Übersichtsvortrag
Vier Säulen der Geometrie

12.01.2021 – Lea Scherer
Proseminar: Beispiele geometrischer Strukturen
Dozent: Prof. Dr. Moritz Weber

Gliederung des Vortrags

- Aufbau „The Four Pillars of Geometry“ von John Stillwell
- **(i) Euklid**
- Allgemeiner Überblick
- Hauptaussagen
- Kritik
- **(ii) Lineare Algebra**
- Erster Teil: Koordinaten
- Konstruktion der Ebene
- Definitionen
- Dreispiegelungssatz
- Zweiter Teil: Vektoren und euklidische Räume
- Eigenschaften
- Vektorraum
- Satz des Thales
- Matrizen
- Quellen

Aufbau „The Four Pillars of Geometry“ von John Stillwell

- Vier Säulen der Geometrie (nach John Stillwell)

i. Euklid

ii. Lineare Algebra

iii. Zentralperspektive

iv. Symmetrien und Kleins Programm

(i) Euklid

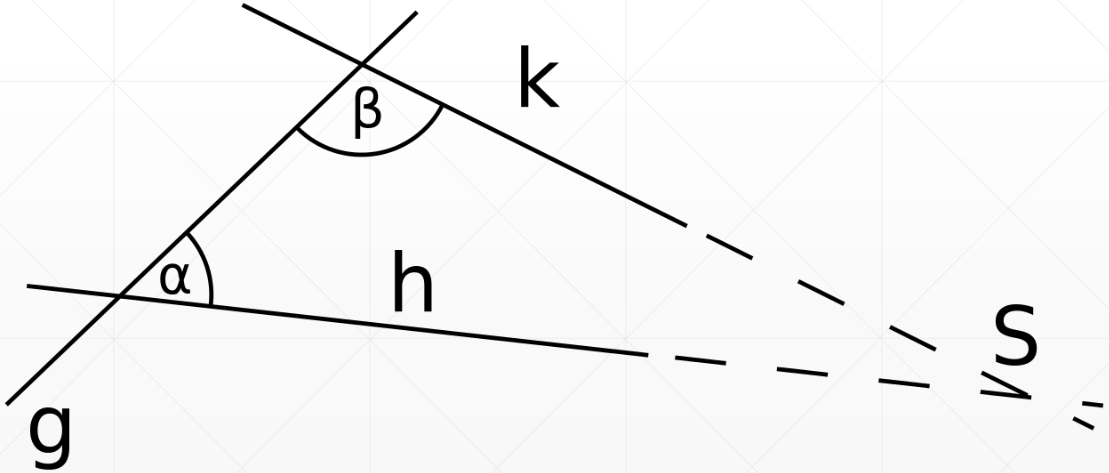
Allgemeiner Überblick

- **Welcher Stoff wird im Buch die Elemente abgedeckt?**
- Arithmetik und Geometrie
- **Warum war Euklid wichtig?**
- Sein Vorgehen zeigte erstmals den Aufbau einer exakten Wissenschaft, beeinflusst heute noch viele Wissenschaftler
- **Warum sind noch andere Betrachtungen nötig?**
- Euklid deckt nicht die gesamte Mathematik ab die zur Geometrie gehört, bildet nur einen von vier Teilen der Geometrie (nach Stillwell)

(i) Euklid

Hauptaussagen

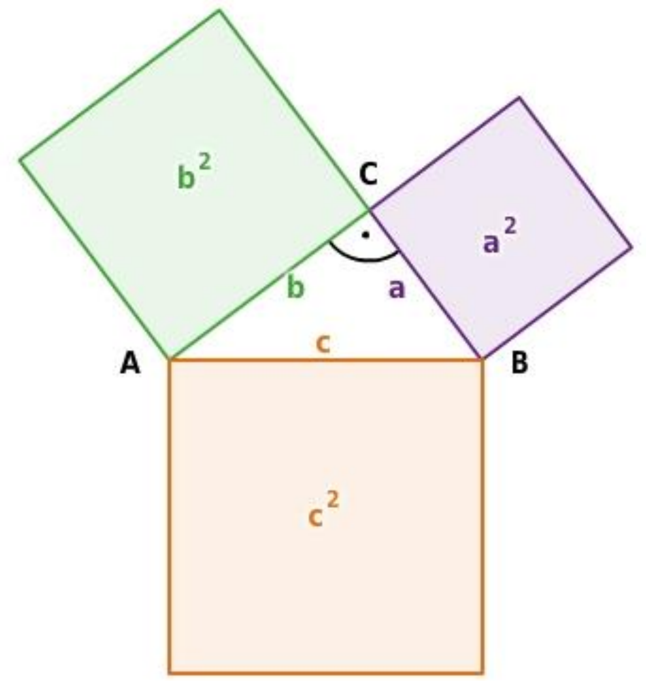
- **Parallelenaxiom**
- *„wenn eine gerade Linie zwei gerade Linien trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden geraden Linien, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.“*



(i) Euklid

Hauptaussagen

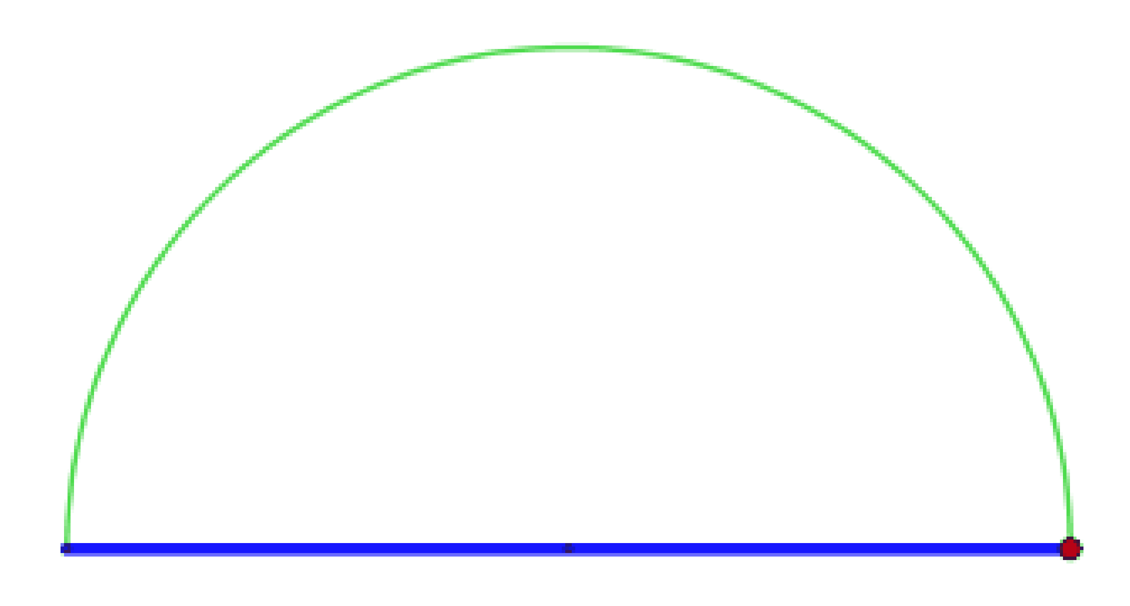
- **Satz des Pythagoras:** Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite gleich den Quadraten der Seiten zusammen, die ihn einschließen.



(i) Euklid

Hauptaussagen

- **Satz des Thales:** Alle von einem Halbkreis umschriebenen Dreiecke sind rechtwinklig



(i) Euklid

Hauptaussagen

- **Fünf platonische Körper:** Es gibt genau fünf.

(i) Euklid

Hauptaussagen

- **Satz von Euklid:** Es gibt unendlich viele Primzahlen

(i) Euklid

Kritik von Stillwell

- Euklids Ansatz nicht vollständig
- manche Annahmen nicht bewiesen

(ii) Lineare Algebra

Erster Teil: Koordinaten

- Vorteil von Zahlen in der Geometrie als Koordinaten entdeckt
- Arithmetisierung der Geometrie
- Unser Vorgehen: definieren der euklidischen Ebene, definieren der Objekte die in der Ebene existieren

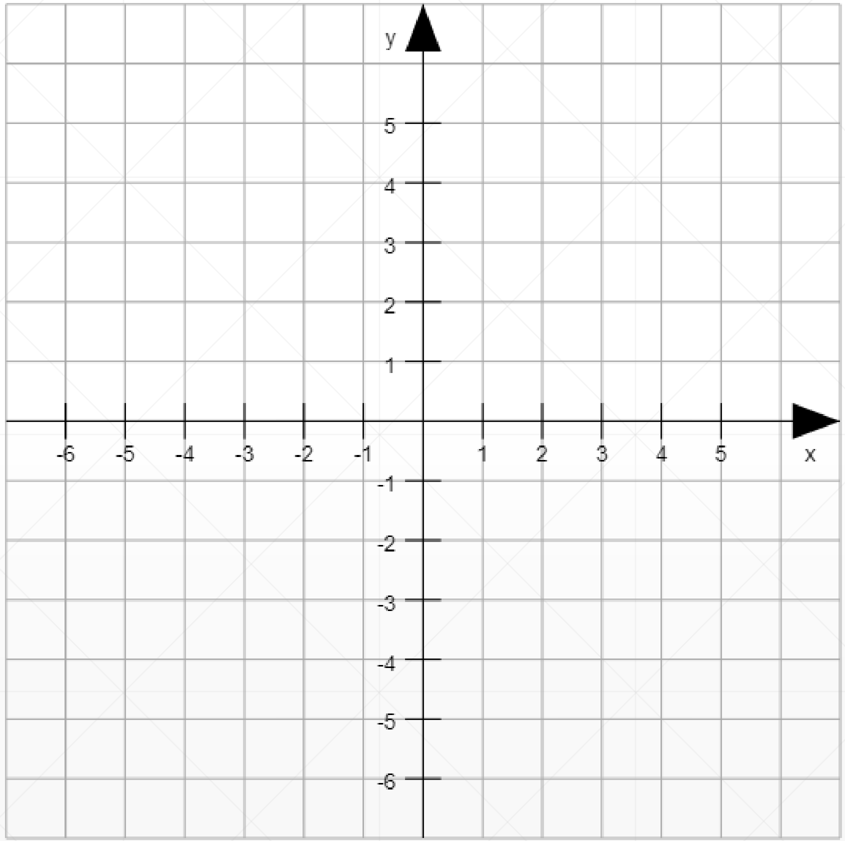
(ii) Lineare Algebra

Konstruktion der Ebene

- Vorstellung von $\mathbb{R}$ als Gerade
- Ziel: $\mathbb{R}$ nutzen um ein Modell zu bauen dass Euklids Ebene Geometrie enthält
- Wir stellen uns zwei senkrechte Geraden vor: x-Achse und y-Achse, Schnittpunkt: Ursprung
- Achsen stellen wir uns als Zahlengeraden vor, Ursprung bei beiden Achsen Null
- rechte/obere Seite des Ursprungs positiv, linke/untere negativ

(ii) Lineare Algebra

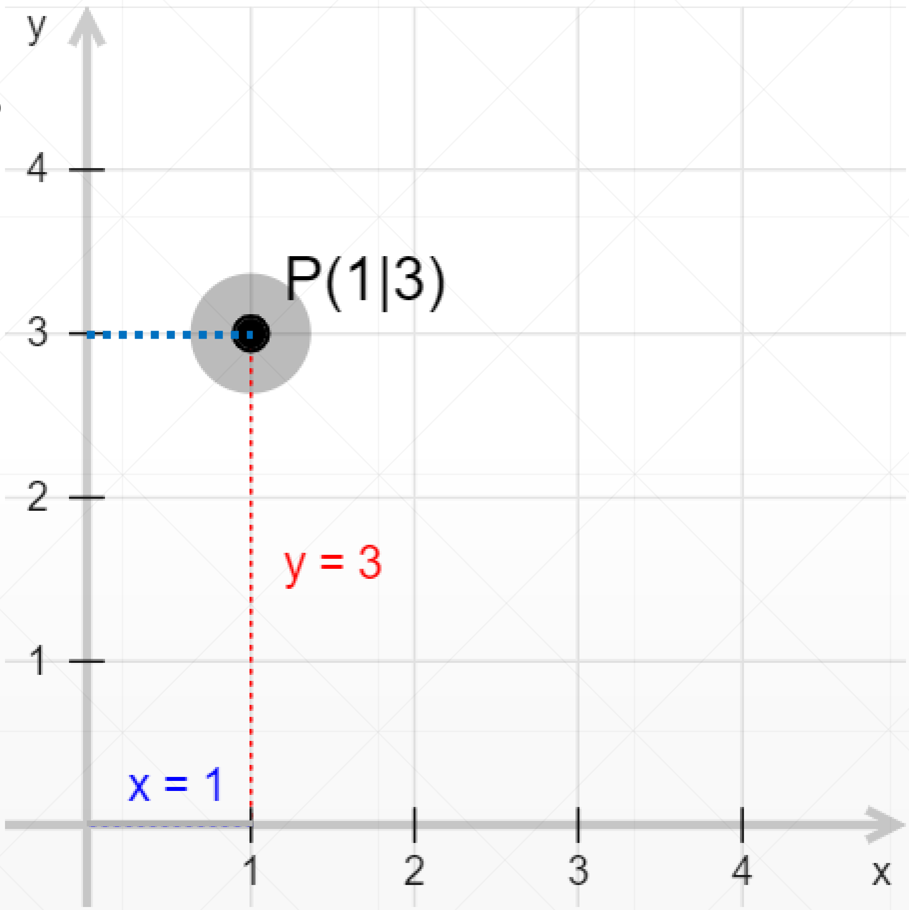
Konstruktion der Ebene



(ii) Lineare Algebra

Konstruktion der Ebene

- Nach Parallelenaxiom: Es gibt durch jeden Punkt P eine eindeutige Gerade parallel zur x-Achse und genauso zur y-Achse
- Die Schnittpunkte mit den Achsen nennen wir die Koordinaten und schreiben sie als Paar (x,y)
- Punkte sind eindeutig durch Koordinaten bestimmt



(ii) Lineare Algebra

Definitionen

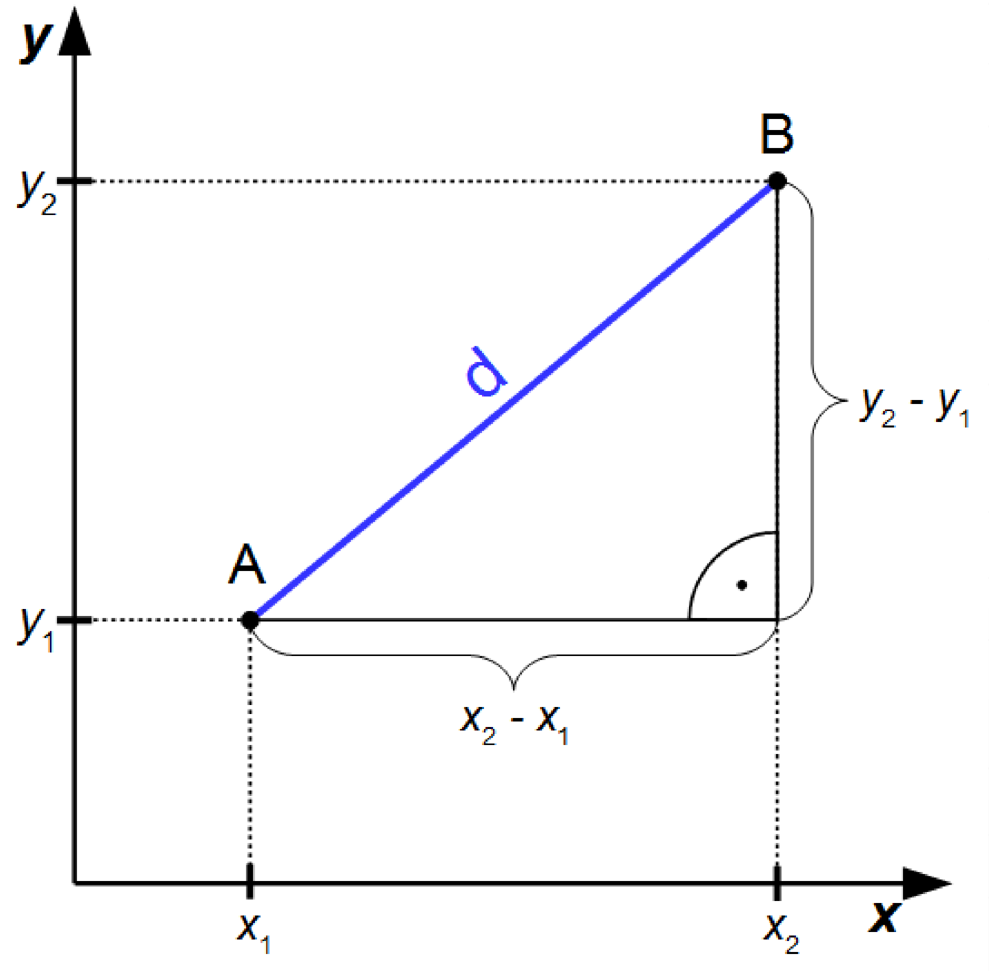
- **Abstand:**
- Zwischen zwei Punkten in $\mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}$ existiert ein

rechtwinkliges Dreieck, die Länge der Hypotenuse

ist der Abstand zweier Punkte A,B

- Abstand=IABI
- Sei $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$
- Mit Satz des Pythagoras folgt:

$IABI= \sqrt{((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2)}$



(ii) Lineare Algebra

Definitionen

- **Problem:**
- Schwäche des Modells, dass immer ein Punkt und zwei Geraden besonders ausgesondert werden (Ursprung, x-Achse, y-Achse)
- In Euklids Geometrie ist jeder Punkt und jede Gerade gleichwertig
- Es ist nötig diese scheinbare Neigung zum Ursprung und den Achsen zu umgehen

(ii) Lineare Algebra

Definitionen

- **Transformation der Ebene:** eine Funktion f: $\mathbb{R}x\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}x\mathbb{R}$, die eine Menge auf sich selbst abbildet
- **Isometrie:** Eine Transformation, die den Abstand beibehält. Also eine Transformation mit der Eigenschaft: If(A)f(B)I=IABI für alle Punkte A,B in $\mathbb{R}x\mathbb{R}$.

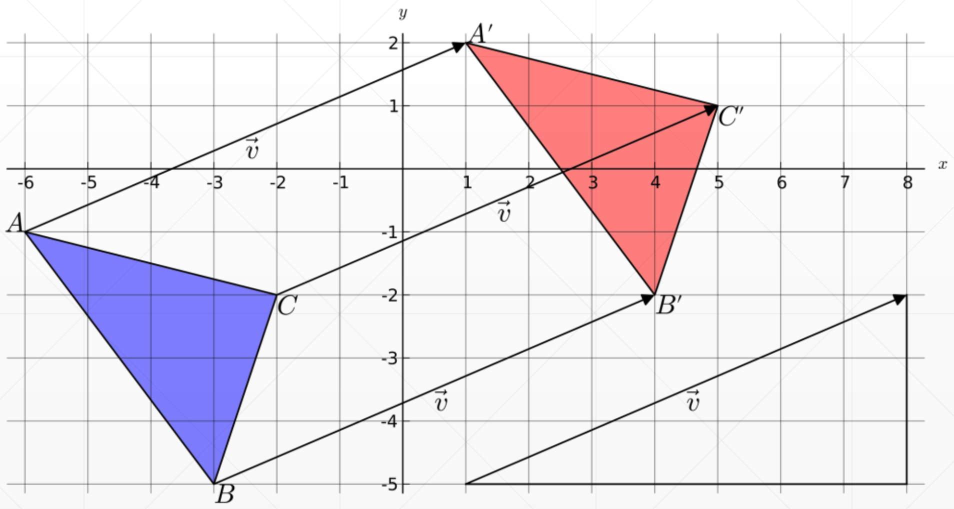
➡ Eine Isometrie bewegt eine Ebene starr

(ii) Lineare Algebra

Definitionen

- **Verschiebung:** bewegt jeden Punkt der Ebene um den gleichen Abstand in die gleiche Richtung, hängt von zwei Konstanten (a und b) ab
- $t_{a,b}: \mathbb{R}x\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}x\mathbb{R}, (x,y) \mapsto (x+a,y+b)$
- Behält offensichtlich Abstand bei

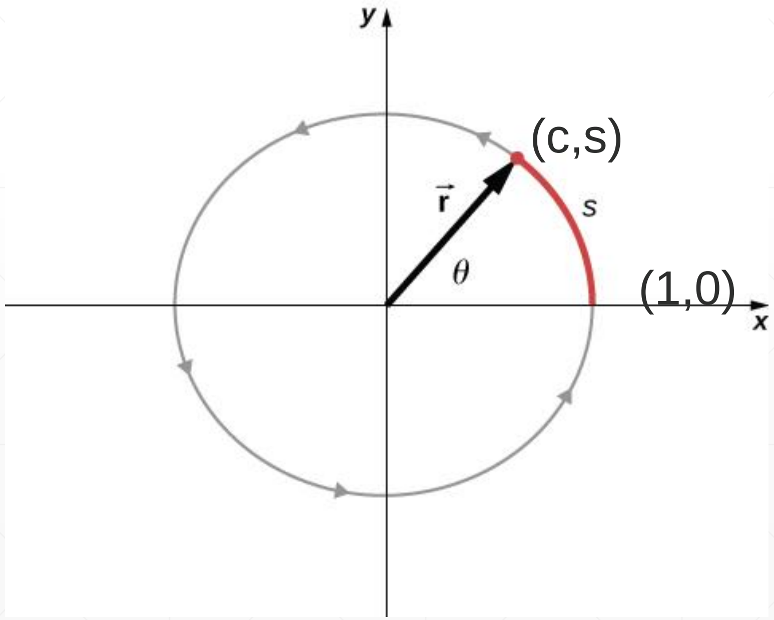
$\longrightarrow$ Isometrie



(ii) Lineare Algebra

Definitionen

- **Drehung:** rotiert jeden Punkt um den Ursprung um den Winkel θ
- praktischer mit cosinus und sinus zu arbeiten
- $c=\cos(\theta)$, $s=\sin(\theta)$
- $c^2+s^2=1$, Bezeichnung für Drehung: $r_{c,s}$
- $r_{c,s}: \mathbb{R}x\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}x\mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto (cx-sy, sx+cy)$
- Länge wird beibehalten



(ii) Lineare Algebra

Definitionen

- **Spiegelung:** Reflexion der Ebene an einer Achse
- Einfachste Spiegelung: Spiegelung an der x-Achse, $(x,y) \mapsto (x,-y)$ (offensichtlich Isometrie)
- Wollen wir die Ebene in einer Geraden y=b, nicht der x-Achse, spiegeln:

$\longrightarrow$ Verschiebung $t_{0,-b}$ verschiebt Gerade y=b auf x-Achse

$\longrightarrow$ Spiegelung in der x-Achse

$\longrightarrow$ Verschiebung $t_{0,b}$ bewegt die x-Achse zurück zur Geraden y=b

(ii) Lineare Algebra

Definitionen

- **Gleitspiegelungen/Schubspiegelungen:** Spiegelung gefolgt von einer Verschiebung in die Richtung der Geraden der Spiegelung
- Beispiel: Spiegelung der x-Achse und anschließende Verschiebung der Länge 1

  in x-Richtung: $(x,y) \longmapsto (x+1,-y)$

(ii) Lineare Algebra

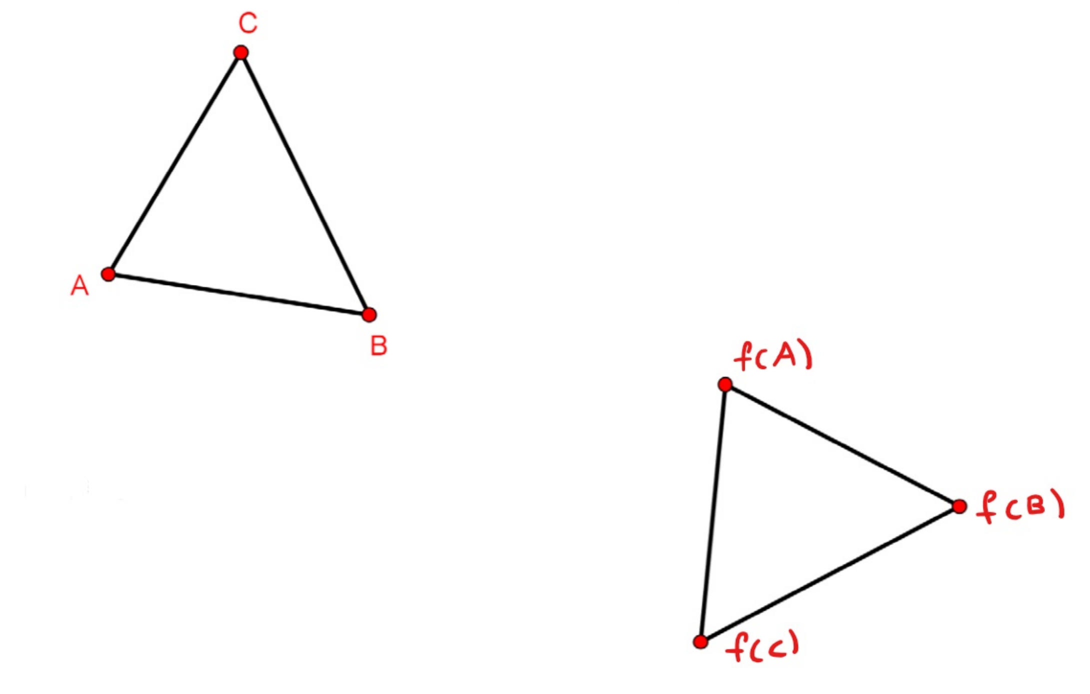
Dreispiegelungssatz

- **Dreispiegelungssatz:** Jede Isometrie von $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ ist eine Kombination von ein, zwei oder drei Spiegelungen
- Vorüberlegung zum Beweis: Eine Isometrie $f:\mathbb{R}x\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}x\mathbb{R}$ ist festgelegt durch die Bilder f(A), f(B) und f(C) von drei Punkten A,B,C, die nicht auf einer Geraden liegen.

(ii) Lineare Algebra

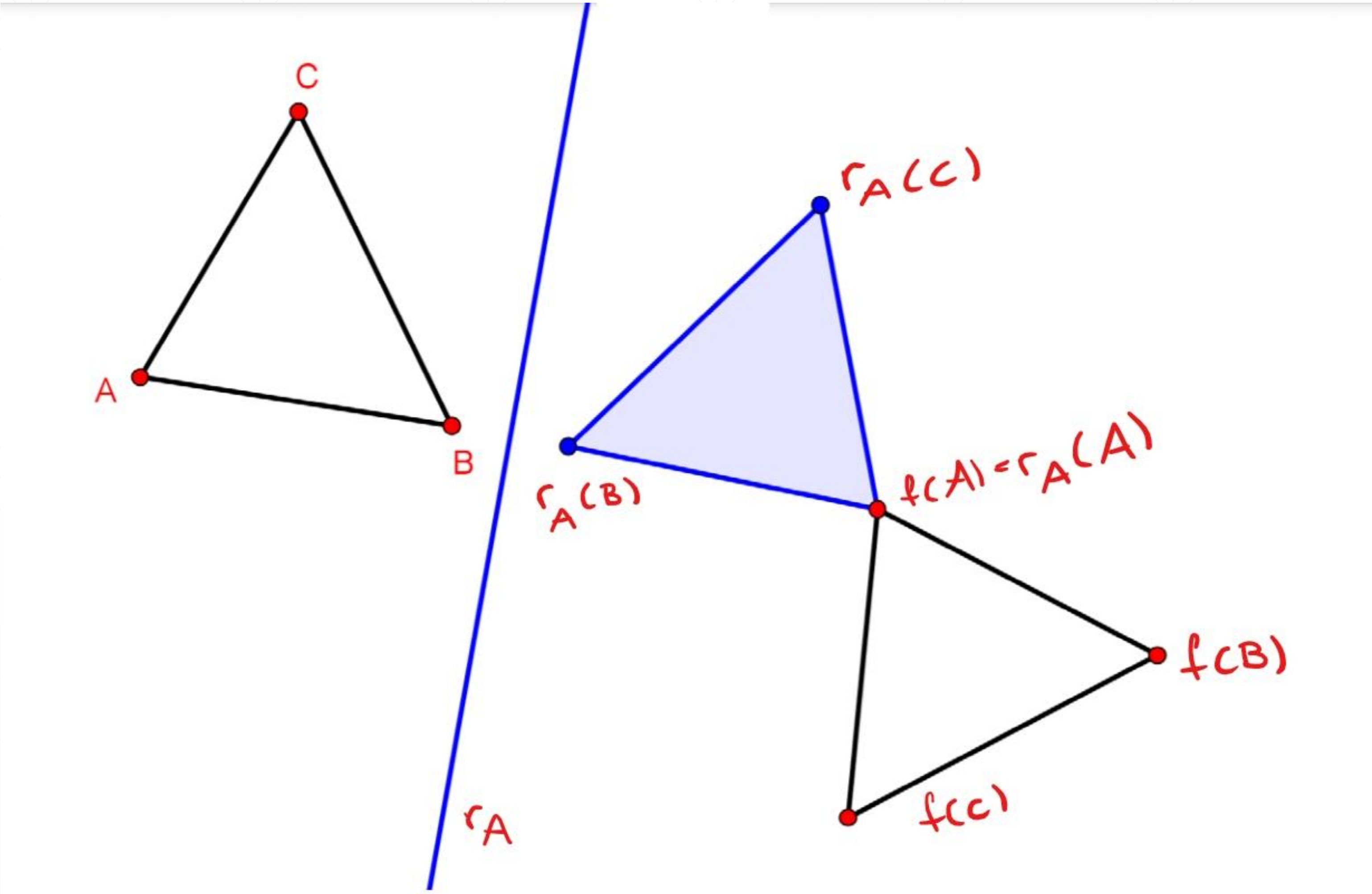
Dreispiegelungssatz

- **Dreispiegelungssatz:** Jede Isometrie von $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ ist eine Kombination von ein, zwei oder drei Spiegelungen
- **Beweis:**



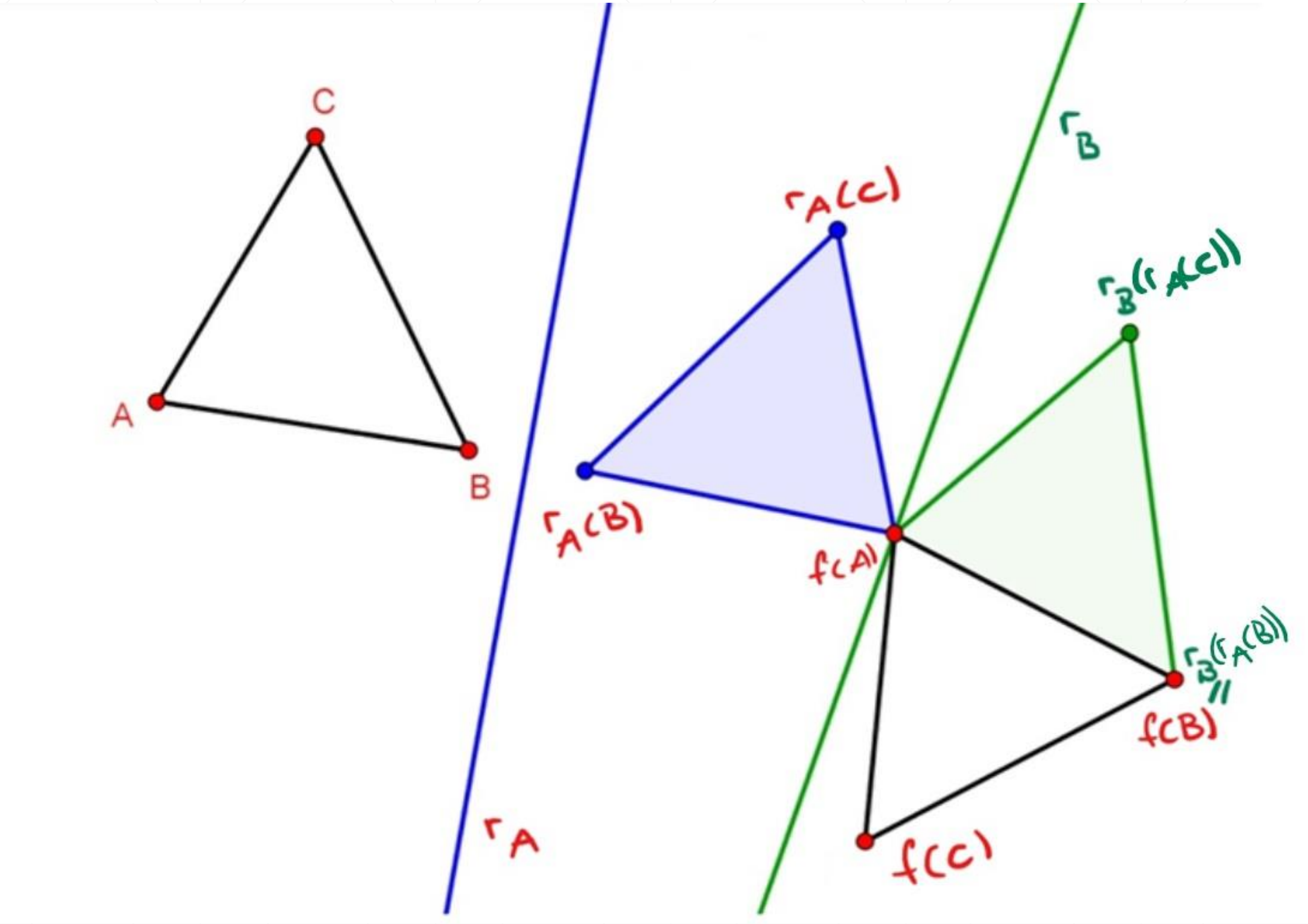
(ii) Lineare Algebra

Dreispiegelungssatz



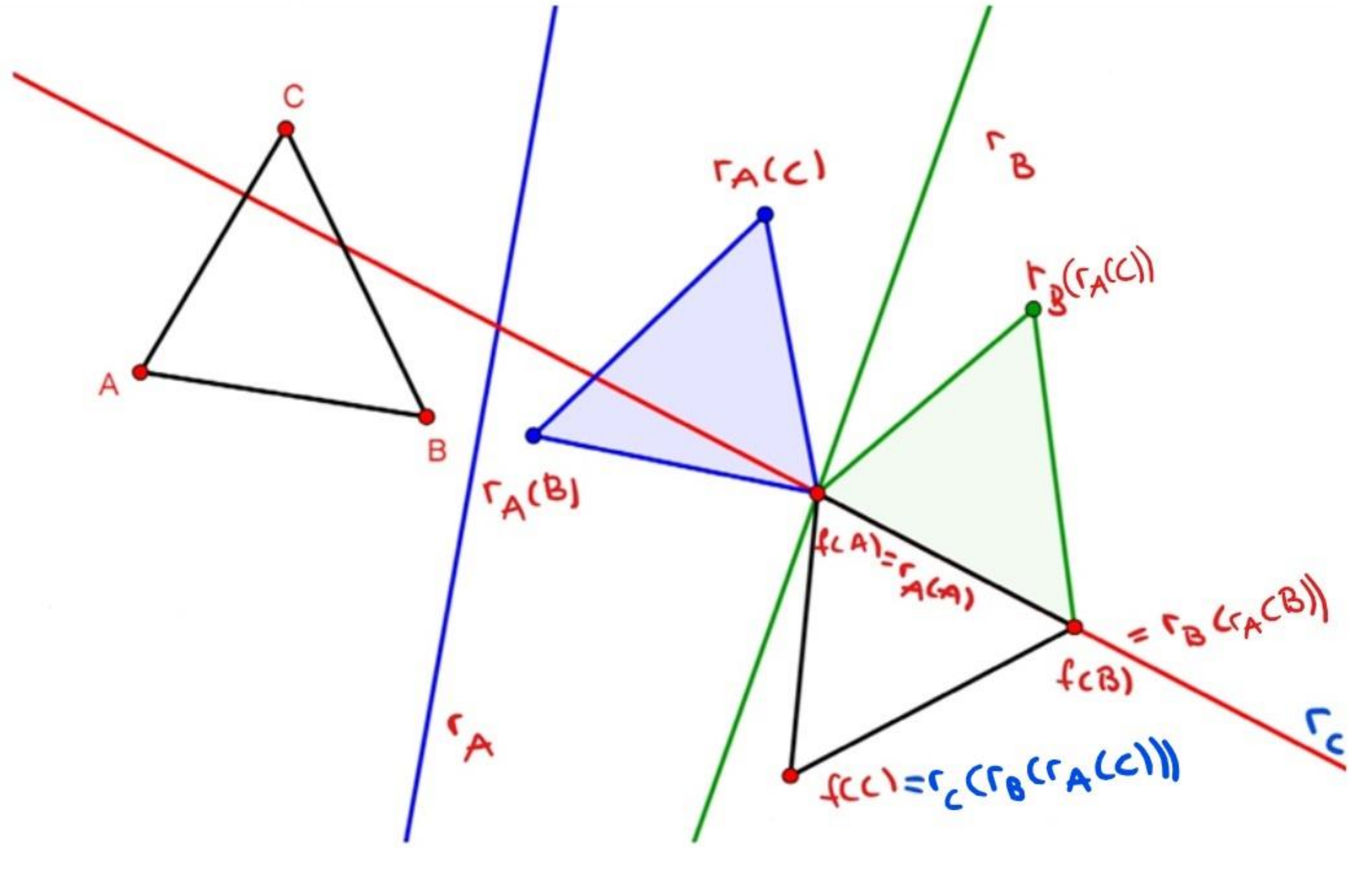
(ii) Lineare Algebra

Dreispiegelungssatz



(ii) Lineare Algebra

Dreispiegelungssatz



(ii) Lineare Algebra

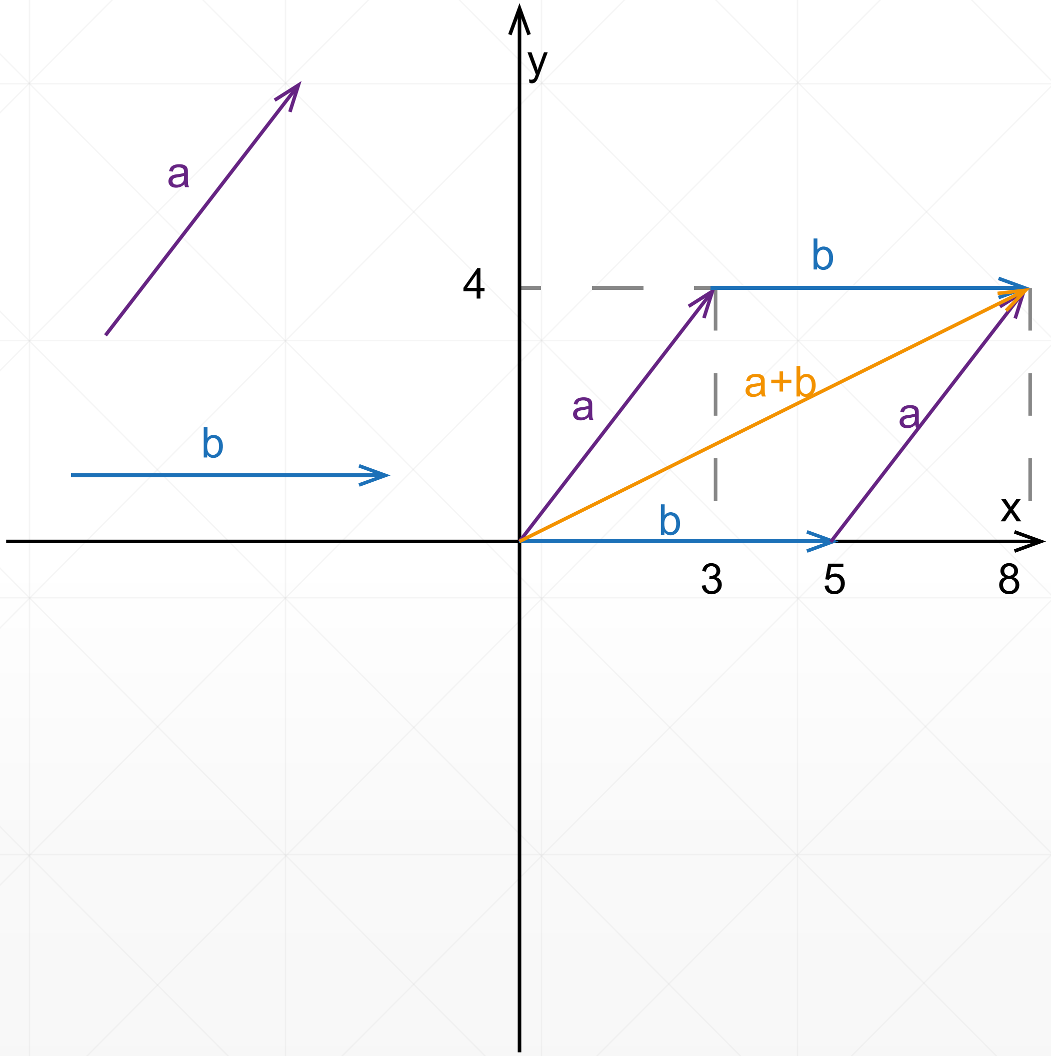
Zweiter Teil: Vektoren und euklidische Räume

- **Vektoren:** Elemente eines Vektorraumes, welche untereinander addiert und mit Skalaren multipliziert werden können
- In der ebenen Geometrie sind Vektoren geordnete Paare von reellen Zahlen (x,y)
- Addition von zwei Vektoren: $(x_1,y_1)+(x_2,y_2):=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
- Multiplikation mit einer reellen Zahl a: a(x,y)=(ax,ay)

(ii) Lineare Algebra

Eigenschaften

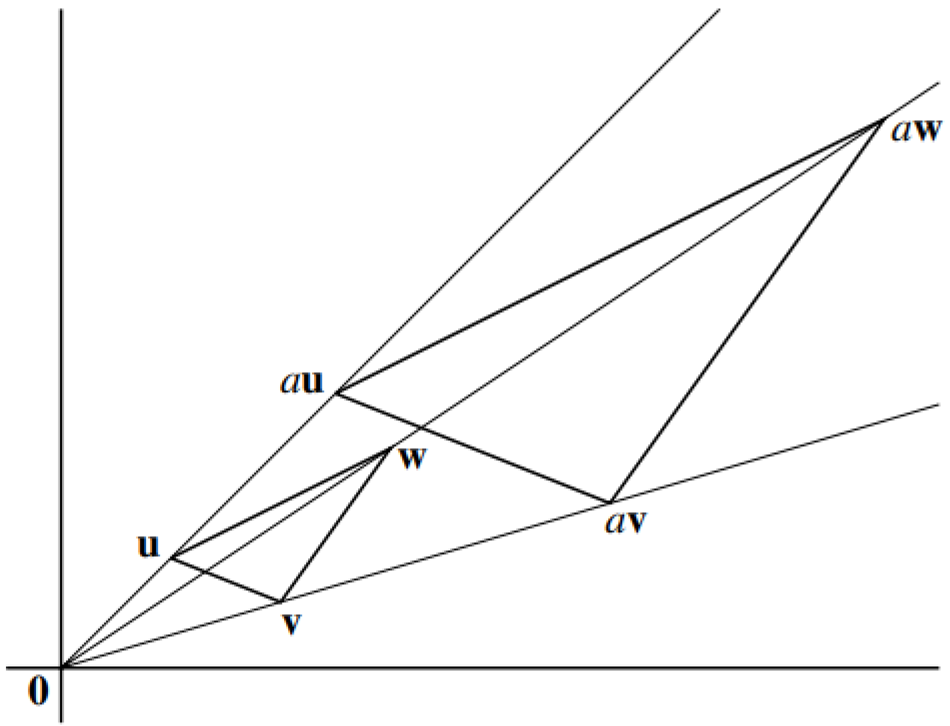
- **Vektorsumme:**
- a=(3,4), b=(5,0)
- a+b=(8,4)



(ii) Lineare Algebra

Eigenschaften

- **Multiplikation mit einem Skalar:**
- u,v,w Vektoren
- Skalar a=2,5



(ii) Lineare Algebra

Vektorraum

- Reeller Vektorraum: Menge V, welche Elemente (Vektoren) enthält, mit zwei Verknüpfungen, Vektoraddition und Skalarmultiplikation, die die folgenden Eigenschaften erfüllen:
- $u,v \in V$ dann auch $u+v \in V$, $au \in V$ für alle $a \in \mathbb{R}$
- Es gibt einen Nullvektor 0
- Jedes $u \in V$ hat ein additives Inverse
- Es gelten die folgenden acht Eigenschaften:

(ii) Lineare Algebra

Vektorraum

- $a,b \in \mathbb{R}$, $u,v \in V$
- $u+v=v+u$
- $1u=u$
- $u+(v+w)=(u+v)+w$
- $a(u+v)=au+av$
- $u+0=u$
- $(a+b)u=au+ab$
- $u+(-u)=0$
- $a(bu)=(ab)u$

(ii) Lineare Algebra

Vektorraum

- Vektoren geben ein Konzept von Richtung
- Punkte sind „in Richtung eines Vektors u“ wenn sie auf der Linie liegen die erzeugt wird durch au, $a \in \mathbb{R}$
- $u,v,w \in V$
- u und v haben verschiedene Richtungen von 0 falls sie keine Vielfachen voneinander sind
- u und v linear unabhängig: es gibt keine $a,b \in \mathbb{R}$ mit $au+bv=0$
- w hat Richtung u bezüglich v falls w-v ein Vielfaches von u ist
- Strecken von v nach w und von s nach t sind parallel falls sie dieselbe Richtung haben. Also falls: $w-v=a(t-s)$ für ein $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(ii) Lineare Algebra

Vektorraum

- **Skalarprodukt/inneres Produkt:**
- $u,v \in V$, $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)$
- $uv=u_1v_1+u_2v_2$
- Ist ein Maß für Abstand: Abstand von u zu 0 ist nach Definition von $\mathbb{R}x\mathbb{R}$

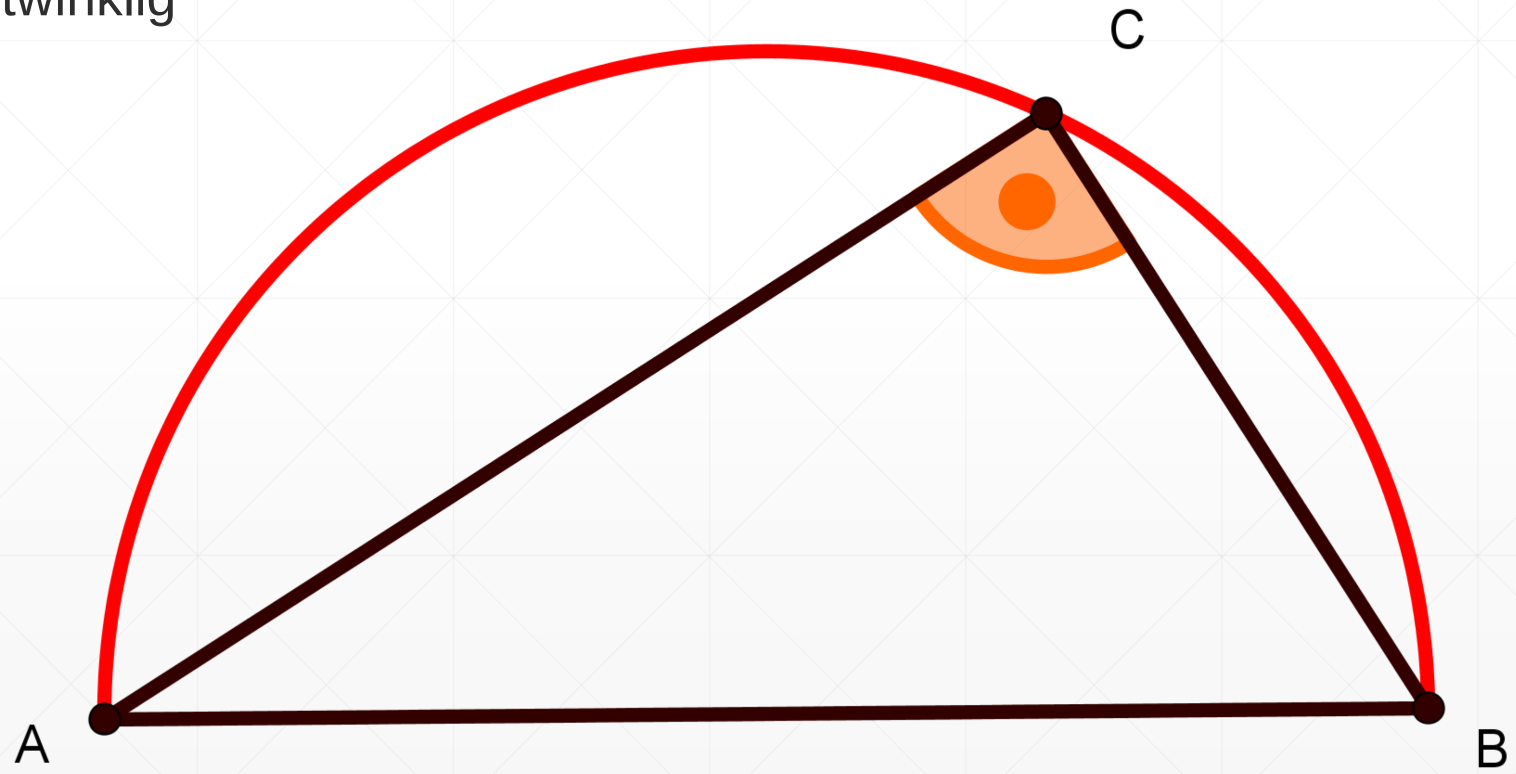
$\sqrt{(u_1^2+u_2^2)}$

- $|u|^2=u_1^2+u_2^2=u*u$
- Eigenschaft: Falls zwei Vektoren orthogonal sind, ist ihr Skalarprodukt Null

(ii) Lineare Algebra

Satz des Thales

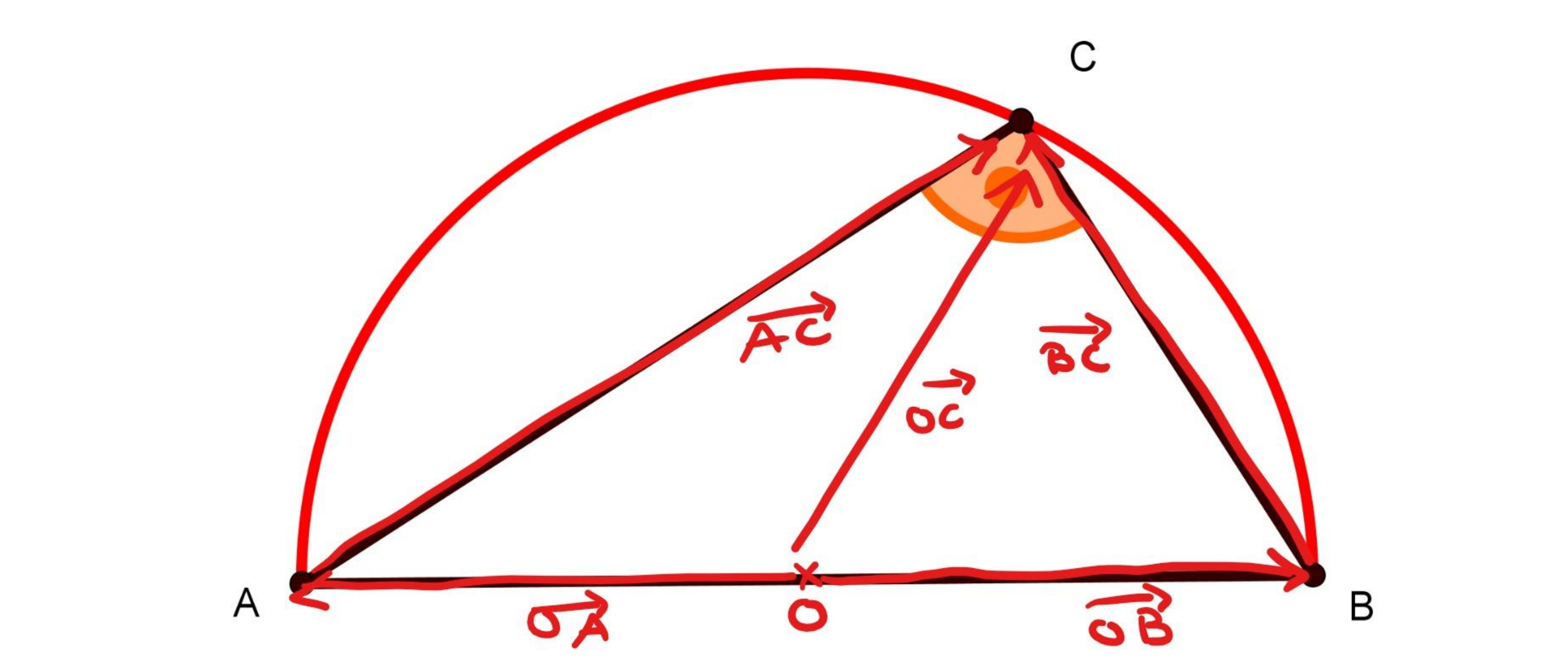
- **Satz des Thales:** Alle von einem Halbkreis umschriebenen Dreiecke sind rechtwinklig



(ii) Lineare Algebra

Satz des Thales

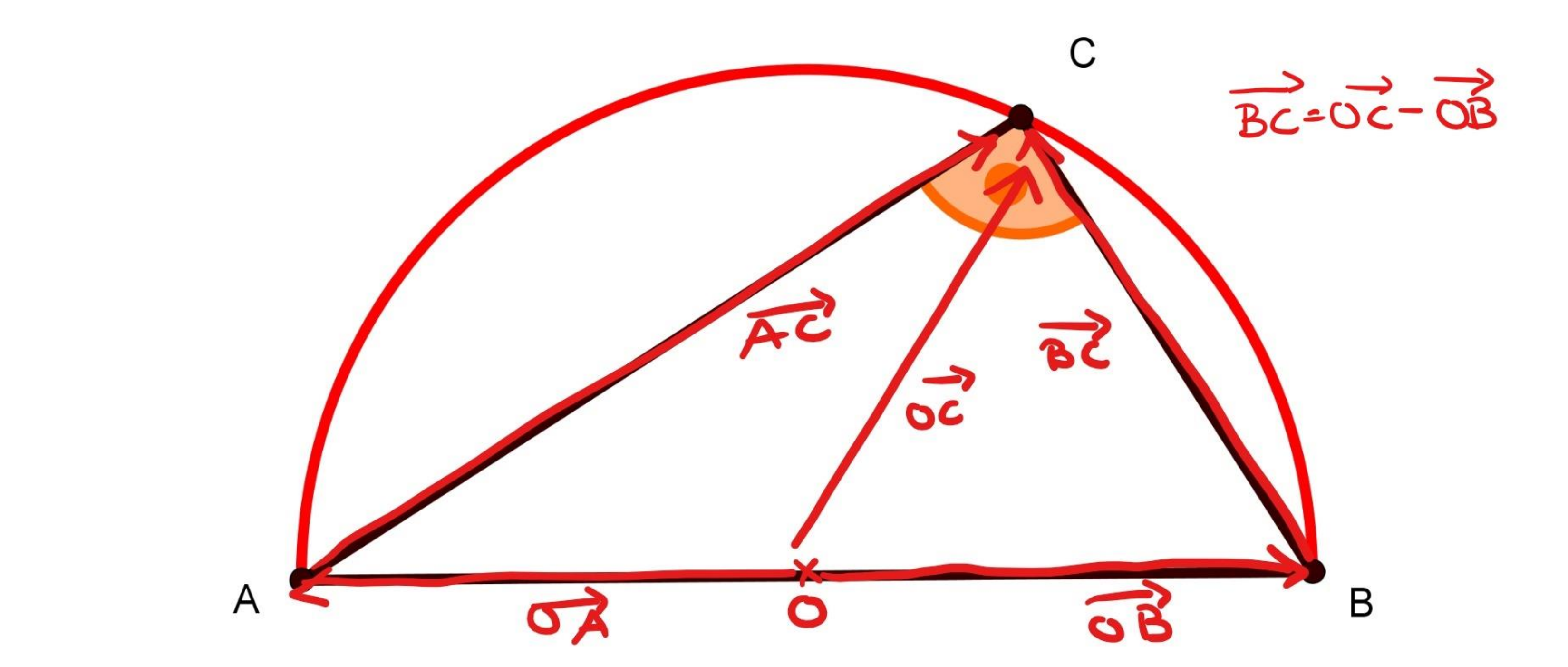
- **Satz des Thales:** Alle von einem Halbkreis umschriebenen Dreiecke sind rechtwinklig



(ii) Lineare Algebra

Satz des Thales

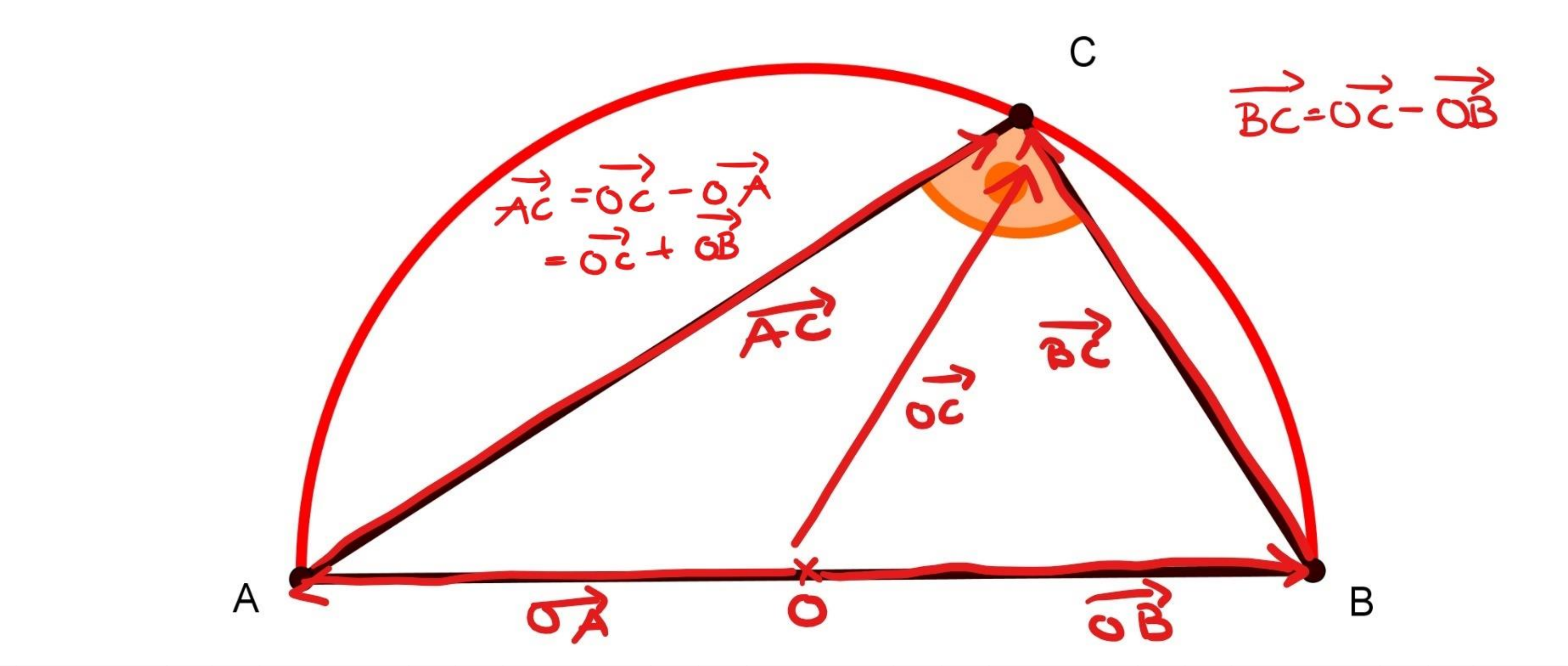
- **Satz des Thales:** Alle von einem Halbkreis umschriebenen Dreiecke sind rechtwinklig



(ii) Lineare Algebra

Satz des Thales

- **Satz des Thales:** Alle von einem Halbkreis umschriebenen Dreiecke sind rechtwinklig



(ii) Lineare Algebra

Satz des Thales

- **Satz des Thales:** Alle von einem Halbkreis umschriebenen Dreiecke sind rechtwinklig

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\
&= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}) \\
&= \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} \\
&= |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 = 0
\end{aligned}
$$

(ii) Lineare Algebra

Matrizen

- **Matrizen:** können Vektoren in andere Vektoren umwandeln
- Beispiel: Drehung von $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ haben wir vorher als Funktion $r_{c,s}: \mathbb{R}x\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}x\mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto (cx-sy,sx+cy)$ kennengelernt
- Übersetzen in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}, \text{ mit } c=\cos(\Theta), s=\sin(\Theta)$$

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx-sy \\ sx+cy \end{pmatrix}$$

(ii) Lineare Algebra

Matrizen

- Vorteil: Funktion separiert von Variablen
- Funktionen können verkettet werden ohne Variablen zu involvieren durch multiplizieren der Matrizen
- z.B. Drehung um θ_1 und Drehung um θ_2 verketten

$\longrightarrow$ Multiplikation der beiden Matrizen

(ii) Lineare Algebra

Matrizen

$c_1 := \cos(\Theta_1),\ s_1 := \sin(\Theta_1), c_2 := \cos(\Theta_2), s_2 := \sin(\Theta_2)$

Drehung um Θ_1: $\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{pmatrix}$

Drehung um Θ_2: $\begin{pmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{pmatrix}$

Rotation um $\Theta_1 + \Theta_2$: $\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1c_2 - s_1s_2 & -(s_1c_2 + c_1s_2) \\ s_1c_2 + c_1s_2 & c_1c_2 - s_1s_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\Theta_1 + \Theta_2) & -\sin(\Theta_1 + \Theta_2) \\ \sin(\Theta_1 + \Theta_2) & \cos(\Theta_1 + \Theta_2) \end{pmatrix}$$

Quellen

- The Four Pillars of Geometry-John Stillwell
- https://de.wikipedia.org/wiki/Elemente_(Euklid)
- https://commons.wikimedia.org/wiki/File:01_Satz_des_Thales.gif
- https://de.wikipedia.org/wiki/Parallelenaxiom#/media/Datei:Parallel_postulate.svg
- https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/parallelenaxiom-des-euklid/7666
- https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Thales#/media/Datei:01_Satz_des_Thales.gif

Quellen

- http://www.math.uni-bonn.de/ag/cfb/lineare-algebra-2014-15/
- https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fm.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DdtjJiw3GQG4&psig=AOvVaw0lJ0bCYI4jWzFiP-AxQfWK&ust=1609083236645000&source=images&cd=vfe&ved=0CAIQjRxqFwoTCJiI77H86-0CFQAAAAAdAAAAABAD
- https://www.matheretter.de/wiki/kartesisches-koordinatensystem
- https://www.mathe-lerntipps.de/abstand-zweier-punkte/

Quellen

- https://de.wikipedia.org/wiki/Parallelverschiebung
- https://courses.lumenlearning.com/suny-osuniversityphysics/chapter/10-1-rotational-variables/
- https://www.juergen-roth.de/lehre/skripte/geometrie/geometrie_2_kongruenzabbildungen_der_ebene.pdf
- https://mathematik-wissen.de/vektorrechnung/addition-von-vektoren-vektoraddition
- https://demonstrations.wolfram.com/ThalessTheoremAVectorBasedProof/

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit