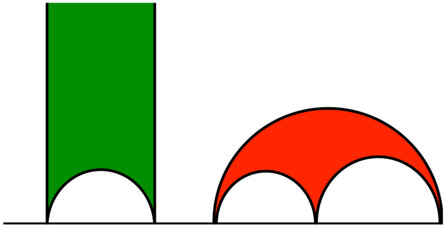
$\rightarrow$ Möb.transformationen erhalten Flächeninhalt

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Dreiecke

$\rightarrow$ Scheitel können auch auf dem Rand $\partial\mathbb{H}$ liegen

- ideales Dreieck: alle Scheitel liegen auf dem Rand



$\rightarrow$ Winkel auf $\partial\mathbb{H}$ beträgt 0° (Orthogonalität)

Gauß-Bonnet

Theorem (Gauß-Bonnet)

Sei Δ ein hyperbolisches Dreieck und α, β, γ die Innenwinkel. Dann gilt $\text{Area}_{\mathbb{H}}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

1.Fall: ein Scheitel liegt auf $\partial\mathbb{H}$.

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

1.Fall: ein Scheitel liegt auf $\partial\mathbb{H}$.
$\rightarrow \gamma = 0°$

Gauß-Bonnet

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

1.Fall: ein Scheitel liegt auf $\partial\mathbb{H}$.
$\rightarrow \gamma = 0°$

- $\gamma_1 \in$ Möb($\mathbb{H}$) so dass Scheitel auf ∞

Gauß-Bonnet

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

1.Fall: ein Scheitel liegt auf $\partial\mathbb{H}$.
$\rightarrow \gamma = 0°$

- $\gamma_1 \in$ Möb($\mathbb{H}$) so dass Scheitel auf ∞
- $\gamma_2 \in$ Möb($\mathbb{H}$) mit $\gamma_2(z)=z+b$, b so dass Halbkreissegment zw. den anderen beiden Scheiteln durch den Ursprung verläuft

Gauß-Bonnet

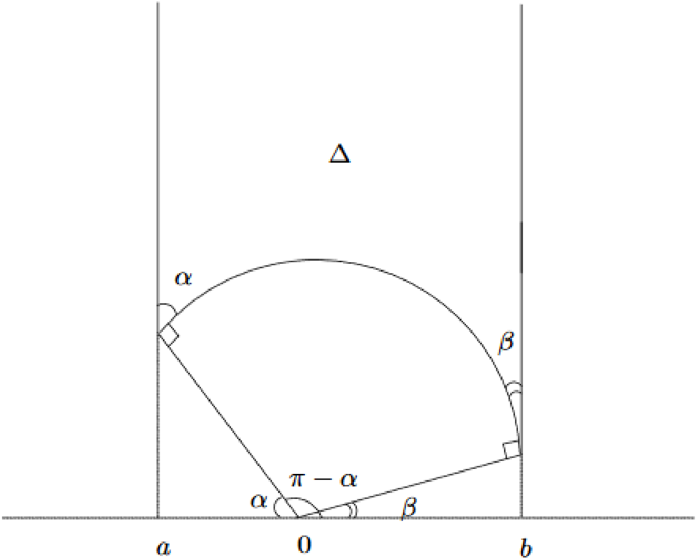
Beweis.

1.Fall: ein Scheitel liegt auf $\partial\mathbb{H}$.
$\rightarrow \gamma = 0°$

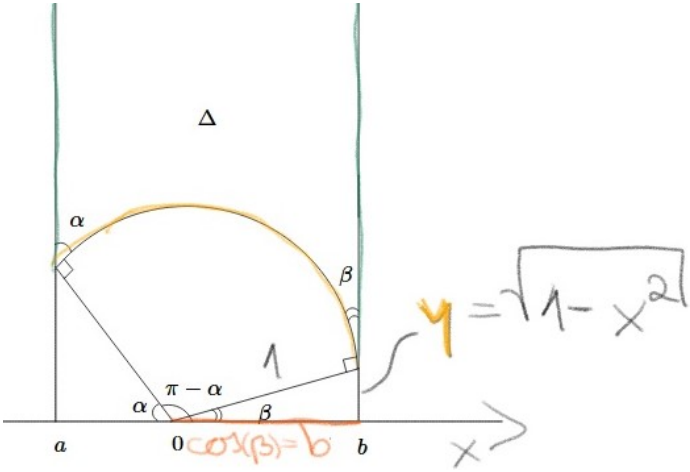
- $\gamma_1 \in$ Möb($\mathbb{H}$) so dass Scheitel auf ∞
- $\gamma_2 \in$ Möb($\mathbb{H}$) mit γ_2(z)=z+b , b so dass Halbkreissegment zw. den anderen beiden Scheiteln durch den Ursprung verläuft
- $\gamma_3 \in$ Möb($\mathbb{H}$) mit γ_3(z)=mz, m so dass Kreis Radius 1 hat

$\square$

Gauß-Bonnet



Gauß-Bonnet



Gauß-Bonnet

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

$\mathrm{Area}_{\mathbb{H}}(\Delta)$

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

$\mathrm{Area}_{\mathbb{H}}(\Delta)$

$= \int \int_{\Delta} \frac{1}{y^2} dydx$

Gauß-Bonnet

Beweis.

$\mathrm{Area}_{\mathbb{H}}(\Delta)$

$$= \int \int_{\Delta} \frac{1}{y^2} dydx$$

$$= \int_a^b \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dydx$$

Gauß-Bonnet

Beweis.

$\mathrm{Area}_{\mathbb{H}}(\Delta)$

$= \int \int_{\Delta} \frac{1}{y^2} dydx$

$= \int_a^b \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dydx$

$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ Substitution mit $x=\cos(\theta)$

Gauß-Bonnet

Beweis.

$\text{Area}_{\mathbb{H}}(\Delta)$

$= \int \int_{\Delta} \frac{1}{y^2} dydx$

$= \int_a^b \int_{\sqrt{1\text{-}x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dydx$

$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1\text{-}x^2}} dx$ Substitution mit $x = \cos(\theta)$

$= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{\text{-}\sin(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta$

Gauß-Bonnet

Beweis.

$\mathrm{Area}_{\mathbb{H}}(\Delta)$

$$= \int\int_{\Delta} \frac{1}{y^2} dydx$$

$$= \int_a^b \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dydx$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{Substitution mit } x=\cos(\theta)$$

$$= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta$$

$$= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} -1 d\theta = \pi - (\alpha+\beta) \qquad \square$$

Gauß-Bonnet

Beweis.

2.Fall: kein Scheitel auf $\partial\mathbb{H}$

Gauß-Bonnet

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

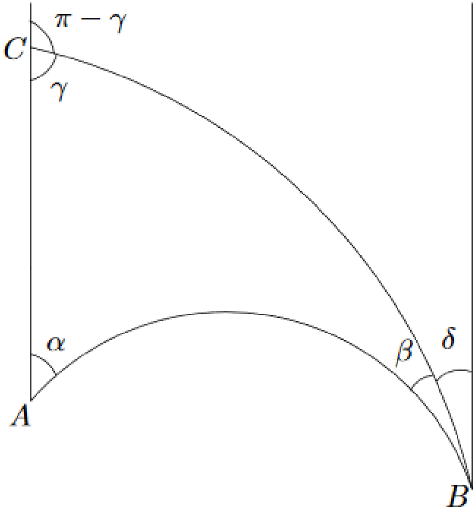
2.Fall: kein Scheitel auf $\partial\mathbb{H}$
Nenne die Scheitel A,B und C.

Gauß-Bonnet

Beweis.

2.Fall: kein Scheitel auf $\partial\mathbb{H}$
Nenne die Scheitel A,B und C.
$\gamma \in$ Möb($\mathbb{H}$) so, dass AC auf vertikaler Linie liegt (Beweis zu Geodäten) □

Gauß-Bonnet



Gauß-Bonnet

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

$\text{Area}_{\mathbb{H}}(ABC) = \text{Area}_{\mathbb{H}}(AB\infty)$ - $\text{Area}_{\mathbb{H}}(BC\infty)$

Gauß-Bonnet

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Beweis.

$\text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{ABC}) = \text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{AB}\infty)$ - $\text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{BC}\infty)$

$\text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{AB}\infty) = \pi - (\alpha + (\beta + \delta))$

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
- Euklid
- Die 5 Postulate
- Das 5. Postulat
- Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
- Die Begründer
- Die Konstruktion
  - Die obere Halbebene
  - Distanz
- Geodäten

Dreiecke
- Winkel
- Fläche
- Gauß-Bonnet

Beweis.

$$\text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{ABC}) = \text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{AB}\infty) \text{ - } \text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{BC}\infty)$$

$$\text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{AB}\infty) = \pi - (\alpha + (\beta + \delta))$$

$$\text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{BC}\infty) = \pi - (\delta + (\pi - \gamma)$$

Gauß-Bonnet

Beweis.

$\text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{ABC}) = \text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{AB}\infty)$ - $\text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{BC}\infty)$

$\text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{AB}\infty) = \pi - (\alpha + (\beta + \delta))$

$\text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{BC}\infty) = \pi - (\delta + (\pi - \gamma)$

$\Rightarrow \text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{ABC}) = \pi - (\alpha + (\beta + \delta)) - (\pi - (\delta + (\pi - \gamma)))$

Gauß-Bonnet

Beweis.

$$\text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{ABC}) = \text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{AB}\infty) \text{ - } \text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{BC}\infty)$$

$$\text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{AB}\infty) = \pi - (\alpha + (\beta + \delta))$$

$$\text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{BC}\infty) = \pi - (\delta + (\pi - \gamma)$$

$$\Rightarrow \text{Area}_{\mathbb{H}}(\text{ABC}) = \pi - (\alpha + (\beta + \delta)) - (\pi - (\delta + (\pi - \gamma))) =$$

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

□

Gauß-Bonnet

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- $\text{Area}_{\mathbb{H}}(\Delta) = \pi$ - ($\alpha + \beta + \gamma$)

Gauß-Bonnet

- $\text{Area}_{\mathbb{H}}(\Delta) = \pi$ - ($\alpha + \beta + \gamma$)
- Fläche eines hyp. Δ hängt von den Innenwinkel ab

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Gauß-Bonnet

- $\text{Area}_{\mathbb{H}}(\Delta) = \pi$ - ($\alpha + \beta + \gamma$)
- Fläche eines hyp. Δ hängt von den Innenwinkel ab
- im euklidischen Fall gilt das nicht

Gauß-Bonnet

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- Area$_{\mathbb{H}}(\Delta) = \pi$ - ($\alpha + \beta + \gamma$)
- Fläche eines hyp. Δ hängt von den Innenwinkel ab
- im euklidischen Fall gilt das nicht
- Innenwinkelsumme entspricht 180° gdw. Fläche verschwindet

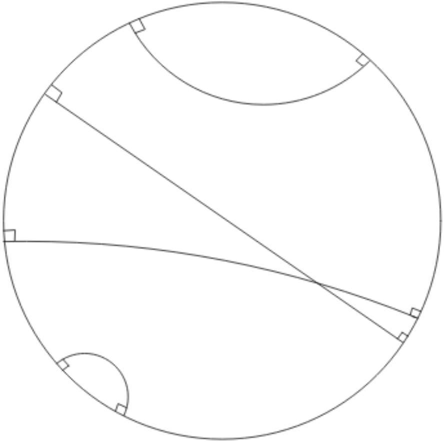
Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Gauß-Bonnet

- $\text{Area}_{\mathbb{H}}(\Delta) = \pi$ - ($\alpha + \beta + \gamma$)
- Fläche eines hyp. Δ hängt von den Innenwinkel ab
- im euklidischen Fall gilt das nicht
- Innenwinkelsumme entspricht 180° gdw. Fläche verschwindet
- also Innenwinkelsumme $<$ 180°

andere Modelle

- Poincarésche Kreisscheibenmodell
- $\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$
- $\partial\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$



Wieso das Ganze?

- mathematische Anwendung (z.B. Uniformization theorem)

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Wieso das Ganze?

Nicht-euklidische Geometrie: Hyperbolische Geometrie

Dean Zenner

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat

Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten

Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

- mathematische Anwendung (z.B. Uniformization theorem)
- spezielle Relativitätstheorie

Wieso das Ganze?

- mathematische Anwendung (z.B. Uniformization theorem)
- spezielle Relativitätstheorie
- verborgen in der Natur

Geschichte
Euklid
Die 5 Postulate
Das 5. Postulat
Das Parallelenpostulat
Die hyperbolische Geometrie
Die Begründer
Die Konstruktion
Die obere Halbebene
Distanz
Geodäten
Dreiecke
Winkel
Fläche
Gauß-Bonnet

Wieso das Ganze?

- mathematische Anwendung (z.B. Uniformization theorem)
- spezielle Relativitätstheorie
- verborgen in der Natur