

Übersichtsvortrag Hilberts Anschauliche Geometrie

ProSeminar: Beispiele
geometrischer Strukturen

Referent: Sophie Margardt
Dozent: Prof. Dr. Moritz Weber

Inhalt

- David Hilbert
- 3.Hilbertsches Problem
- Stefan Cohn-Vossen
- Allgemeine Informationen zu dem Buch
- Aufbau
- Grundidee
- Was ist alles Geometrie

Inhalt

- Übergang von Figuren zu Punkten und Geraden
- Kapitel 1
 - Kapitel 1.1
 - Kapitel 1.2
 - Kapitel 1.3
 - Kapitel 1.4

David Hilbert

- Deutscher Mathematiker
- Geboren am 23.01.1862
- Gestorben 14.02.1943
- Zählt zu den bedeutendsten Mathematiker zu Beginn des 20. Jahrhunderts
- Hat sich mit viele verschiedenen Gebieten der Mathematik beschäftigt

David Hilbert

- „Hilbertschen Probleme“ – 23 mathematische Probleme
- Sollte der Weiterentwicklung der Mathematik dienen
- Die meisten davon sind gelöst oder teilweise gelöst

3. Hilbertsches Problem

- „Sind zwei beliebige Tetraeder mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen stets zerlegungsgleich oder lassen sie sich mit kongruenten Polyedern zu zerlegungsgleichen Körpern ergänzen? “
- Also sind zwei Volumengleiche Körper auch immer zerlegungsgleich

3. Hilbertsches Problem

- Antwort: Nein
- Wurde bereits vor der Veröffentlichung der Probleme bewiesen
- Gegenbeispiel: Würfel und Tetraeder

Stefan Cohn Vossen

- Deutscher Mathematiker
- Geboren 28.05.1902
- Gestorben 25.06.1936
- Beschäftigte sich mit der Geometrie
- Lehrte ab 1930 an der Universität in Köln
- Wurde im September 1933 entlassen

Allgemeine Informationen zum Buch

- 1932 erschienen
- Verfasst von Hilbert und Cohn-Vossen
- Das Buch basierte auf Vorträgen, die Hilbert 1921 in Göttingen gehalten hatte
- Wenig Formeln
- Viele Bilder
- Sehr erfolgreich
- Wurde in viele Sprachen übersetzt

Aufbau

- Vorwort
- 6 Kapitel
 - 1. und 6. mit Anhang
- Sachverzeichnis

„Das Buch soll dazu dienen, die Freude an der Mathematik zu mehren, indem es dem Leser erleichtert, in das Wesen der Mathematik einzudringen, ohne sich einem beschwerlichen Studium zu unterziehen“ (David Hilbert, Anschauliche Geometrie, 1932)

Grundidee

- Zusammenhänge darstellen
- Veranschaulichung
- Figuren lassen sich durch Kurven und Punkte darstellen und erzeugen
- Keine Definition von Objekten
- Nur Regeln bei der Handhabung

„Man muss jederzeit an Stelle von
,Punkte, Geraden, Ebenen‘ ,Tische,
Stühle, Bierseidel‘ sagen können.“

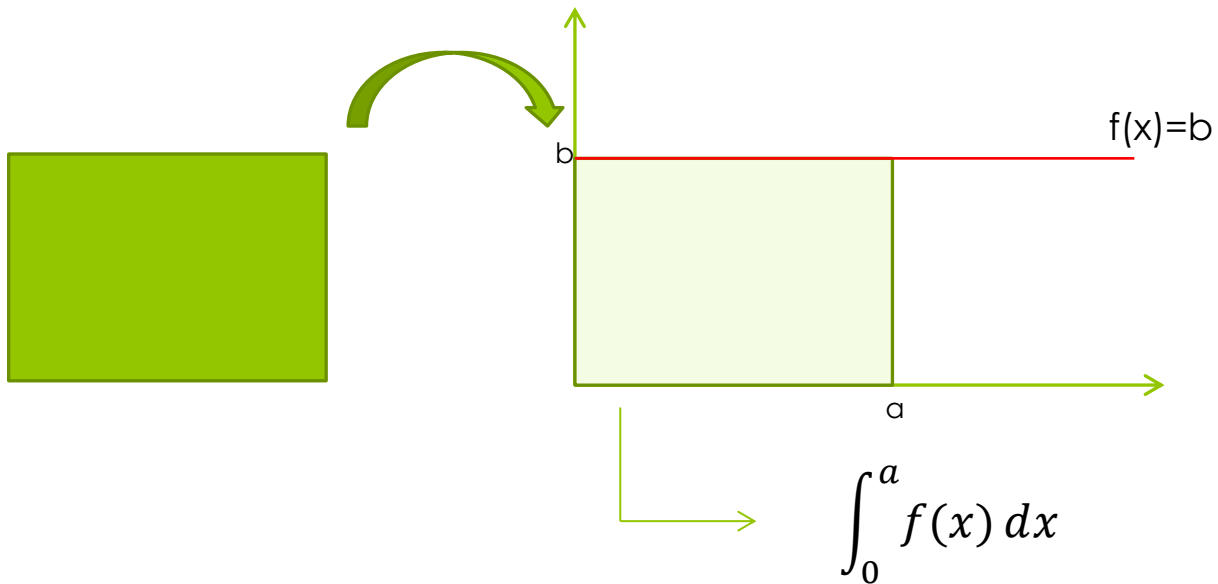
(David, Hilbert)

(Quelle: [Microsoft Word - skript05-temp.doc \(ph-freiburg.de\)](#))

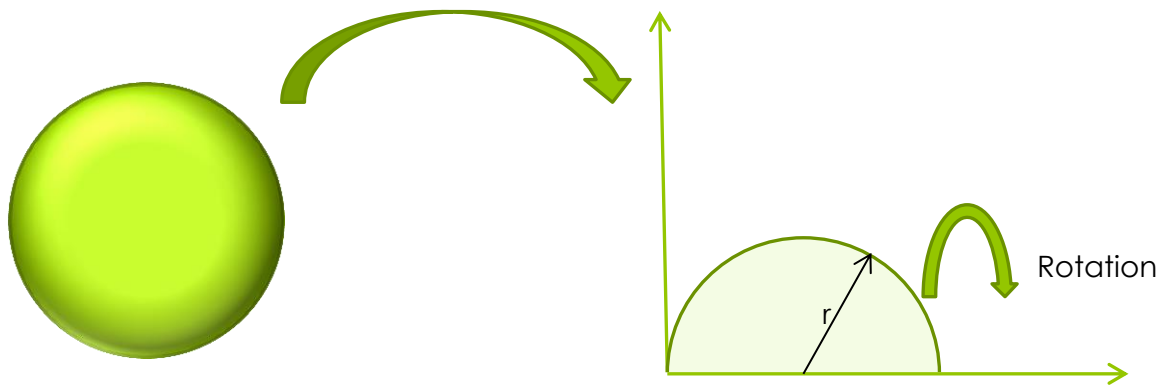
Was ist alles Geometrie

- Wort Geometrie bedeutet „Landmessung“ oder „Erdmessung“
- *„Teilgebiet der Mathematik, das sich mit räumlichen und nicht räumlichen (ebenen) Gebilden befasst“ (Duden)*
- Altes Teilgebiet der Mathematik
- Figuren, Körpern, Winkeln, Abstände

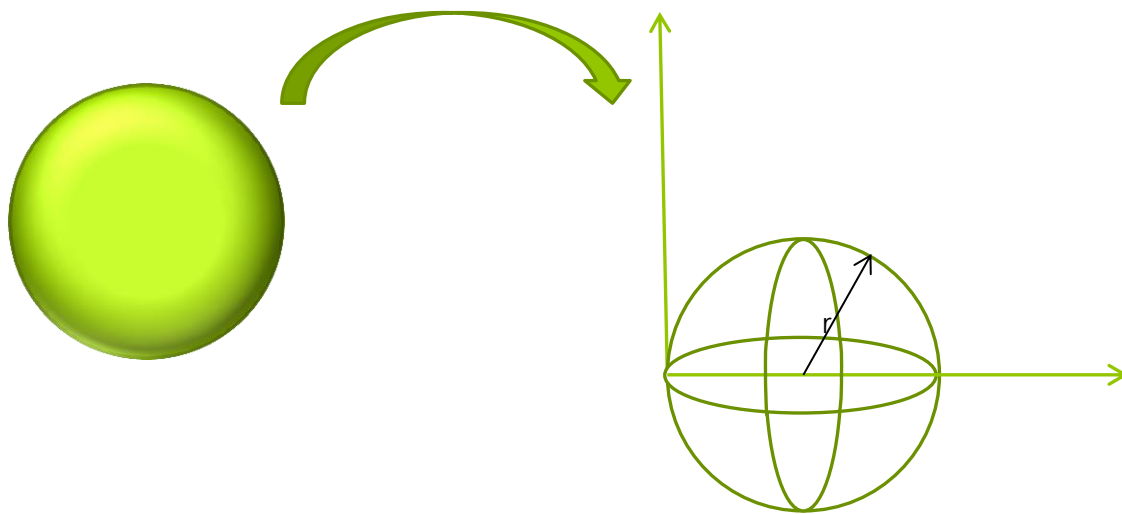
Beispiel Rechteck



Beispiel Kugel



Beispiel Kugel



Kapitel 1

- „Die einfachsten Kurven und Flächen“
 - Ebene, Kurven
 - Zylinder, Kegel, Kegelschnitte und deren Rotationsfläche
 - Die Flächen zweiter Ordnung
 - Fadenkonstruktion des Ellipsoids und konfokale Flächen zweiter Ordnung

Kapitel 1.1

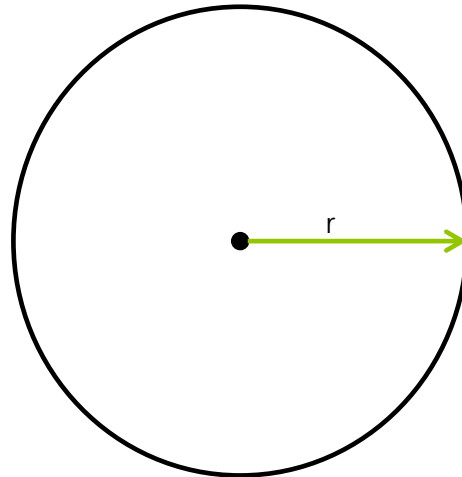
- „Ebene Kurven“
 - Einfachste Fläche = Ebene
 - Einfachste Kurve = ebenen Kurven
 - Einfachste Ebene Kurve = Gerade

Kreis

- Definition: „Kurve, deren Punkte von einem gegebenen Punkt den gleichen Abstand haben“ (anschauliche Geometrie, Seite 1)
- Zweit einfachste Kurve
- Kreis ist geschlossen
- Kreis ist konvex
- Es lässt sich überall eine Tangente bilden

Kreis erzeugen

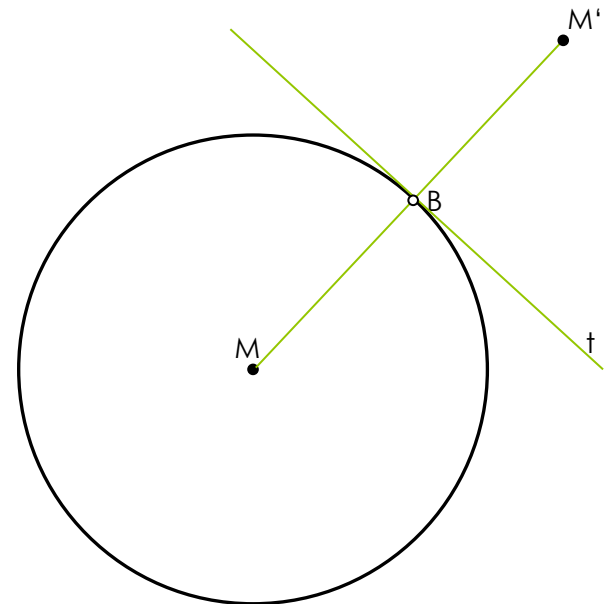
- Fadenkonstruktion



Beweis Radius ist senkrecht zur Tangente

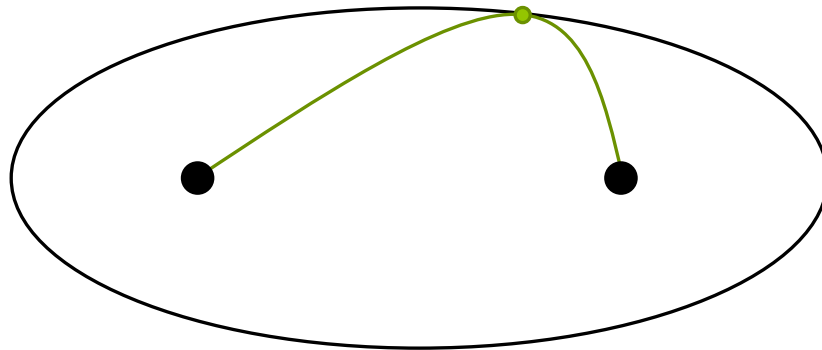
- Tangente im Punkt B
- Mittelpunkt M an der Tangente spiegeln
- MB kürzeste Verbindung zwischen M und t
 - M'B kürzeste Verbindung zwischen M' und t
- MBM' kürzeste Verbindung zwischen M und M'

➔ MB steht senkrecht auf t



Verallgemeinerung Kreis

- Fadenkonstruktion mit 2 festen Punkten
→ Ellipse

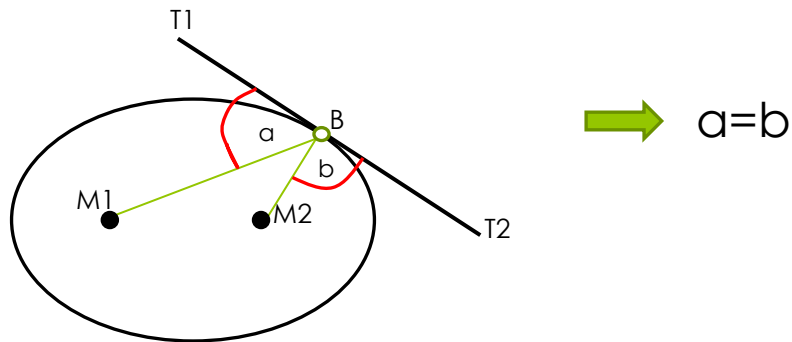


Ellipse

- Gleichen Eigenschaften wie die bereits erwähnten beim Kreis
 - Geschlossen
 - Konvex
 - In jedem Punkt eine Tangente
 - Brennstrahlen statt Radius
 - Brennstrahlen stehen nicht senkrecht zur Tangente

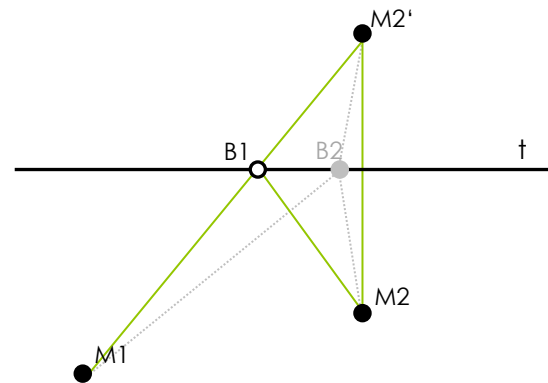
Ellipse

- Behauptung : Brennstrahlen bilden mit dem Berührungspunkt der Ellipsentangente gleiche Winkel



Beweis Behauptung

- Spiegel M_2 an der Tangente
- M_1M_2' schneidet die Tangente in B_1
→ $M_1B_1M_2$ kürzeste Verbindung über die Tangente
- B_1 entspricht also B
➔ Behauptung

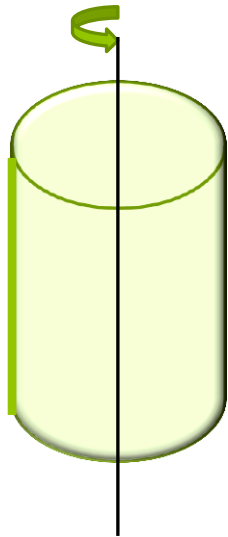


Kapitel 1.2

- „Zylinder, Kegel Kegelschnitte und Rotationsfläche“
 - Figuren die durch Rotation einer Gerade entstehen
 - Kreiszyylinder, Kreiskegel
 - Durch Rotation eines Kegelschnittes
 - Rotationsellipsoid

Kreiszyylinder

- Einfachste Krumme Fläche
- Wird durch Kreise und Geraden erzeugt
- Kreiszyylinder ist eine Rotationsfläche



Kapitel 1.3

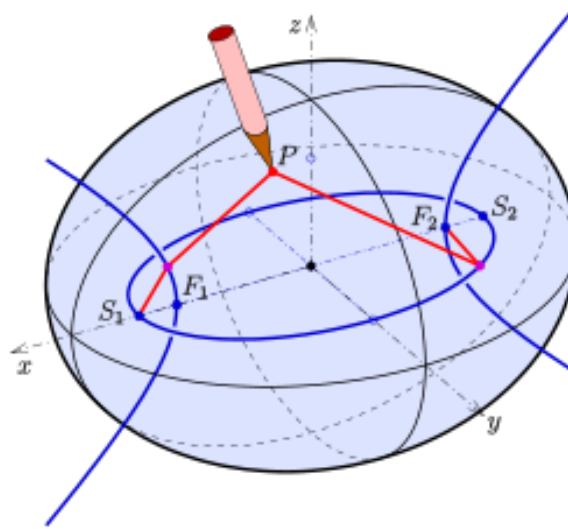
- „Die Flächen zweiter Ordnung“
 - Punkte müssen eine Gleichung zweiten Grades erfüllen
 - Beim Schnitt mit einer Ebene entsteht eine Kurve 2. Ordnung
 - Kurve 2. Ordnung wird von keiner Gerade in mehr als 2 Punkten geschnitten
 - Flächen zweiter Ordnung sind z.B. Rotationsflächen

Kapitel 1.4

- „Fadenkonstruktion des Ellipsoids und konfokale Flächen zweiter Ordnung“
 - Ellipsoid = 3-dimensionale Ellipse
 - Ist das Ellipsoid eine Fläche zweiter Ordnung ?
→ Ja, Beweis mit der Fadenkonstruktion

Kapitel 4

- Fadenkonstruktion:



Quelle: [Fokalks-ellipsoid - Ellipsoid - Wikipedia](#)

- Brennpunkte der Ellipse entsprechen den Scheiteln der Hyperbeln
→ Fokalkurven

Kapitel 4

- man kann die Länge der Schnur auch variieren
 - ➔ konfokale Flächen 2. Ordnung
- Schar von Flächen zweiter Ordnung
- Mathematisch: alle Punkte erfüllen eine Gleichung 2. Grades mit einem Parameter
- Im Gesamten überdecken sie den gesamten Raum

Quellen

- Anschauliche Geometrie, David Hilbert und Stefan Cohn-Vossen, Springer 1932
- Wikipedia (2020): [David Hilbert – Wikipedia](#) [letzter Zugriff am 25.11.2020]
- Deutschlandfunk Kultur, Tobias Wenzel: [Biografie über David Hilbert - Der Mann, der Einstein in Mathematik übersetzte \(Archiv\) \(deutschlandfunkkultur.de\)](#) [letzter Zugriff am 25.11.2020]
- Wikipedia (2020) :[Stefan Cohn-Vossen – Wikipedia](#) [letzter Zugriff am 26.11.2020]
- Spektrum, H.J.Schmidt :[Hilbertsche Probleme - Lexikon der Mathematik \(spektrum.de\)](#) [letzter Zugriff am 28.11.2020]
- Universität Bayreuth, Dr. Max Leppeier :[Microsoft Word - Paper Hilbert B2.docx \(uni-bayreuth.de\)](#) [letzter Zugriff am 28.11.2020]
- Universität Freiburg :[Die Hilbertschen Probleme \(tu-freiberg.de\)](#) [letzter Zugriff am 30.11.2020]
- Mathhistory: [Stefan Cohn-Vossen \(1902 - 1936\) - Biography - MacTutor History of Mathematics \(st-andrews.ac.uk\)](#) [letzter Zugriff am 30.11.2020]
- Deutsche Mathematiker Vereinigung : [Geometrie \(mathematik.de\)](#) [letzter Zugriff am 29.11.2020]



Vielen Dank für eure
Aufmerksamkeit