Grundideen der Differentialgeometrie

Alissa Grün

01.12.2020

Inhalt

- Historischer Ursprung
- Arten der Differentialgeometrie
- Mannigfaltigkeiten
- Kurven und Flächen
- Krümmung
- Triangulierung

Differentialgeometrie

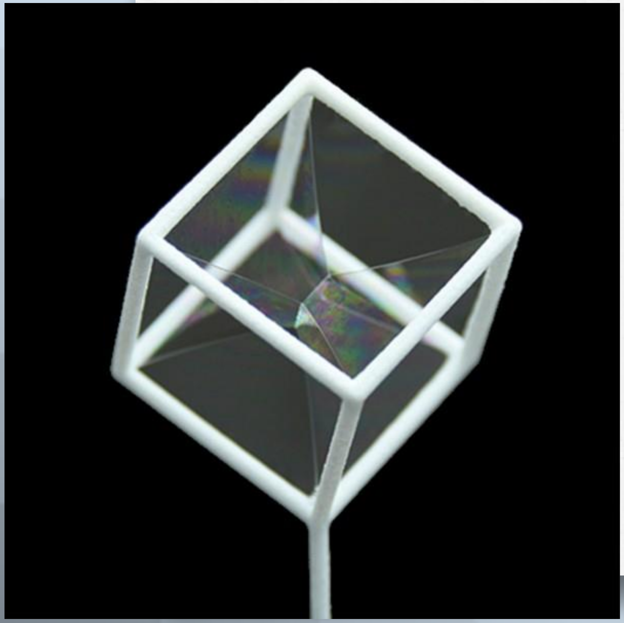
- Schnittstelle zwischen Analysis und Geometrie
- Gebiet der Mathematik, in dem die Differentialrechnung auf Flächen und Kurven angewandt wird

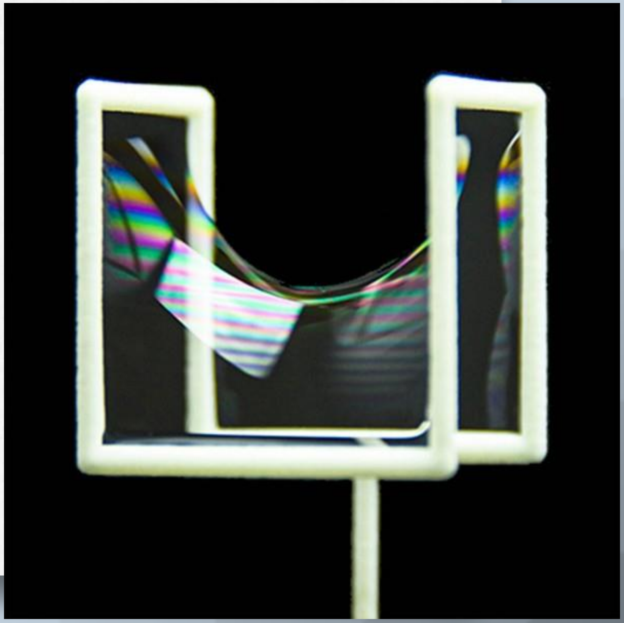
Historischer Ursprung

- Carl Friedrich Gauß (1777-1855)
- Vermessen von Land
  → Gebogene Flächen
  → Effektives Verfahren
- Begründer der modernen Differentialgeometrie

Klassische / Elementare Differentialgeometrie

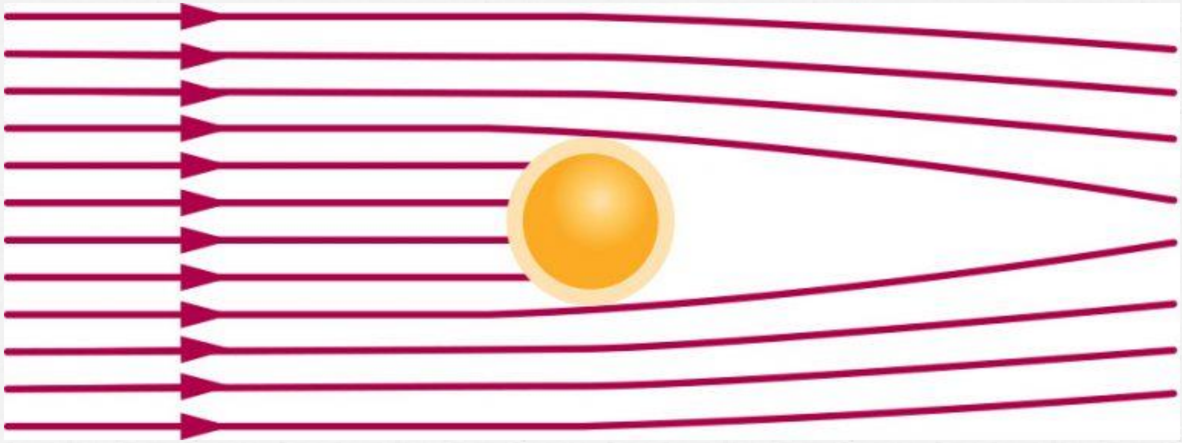
- Untersuchung lokaler Eigenschaften von Kurven und Flächen im $\mathbb{R}^3$
- Ziel: Berechnung der Krümmung





Anwendung: klassische Differentialgeometrie

- Allgemeine Relativitätstheorie
  - → z.B. Vorhersage der Lichtablenkung

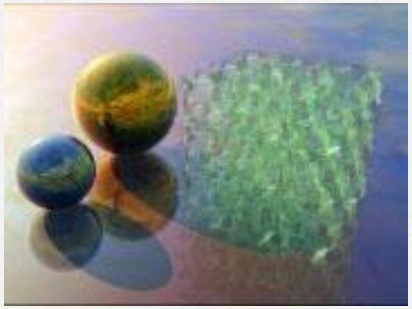


Differentialtopologie = moderne Differentialgeometrie

- Differentialtopologie Grundlage moderner Differentialgeometrie
- Intrinsische Beschreibung geometrischer Objekte
- Verbindungen zw. lokalen analytischen und globalen topologischen Eigenschaften
- Zentraler Begriff: differenzierbare Mannigfaltigkeit

Anwendung moderne Differentialgeometrie

- (Satteliten-)Navigation
  - → Pyramide zwischen Satteliten und Person an deren Spitze
- Robotik
  - → Bewegungsabläufe
- Interaktive Visualisierung



Definition Mannigfaltigkeit

- Eine **k-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit** ist eine Menge M mit einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Teilmengen, für die gilt:

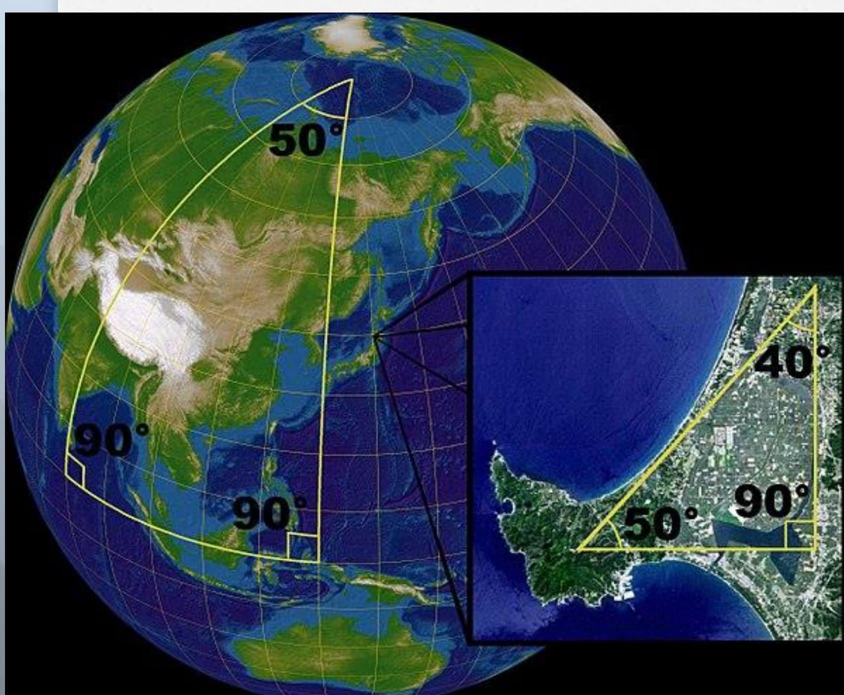
(i) $M = \bigcup_{i \in I} M_i$

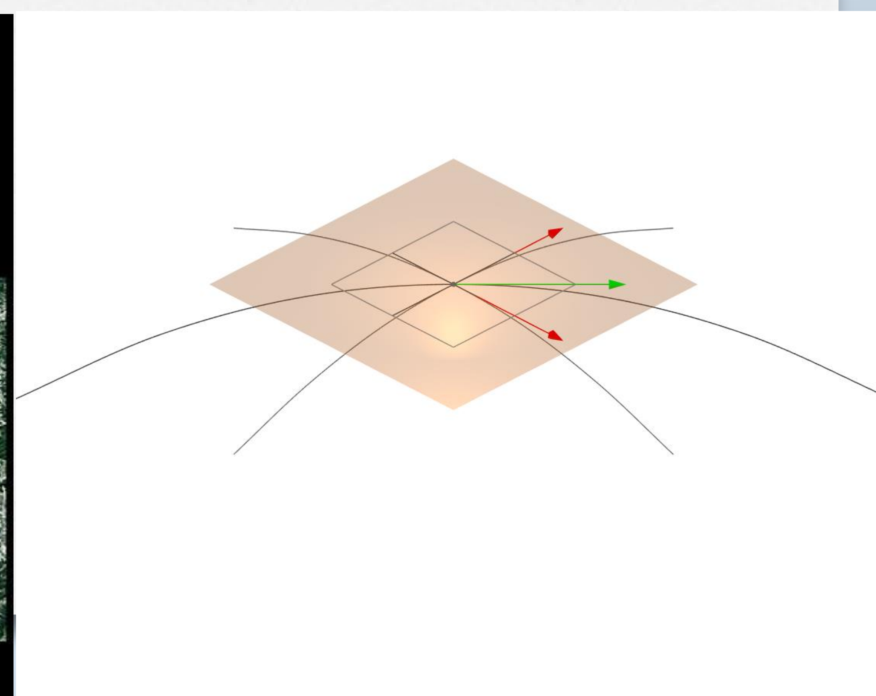
(ii) $\forall i \in I\ \exists \varphi_i \colon M_i \to \mathbb{R}^k$ injektiv mit $\varphi_i(M_i)$ offen in $\mathbb{R}^k$

(iii) $\varphi_i(M_i \cap M_j)$ offen in $\mathbb{R}^k\ \forall\ M_i, M_j$ disjunkt und $\varphi_j * {\varphi_i}^{-1} \colon \varphi_i(M_i \cap M_j) \to \varphi_j(M_i \cap M_j)$ ist differenzierbar $\forall i, j \in I$.

Mannigfaltigkeit - anschaulich

- Oberbegriff für Räume (Kurven, Flächen,…), die im Kleinen wie der $\mathbb{R}^n$ aussehen
- Bsp.: Erdoberfläche – Fläche $\mathbb{R}^2$





Mannigfaltigkeit – Beispiel (I)

Mannigfaltigkeit – Beispiel (II)

Mannigfaltigkeit – Beispiel (III)

Erste Fundamentalform Definition

Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine n-dimensionale UM, $p \epsilon M$, $X_p, Y_p \in T_pM$.

Dann heißt:

$g_p: T_pM\ x\ T_pM \to \mathbb{R}$ mit $g_p(X_p, Y_p) \to \langle X_p, Y_p \rangle$

Erste Fundamentalform von M bei p auf dem Vektorraum T_pM.

Erste Fundamentalform Nutzen

- Wiederholung Skalarprodukt:

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = |\ \vec{a}\ |\cdot|\ \vec{b}\ |\cdot \cos(\varphi)$$

- Berechnungen mit Hilfe der ersten Fundamentalform:
  - Schnittwinkel zwischen 2 Kurven
  - Länge einer Kurve auf einer gegebenen Fläche
  - Flächeninhalt eines Flächenstücks

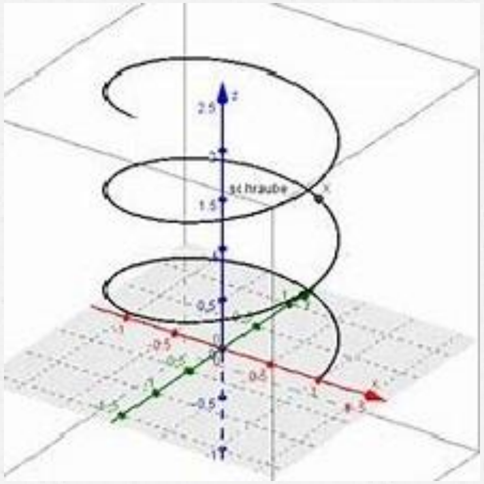
Riemannsche Geometrie

- Idee von Riemann: Man kann alle geometrischen Objekte (Längen, Flächen, Volumen, Winkel, Krümmungen,...) durch ein einziges algebraisches Objekt ausdrücken
  → Riemannsche Metrik

- Geometrische Untersuchung riemannscher Mannigfaltigkeiten
  → zusätzlich: Längenmessung

Kurven im $\mathbb{R}^3$

- Stetige Abbildung $f: I \to \mathbb{R}^3$ mit $I \subset \mathbb{R}$ beliebig
- Bsp. Schraubenlinie:
  $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, f(t) = (\cos(t), \sin(t), t/2\pi)$



Reguläre Fläche Definition

- Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ glatt.

  Dann heißt $M = f^{-1}(0) = \{p \in U\colon f(p) = 0\}$

  eine **(reguläre) Fläche,** wenn gilt:

  $$grad f(p) = \left(\frac{df}{dx_1}, \frac{df}{dx_2}, \frac{df}{dx_3}\right)(p) \neq 0 \; \forall p \in M.$$

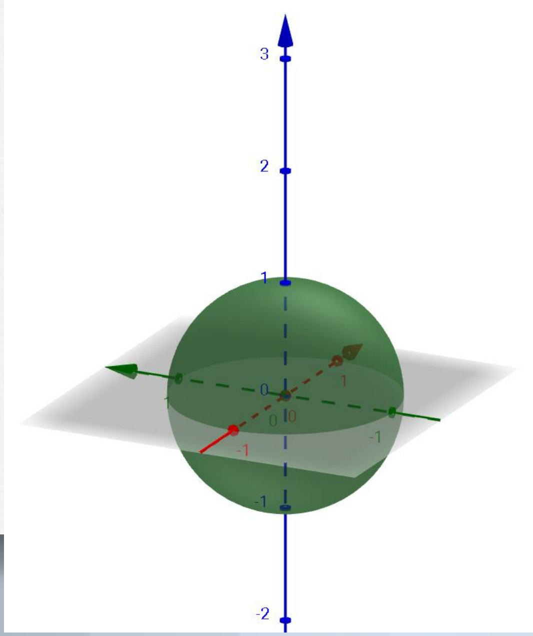
- Glatt: unendlich oft stetig differenzierbar

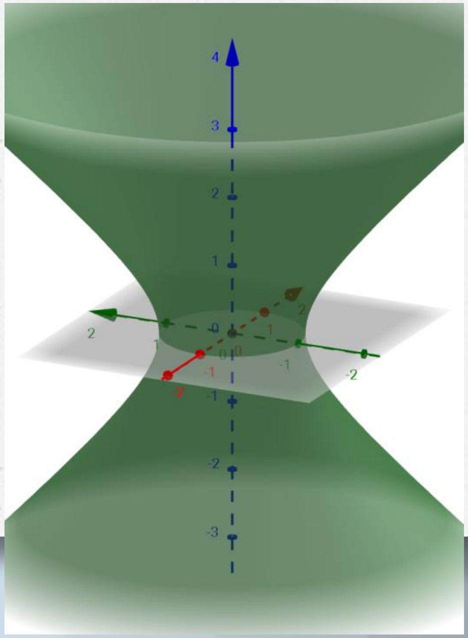
Flächen - anschaulich

- Flächen sind zweidimensionale Objekte im dreidimensionalen Raum

Reguläre Fläche
Beispiele

- 2-Sphäre:
  $M = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$
- Hyperboloid:
  $M = H^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$

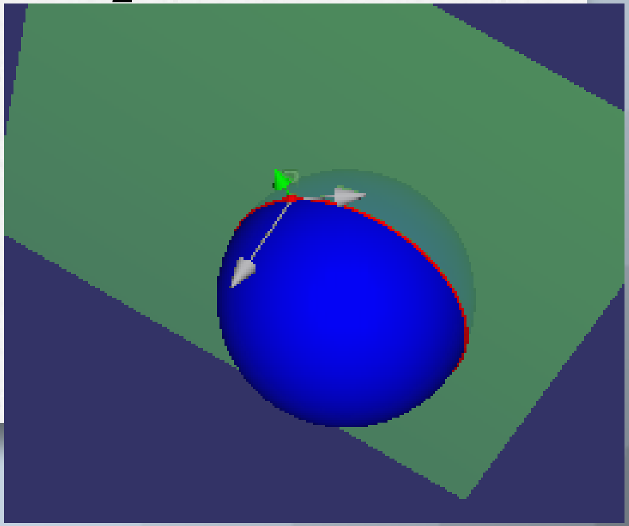


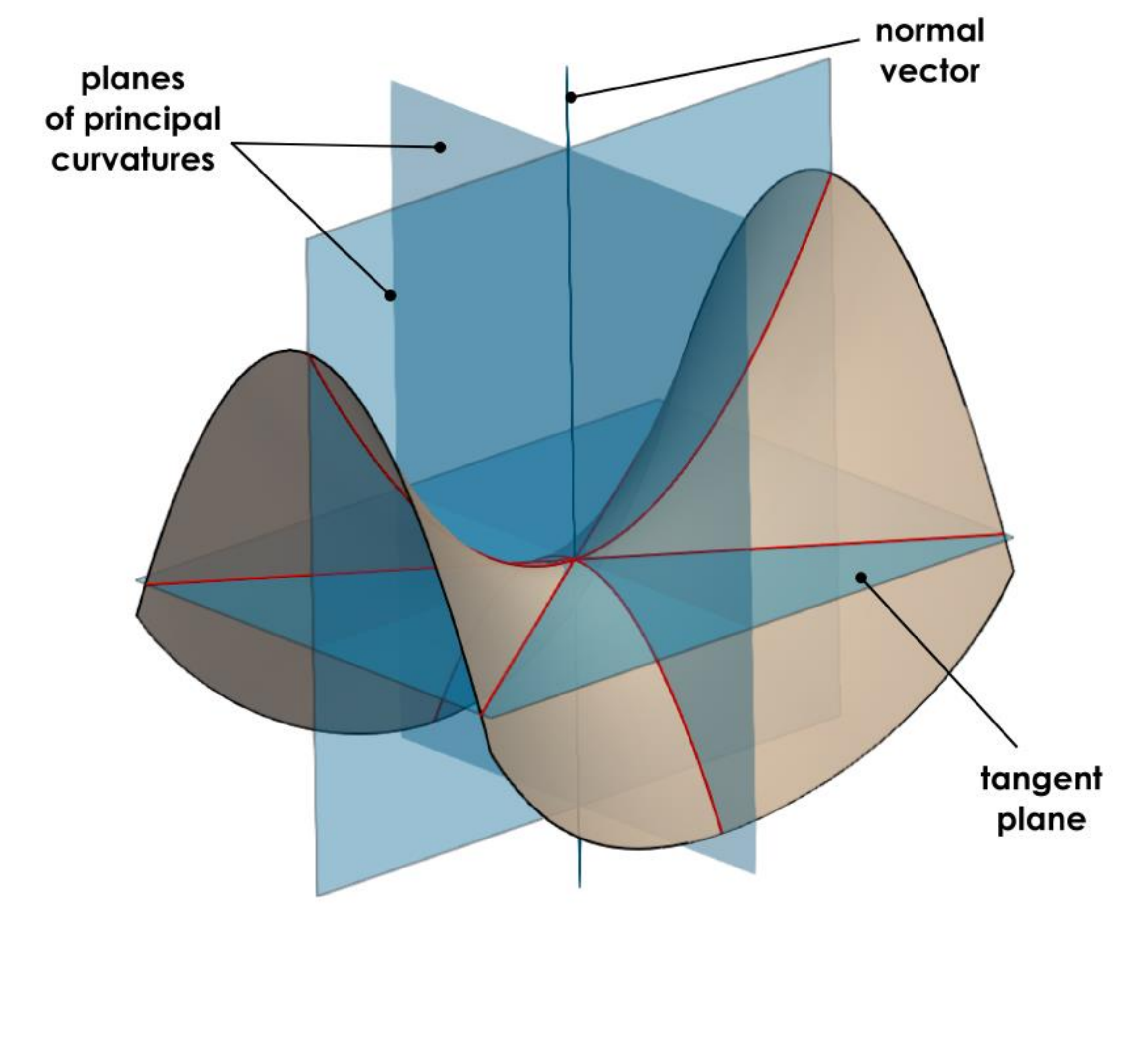


Hauptkrümmung

- Fläche schneiden mit Ebene, die durch Normalenvektor und einem Tangentialvektor aufgespannt ist → Raumkurve
- Deren Krümmung → Hauptkrümmung
- Immer 2 Tangentialvektoren in einem Punkt → 2 Hauptkrümmungen k_1 und k_2 (minimal und maximal)
- Hauptkrümmungsradius:

$$r_i = \frac{1}{k_i}$$



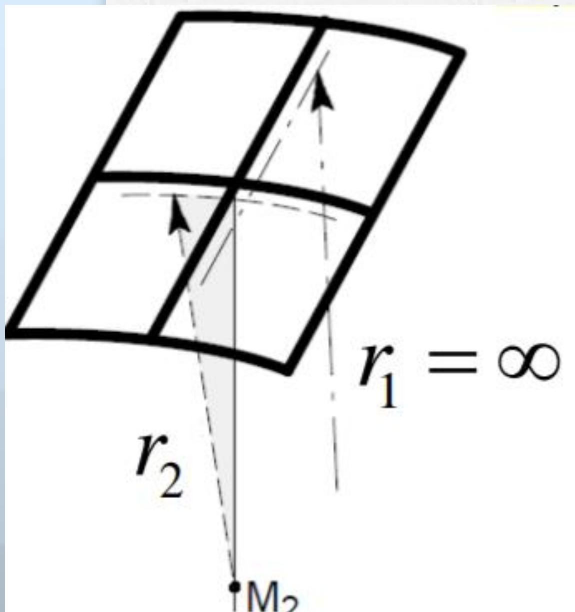


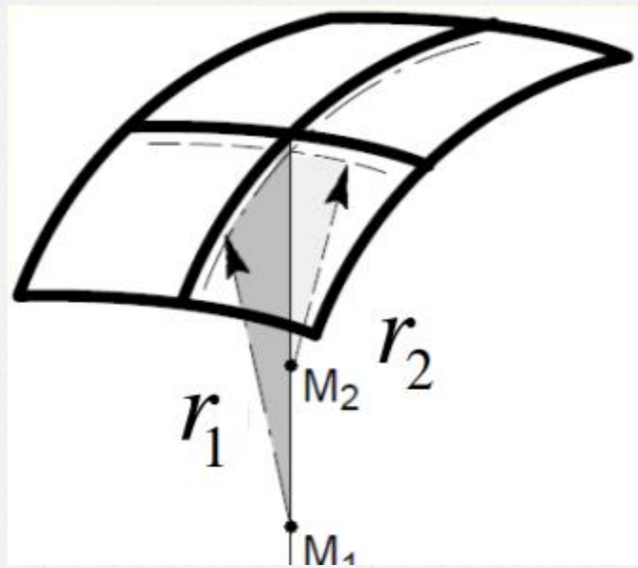
normal
vector
planes
of principal
curvatures
tangent
plane

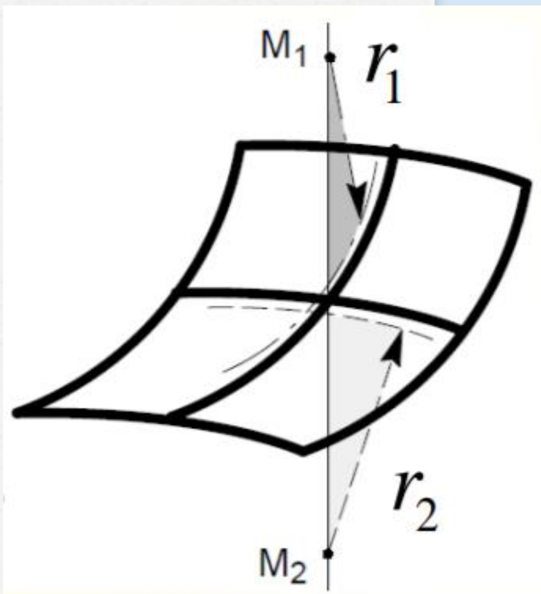
Gaußscher Krümmungsbegriff

- Wichtigster Krümmungsbegriff in der Differentialgeometrie
- Gauß-Krümmung einer regulären Fläche in einem Punkt: $K = k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2}$

Krümmung von Flächen







Einfach gekrümmt K=0

Zweifach gekrümmt K>0

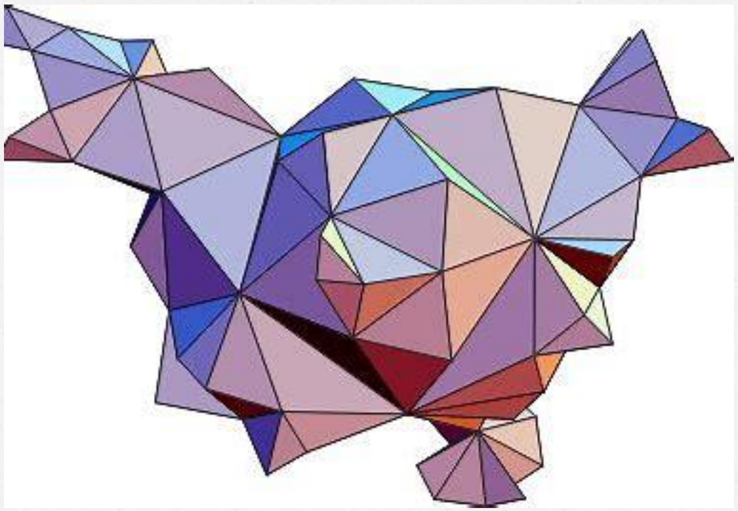
Zweifach gekrümmt K<0

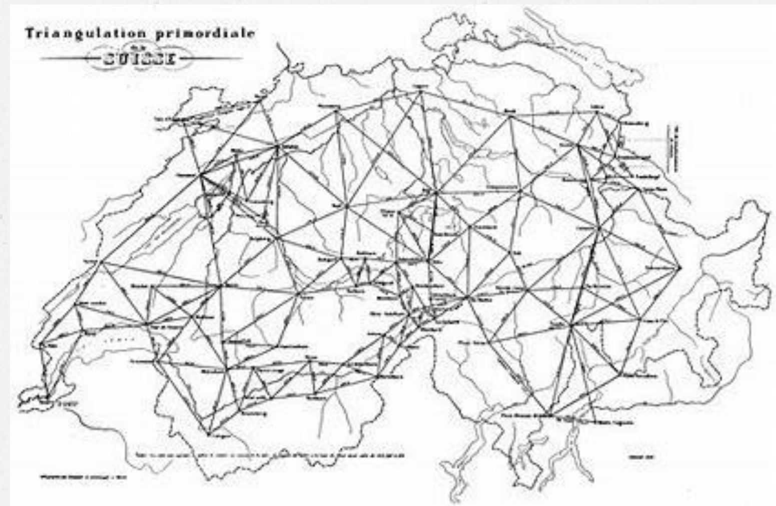
Triangulierung

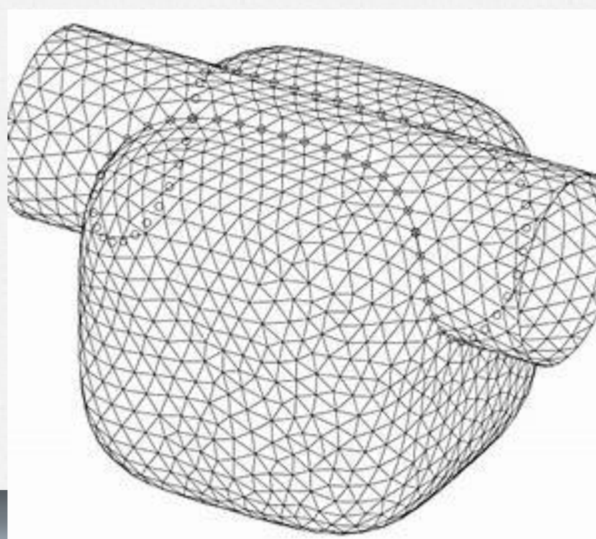
- Zerlegung eines n-dim Raumes in Simplizes

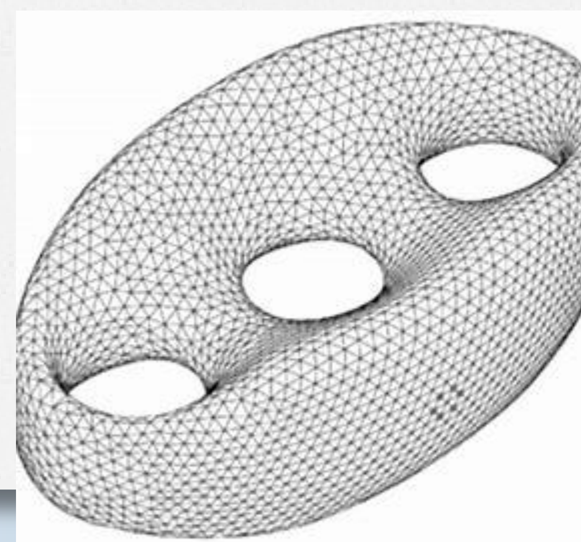
- Bestimmung des Flächeninhalts gebogener Fläche
- Annäherung durch kleine (ebene) Flächen
  → Dreiecke
- Übergang: infinitesimal kleine Flächen

Triangulierung Beispiele









Quellen

- Elementare Differentialgeometrie (nicht nur) für Informatiker (Edmund Weitz)
- Mathe für Physiker – Band 3 (Helmut Fischer Helmut Kaul)
- Differentialgeometrie (Wolfgang Kühnel)
- Elementare Differentialgeometrie (Christian Bär)
- https://www.duden.de/rechtschreibung/Differenzialgeometrie
- https://www.staff.hs-mittweida.de/~hgruende/Files/diffgeo.pdf
- http://www.staff.uni-oldenburg.de/daniel.grieser/wwwlehre/Eigene_Skripten/grieser-skript-differentialgeometrie2010-09-13.pdf#page19

Bildquellen

- https://th.bing.com/th/id/OIP.tSBwjgkue4kpAS5olSuCwwHaJv?w=159&h=210&c=7&o=5&dpr=1.5&pid=1.7
- https://experimentis-shop.de/media/image/0f/8c/71/2019_11_18_SoapExp_Foto_artefont_J_Otte-16-_1280_kl_600x600.jpg
- https://experimentis-shop.de/media/image/33/e2/8d/2019_11_18_SoapExp_Foto_artefont_J_Otte-1280_600x600.jpg
- https://experimentis-shop.de/media/image/00/d7/3e/2019_11_18_SoapExp_Foto_artefont_J_Otte-3-_1280_kl_600x600.jpg
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/97/Triangles_%28spherical_geometry%29.jpg/600px-Triangles_%28spherical_geometry%29.jpg
- http://fluentric.com/html/inhalt/Gekruemmte_Geometrie/5_Mannigfaltigkeiten.html
- https://www.einstein-online.info/wp-content/uploads/ART_Lichtablenkung_Gravitation_Sonne_%C2%A9_Daniela_Leitner_Markus_Poessel_Einstein-Online-768x285.jpg
- http://www.blaesius-anne.de/images/archimedes/Kr%fcmmung%20Kugel.png
- https://i.stack.imgur.com/rhhiX.png
- https://www.bau.uni-siegen.de/subdomains/baustatik/lehre/master/flt/arbeitsblaetter/schalen_einfuehrungws1920.pdf
- https://th.bing.com/th/id/OIP.2p6CojBX8-F0I5UJjaR4ygAAAA?w=261&h=180&c=7&o=5&dpr=1.5&pid=1.7
- https://th.bing.com/th/id/OIP.JO0hwEYeGr7I61JQrLrFugHaE3?w=281&h=184&c=7&o=5&dpr=1.5&pid=1.7
- https://th.bing.com/th/id/OIP.8dGKKI3IHtLdHvMxt05X3gHaGL?w=198&h=180&c=7&o=5&dpr=1.5&pid=1.7
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/89/Tri-brezel.svg/450px-Tri-brezel.svg.png
- http://www.imaginary-exhibition.com/images/side_pics/barth.jpg
- http://www.imaginary-exhibition.com/images/side_pics/EnzensbergerStern.jpg
- http://www.imaginary-exhibition.com/images/side_pics/side_pics19.jpg