# Übersichtsvortrag „Vier Säulen der Geometrie“ – Teil II

Proseminar: Beispiele geometrischer Strukturen

Dozent: Prof. Dr. Moritz Weber

Referent: René Linster

Datum: 12.01.2021

# Inhaltsverzeichnis

# 1. John Stillwell

- 12.08.1942 in Melbourne geboren
- Australischer Mathematiker
- Studium in Melbourne mit Master-Abschluss, Promotion am MIT, Professor an Uni San Francisco
- Tritt durch seine Lehrbücher & Aufsätze besonders hervor

  → Vermittlung der Mathematik unter Einbezug des geschichtlichen Kontexts
- Gruppentheorie & deren geom. Anwendungen

# 2. „The Four Pillars of Geometry“ (Stillwell, 2005)

Nach Stillwell besitzt die Geometrie **4 Säulen**:

1. Euklidische Geometrie
2. Lineare Algebra
3. Projektive Geometrie
4. Transformationsgeometrie

Jeder dieser 4 Säulen bildet einen eigenständigen Zugang zur Geometrie

# 2. „The Four Pillars of Geometry“ (Stillwell, 2005)

| Projektive Geometrie | Transformationsgeometrie |
|---|---|
| „erklärt nicht nur, warum Objekte so aussehen, wie sie aussehen, sondern auch, warum Geometrie mit der Algebra verwickelt ist“ | „beste Weg, um zwischen den verschiedenen Geometrien zu unterscheiden“ |
| Perspektive | Klein‘s Idee & Erlangener Programm |
| Kreuzverhältnis | Lineare Transformationen |
| Sätze von Pappus & Desargues | Isometrien der 2-Sphäre |

# Ziel & Bedeutsamkeit d. Buches:

Aufzeigen, „dass Geometrie auf vier grundlegend unterschiedlichen Arten entwickelt werden kann & dass alle verwendet werden sollten, wenn das Thema in seiner ganzen Pracht gezeigt werden soll“.

➡ nicht nur einen „richtigen“ Weg, Geometrie zu lehren

- Kenntnis aller vier ist nötig, um die Geometrie in ihrer Gesamtheit zu erfassen & verstehen
- Fähigkeit bzw. Kompetenz unterschiedliche Standpunkte für Argumentationen einnehmen zu können

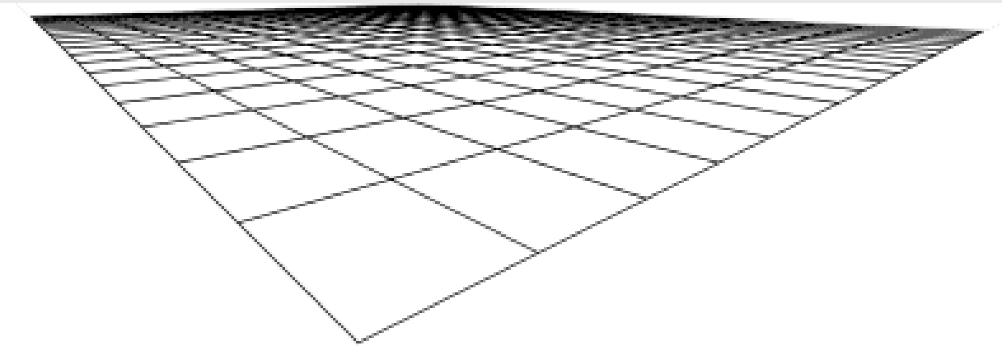
- **Einzigartigkeit des mathematischen Themengebiets „Geometrie“ herausstellen**

# 3. Projektive Geometrie

- Euklidische Geometrie: Figuren, die mit gerader Kante & Kompass gezeichnet werden

  →Gibt es Figuren, die nur mit einer geraden Kante gezeichnet werden können?
- Gerade Kante weist keine Markierungen auf

  →unmöglich, eine Länge zu kopieren



- **ABER:** perspektivische Ansicht eines Fliesenbodens

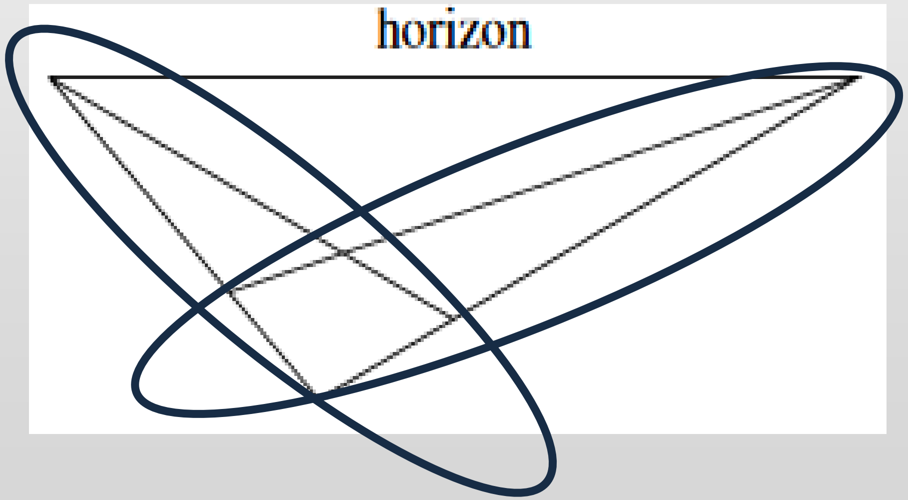
**Ist es möglich, eine perspektivische Ansicht eine Fliesenbodens nur mit einer geraden Kante zu zeichnen?**

# 3.1. Zeichnen nur mit gerader Kante

- Parallele Geraden sehen im Allgemeinen nicht parallel aus, sondern es scheint so, als würden sie sich im Horizont treffen

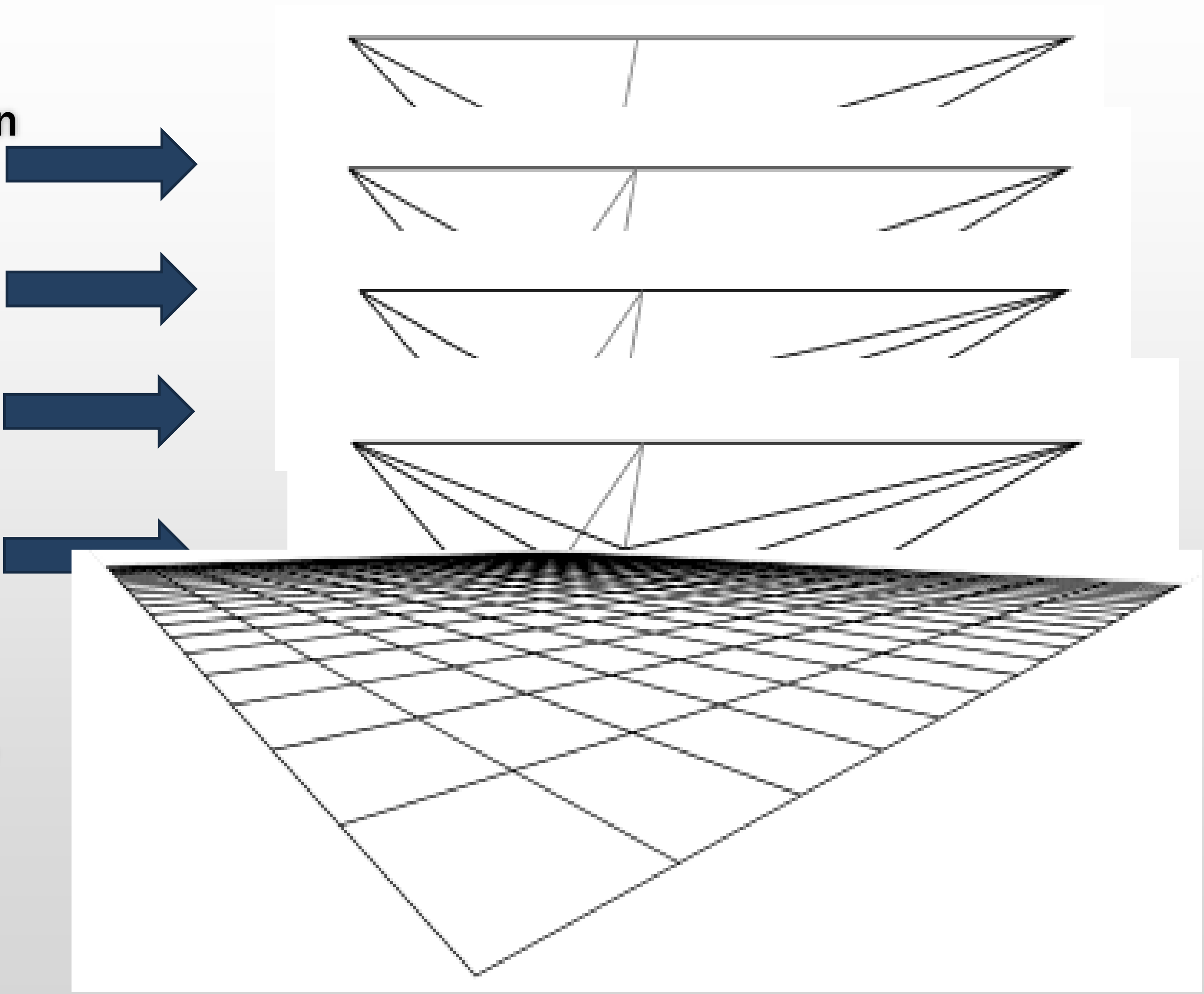
  → „Fluchtpunkt“ oder „Unendlichkeitspunkt“

  → Horizont = Gerade im Unendlichen, da er aus den Punkten im Unendlichen besteht
  lineare Unendlichkeit
- Ausgangspunkt: Horizont + zwei Schrägen, die sich treffen
  → 1. Fliese: durch zwei Paare paralleler Linien (Paare, die sich am Horizont treffen)



# Konstruktionsanleitung

1. Zeichnen Sie die Diagonale der ersten Fliese zum Horizont
2. Verlängern Sie die Diagonale der zweiten Fliese bis zum Horizont
3. Zeichnen Sie die Seite der zweiten Fliese durch die neue Kreuzung
4. Zeichnen Sie die Seite weiterer Kacheln durch die neue Kreuzung



Wiederholte Ausführung dieser Schritte führt zum gewünschten Ergebnis

# 3.2. Axiome der projektiven Geometrie

Axiome „Projektive Ebene“:

1. Zwei beliebige „Punkte“ sind in einer eindeutigen „Gerade“ enthalten.
2. Zwei beliebige „Geraden“ enthalten einen eindeutigen „Punkt“.
3. Es gibt vier „Punkte“, von denen sich keine drei in einer „Geraden“ befinden.

Definition „Parallelen“:

„Parallelen“ werden als Geraden, die sich auf einer bestimmten Linie – dem Horizont – treffen, bezeichnet.

„reelle projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$“

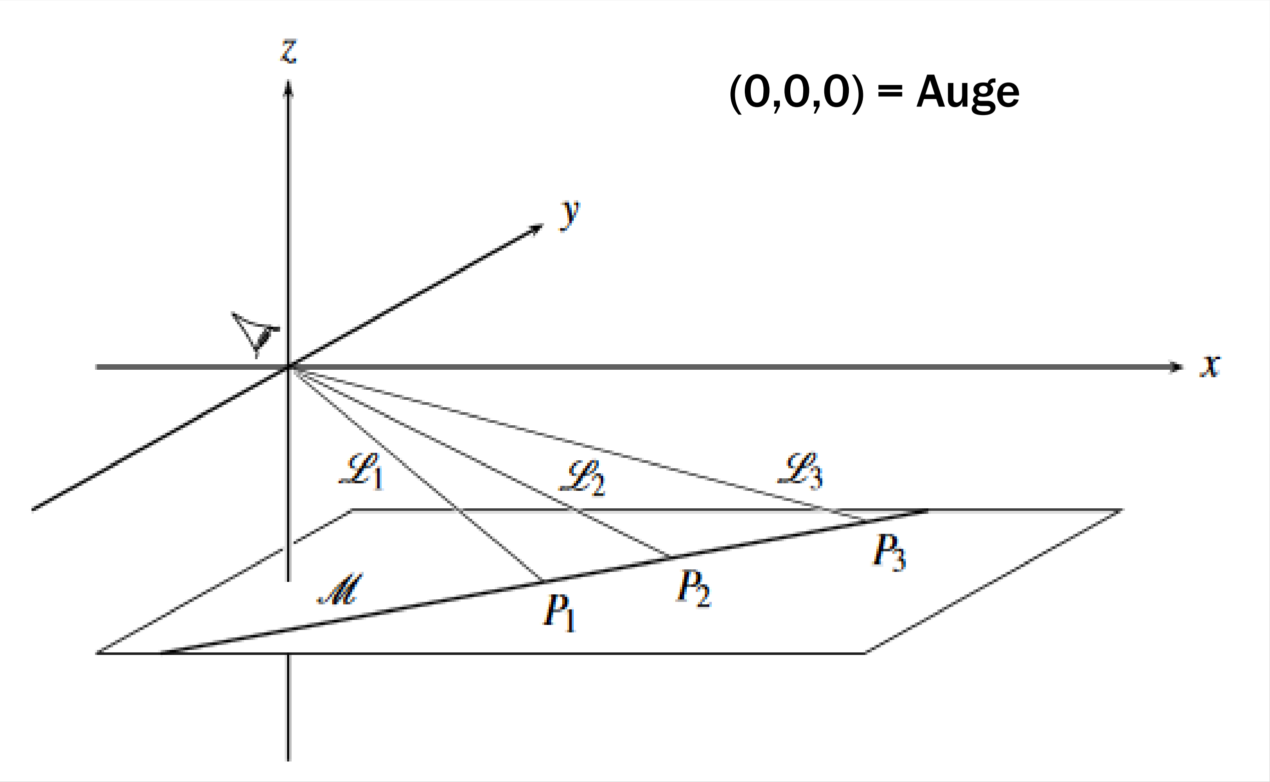
# Reelle projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$

„Punkte“ → Geraden durch $(0,0,0) = 0$ in $\mathbb{R}^3$
„Geraden“ → Ebenen durch $(0,0,0) = 0$ in $\mathbb{R}^3$
„Ebene“ → Menge aller Geraden durch $(0,0,0) = 0$ in $\mathbb{R}^3$

1. Zwei beliebige „Punkte“ sind in einer eindeutigen „Gerade“ enthalten.
   - ✓ da zwei gegebene Geraden durch 0 in einer eindeutigen Ebene durch 0 liegen
2. Zwei beliebige „Geraden“ enthalten einen eindeutigen „Punkt“.
   - ✓ da sich zwei beliebige Ebenen durch 0 in einer eindeutigen Gerade durch 0 treffen
3. Es gibt vier „Punkte“, von denen sich keine drei in einer „Geraden“ befinden.
   - ✓ Beispiel: Geraden von 0 zu den vier Punkten (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)

# Reelle projektive Ebene RP²

„Punkte“ → Geraden durch (0,0,0) = 0 in $\mathbb{R}^3$
„Geraden“ → Ebenen durch (0,0,0) = 0 in $\mathbb{R}^3$
„Ebene“ → Menge aller Geraden durch (0,0,0) = 0 in $\mathbb{R}^3$




Wenn

$P_n \longrightarrow \infty$,

dann

$L_n \longrightarrow$ horizontale x-Achse

→horizontale Gerade durch 0 = „Punkte im Unendlichen“

→Ebene aller horizontalen Geraden durch 0 = „Horizont“ bzw. „Gerade im Unendlichen“

# Homogene Koordinaten

Anwendung von Methoden der linearen Algebra, da

- ✓ „Punkte“ von $\mathbb{R}P^2$ → Geraden durch 0 in $\mathbb{R}^3$
- ✓ „Geraden“ von $\mathbb{R}P^2$ → Ebenen durch 0 in $\mathbb{R}^3$

<u>Gerade in $\mathbb{R}P^2$:</u>

- Bestimmung durch beliebigen Punkt $(x,y,z) \neq 0$
  →Punkte $(tx,ty,tz)$ mit $t \in \mathbb{R}$
- „Punkt“ nicht durch ein einzelnes Tripel $(x,y,z)$ gegeben, sondern durch eines seiner Vielfachen ($\neq 0$) →homogene Koordinaten des „Punktes“
- Beispiel: Zwei Vektoren v & w identifiziert, wenn w ein skalares Vielfaches von v ist → $v=(1,1,1)$ und $w=(4,4,4)$

<u>Ebene in $\mathbb{R}P^2$:</u>

- Homogene Gleichung: $ax+by+cz = 0$ → $tax+tby+tcz = 0$ mit $t \in \mathbb{R}$
- „Gerade“ ist nicht durch Tripel $(a,b,c)$ gegeben, sondern durch die Menge aller seiner Vielfachen ($\neq 0$)

# 3.3. Projektion

- dreidimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^3$, der die Geraden und Ebenen von $\mathbb{R}P^2$ enthält, besitzt noch weitere Ebenen (die die nicht durch (0,0,0) verlaufen)
  →jede solche Ebene „kann als perspektivische Ansicht der projektiven Ebene angesehen werden“

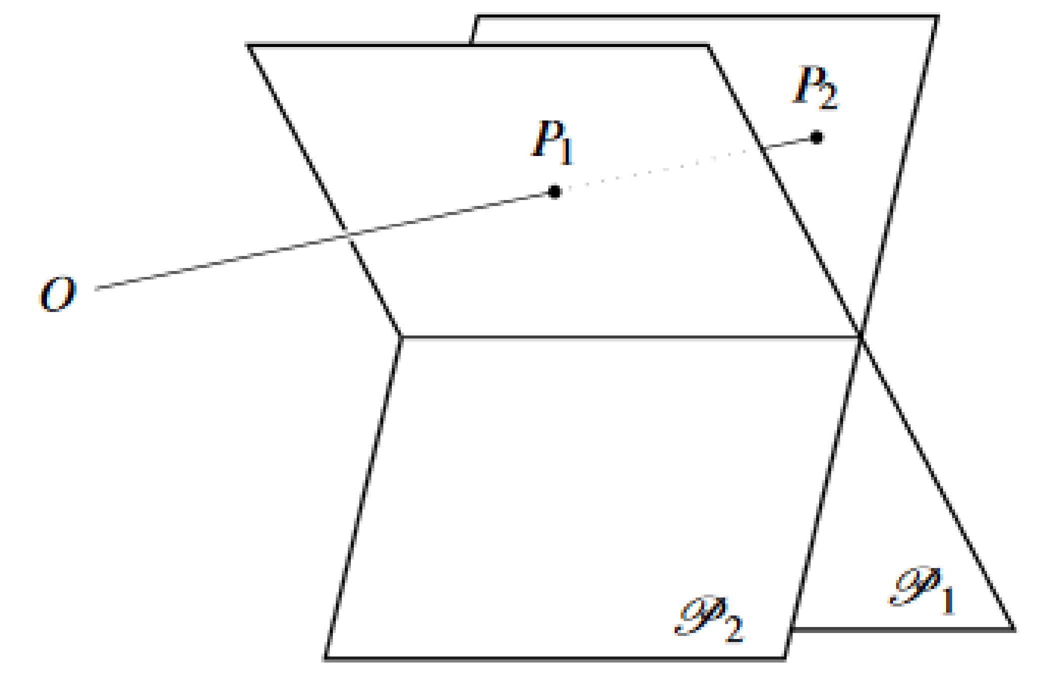
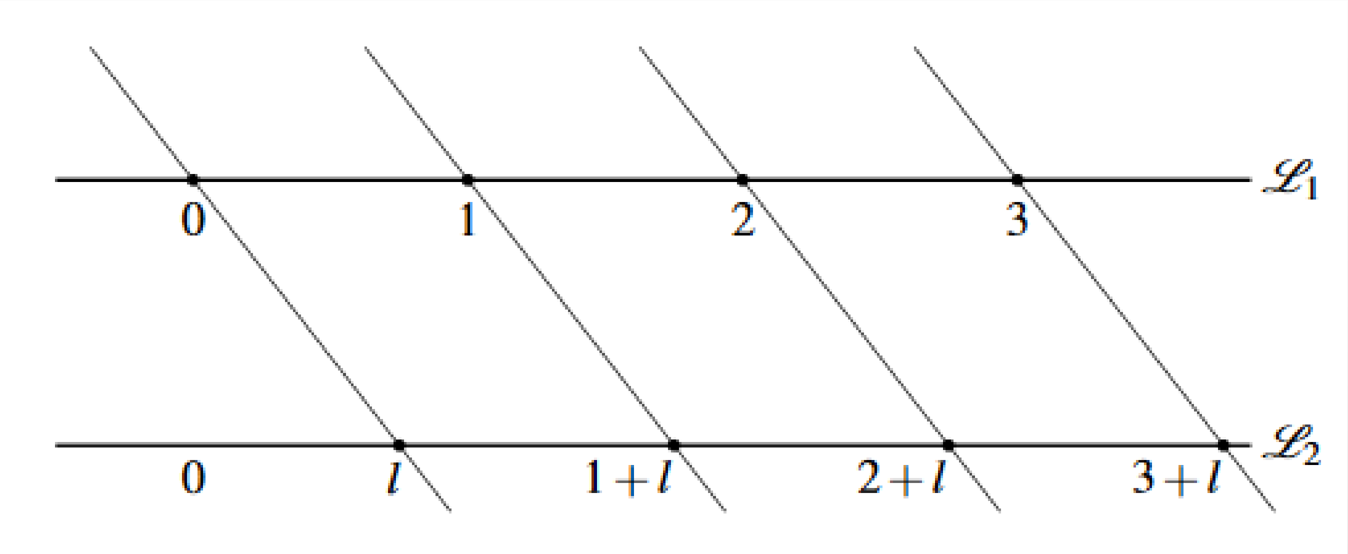



Abbildung : Projizieren einer Ebene auf eine andere

# Fall 1: Projektion aus dem Unendlichen

- Zwei parallele Geraden $L_1$ und $L_2$
- Projektion von einem Punkt P im Unendlichen

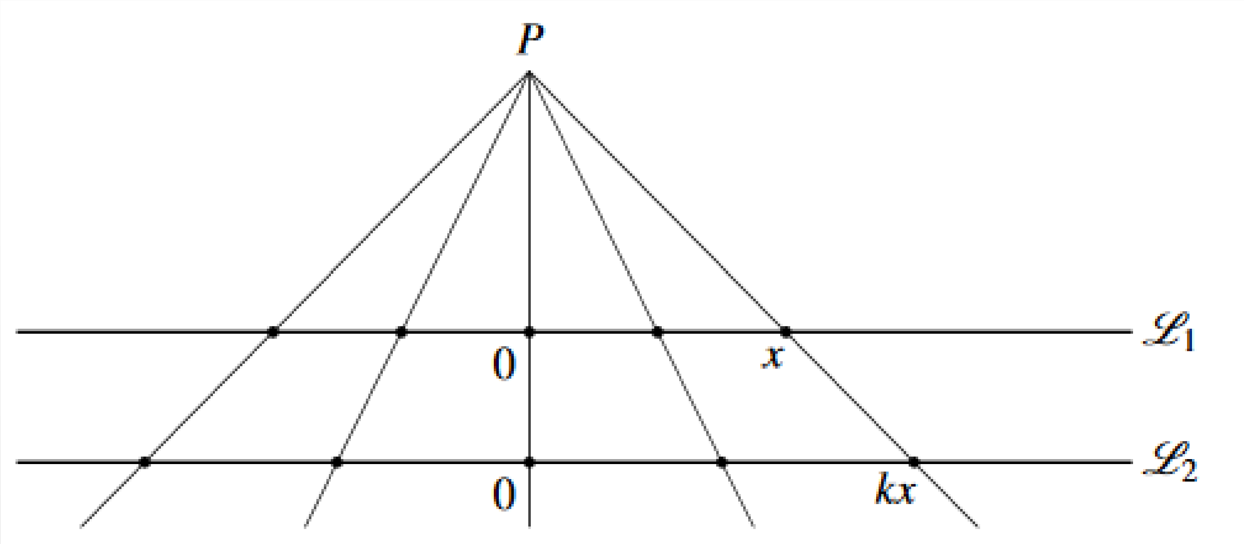



Jeder Punkt auf $L_1$ ist um einen konstanten Abstand l verschoben

Anders formuliert: Die „Projektion aus dem Unendlichen“ sendet jedes x auf $L_1$ nach x+l auf $L_2$.

# Fall 2: Projektion von einem endlichen Punkt

- Zwei parallele Geraden $L_1$ und $L_2$
- P liegt auf einer Achse durch die Nullpunkte von $L_1$ und $L_2$

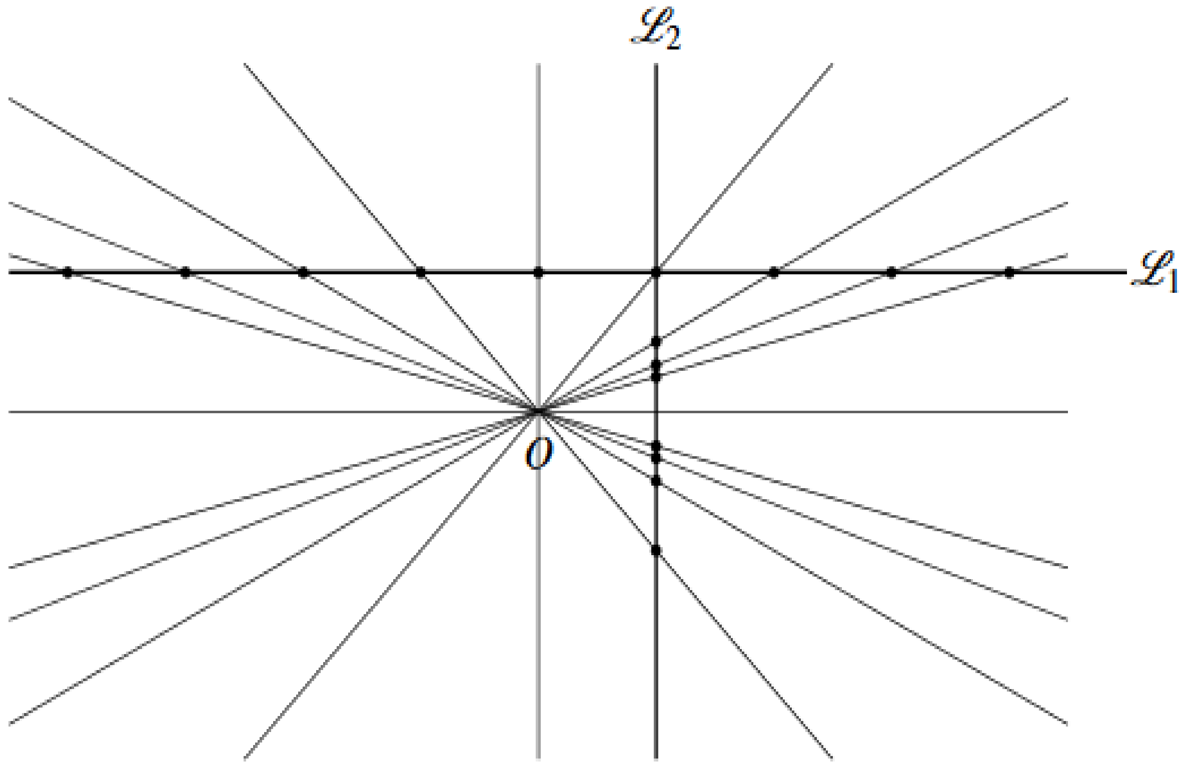



Der Abstand zwischen den Punkten wird um einen konstanten Faktor $k \neq 0$ vergrößert

Anders formuliert: Die „Projektion von einem endlichen Punkt" sendet jedes x auf $L_1$ nach kx auf $L_2$ (bzw. jedes x auf $L_2$ nach x/k auf $L_1$)

# Fall 3:

- Zwei nicht parallele Geraden $L_1$ und $L_2$
- $L_1$ parallel zur x-Achse & $L_2$ parallel zur y-Achse




Diese Projektion sendet jedes x auf $L_1$ nach $\frac{1}{x}$ auf $L_2$.

→jede Kombination dieser Projektionen ist eine Kombination der Funktionen $\frac{1}{x}$, kx und x+l („Erzeugungstransformationen“)

Linear gebrochenrationale Funktionen

# 3.4. Linear gebrochenrationale Funktionen

- Funktionen, die x an $\frac{1}{x}$, kx und x+l senden, gehören zu Funktionen, die folgende Form besitzen:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ mit } ad - bc \neq 0$$

- Für c ≠ 0 gilt:

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$

- Für c = 0 gilt:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$$

→jede linear gebrochenrationale Funktion besteht also aus den Erzeugungstransformationen

# Division durch Null

- Keine gültige Operation, denn $3 \cdot 0 = 2 \cdot 0 \rightarrow 2 = 3$ (Widerspruch)
- In manchen Situationen aber sinnvoll $\rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$

  $\rightarrow$ Was ist mit $x=0$?

  $\rightarrow$ Wann wird $y=0$?

<u>Lösung:</u> f(x) wird auf $x=\infty$ erweitert

$\rightarrow \frac{1}{\infty}=0$ & $\frac{1}{0}= \infty$

$\rightarrow$ Objekt $\infty$ ist der Punkt im Unendlichen einer Gerade (z. B. $L_1$)

$\rightarrow f(x)$ nicht nur für $\mathbb{R}$, sondern für $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

reelle projektive Gerade $\mathbb{R}P^1$

# Kreuzverhältnis

- Visuell offensichtlich, dass Projektionen die Längen bzw. Längenverhältnisse ändern kann
- Erinnerung Fliesenboden: gleiche Kacheln trotz ungleicher Größe & Form

→Wie erkennt man nun mathematisch, dass sie gleich sind?

<u>Lösung:</u> Verhältnis von Verhältnissen = Kreuzverhältnis

$$\boxed{[p,q;r,s] = \frac{(r-p)(s-q)}{(r-q)(s-p)}}$$

➡ Kreuzverhältnis wird durch Projektion beibehalten ➡ (definierende) Invariante linear gebrochenrationaler Transformationen

<u>Man zeigt leicht:</u>
Jede Invariante von vier Punkten ist eine Funktion des Kreuzverhältnisses.

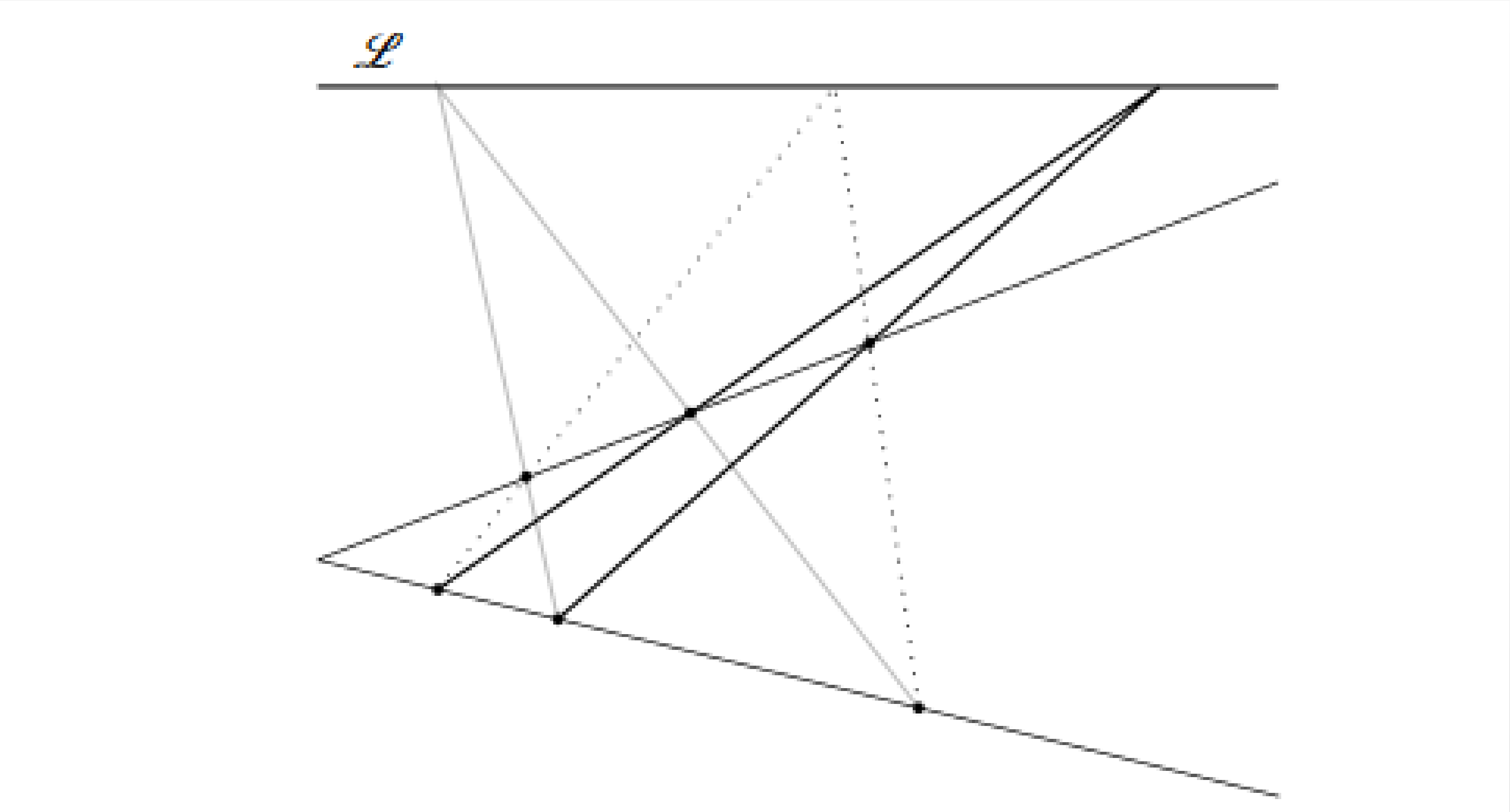
# 4. Projektive Ebenen - Motivation

- Koordinaten können mit rein geometrischen Mitteln definiert werden
- Außerdem: die zur Definition von Koordinaten & ihrer Arithmetik erforderliche Geometrie ist einfacher als die Geometrie von Euklid

  →Projektive Geometrie
- 3 Axiome reichen nicht aus →Hauptproblem: Beweis, dass die Additions- und Multiplikationsoperationen die Körperaxiome erfüllen
- Satz von Pappus →Beweis der multiplikativen Kommutativität
- Satz von Desargues →Beweis für die multiplikative Assoziativität

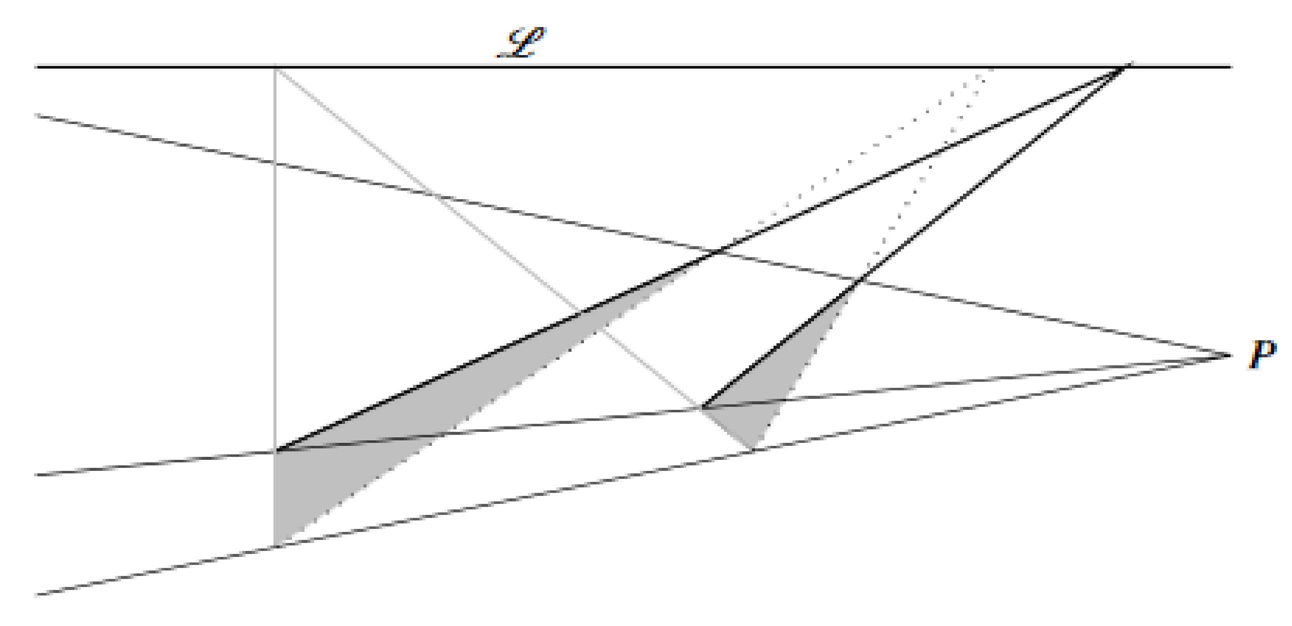
# 4.1. Satz von Pappus

Sechs Punkte, die abwechselnd auf zwei Geraden liegen, bilden ein Sechseck, dessen drei Paare gegenüberliegender Seiten sich auf einer Geraden treffen.



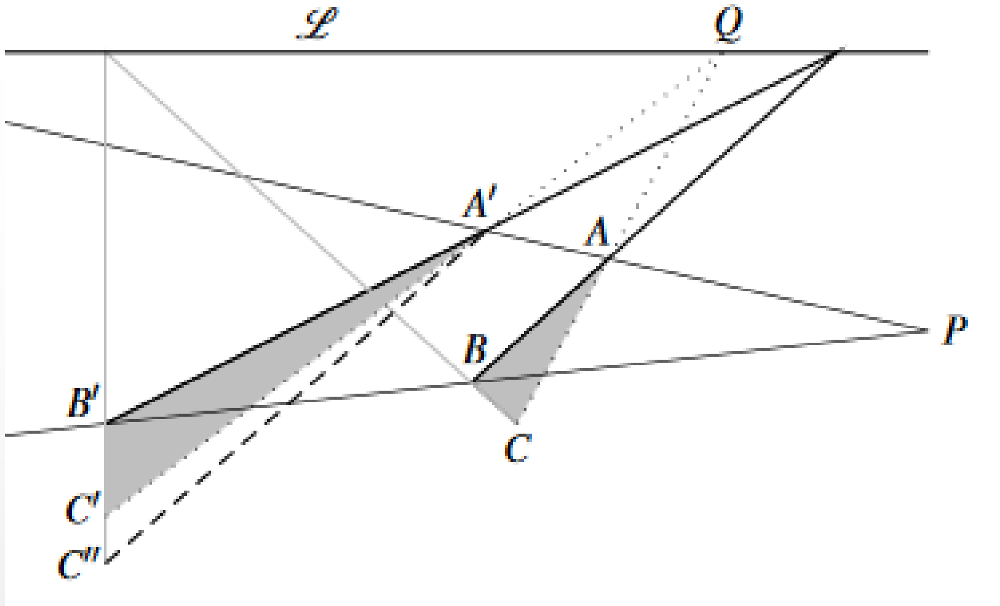
# 4.2. Satz von Desargues

Wenn zwei Dreiecke von einem Punkt P perspektivisch sind, dann treffen sich ihre Paare der entsprechenden Seiten auf einer Geraden L.




<u>Umkehrung:</u>

Wenn sich die entsprechenden Seiten zweier Dreiecke auf einer Geraden L treffen, dann sind die beiden Dreiecke von einem Punkt P aus perspektivisch.



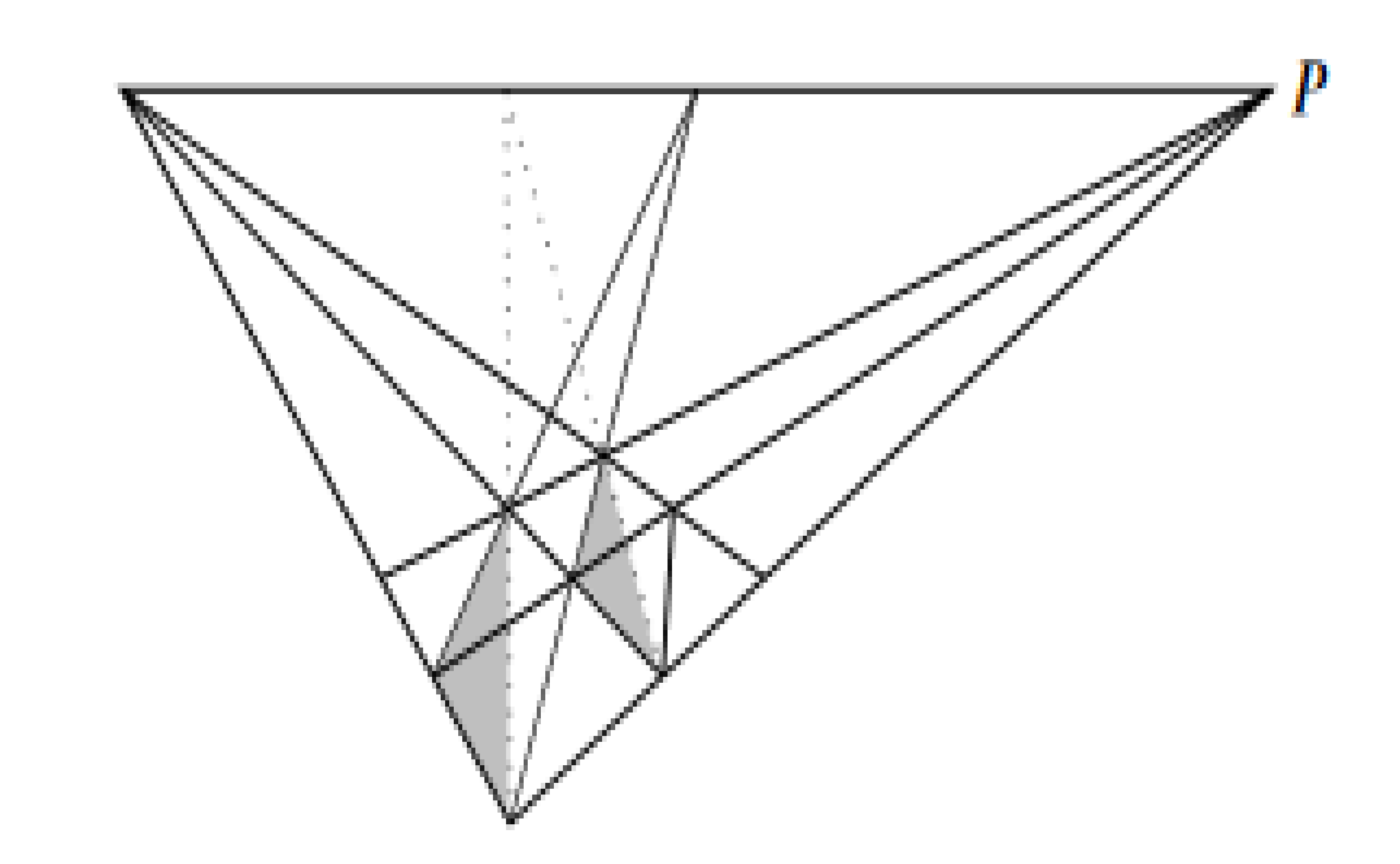

## Beweis:

Seien ABC und A‘B‘C‘ zwei Dreiecke, deren entsprechende Seiten sich auf der Geraden L treffen.
P sei der Schnittpunkt von AA‘ & BB‘.
**Zz: P liegt auf auf CC‘**

Angenommen, PC trifft bei C‘‘ (≠ C‘) auf die Linie B‘C‘
⇒ ABC & A‘B‘C‘‘ sind von P aus perspektivisch
⇒ AB & A‘B‘, AC & A‘C‘‘, BC & B‘C‘‘ treffen sich in L (Desargues)

AB & A‘B‘ bzw. BC & B‘C‘ treffen sich in L (nach Voraussetzung)
Sei Q der Schnittpunkt von AC & A‘C‘‘
⇒ QA‘ geht durch C‘‘
⇒ QA‘ trifft bei C‘ aber auch auf B‘C‘
⇒ C‘‘ = C‘

# Erinnerung: Fliesenboden



# 4.3. Projektive Arithmetik

## Erinnerung Körperaxiome:

| | |
|---|---|
| $a + b = b + a$, $ab = ba$ | (kommutative Gesetze) |
| $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a (bc) = (ab) c$ | (assoziative Gesetze) |
| $a + 0 = a$, $a1 = a$ | (Existenz der neutralen Elemente) |
| $a + (- a) = 0$, $aa^{-1} = 1$ | (Existenz von Inversen) |
| $a (b + c) = ab + ac$ | (Distributivgesetz) |

➡ Axiome gelten für die projektive Summe & für das Produkt von Punkten offensichtlich nicht

➡ Konstruktion von $a+b$ ≠ Konstruktion von $b+a$

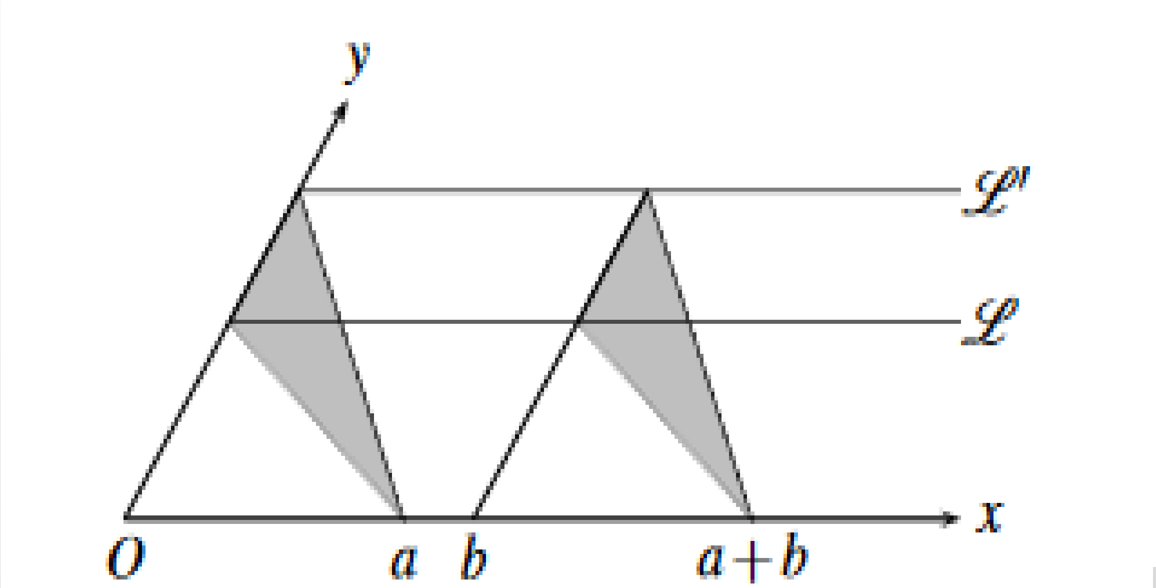
**ZIEL:** Herleitung der 9 Körperaxiome mittels der Sätze von Pappus & Desargues

## Addition

Wie konstruiert man die Summe a+b zweier Punkte a und b?

<u>Ausgangspunkt:</u>
Zwei beliebige Geraden als x- und y-Achse + Gerade L||x-Achse

1. Gerade von a zum Punkt, an dem L auf y-Achse trifft
2. Gerade von b parallel zur y-Achse
3. Parallele zur ersten Gerade durch den Schnittpunkt der zweiten Gerade & L



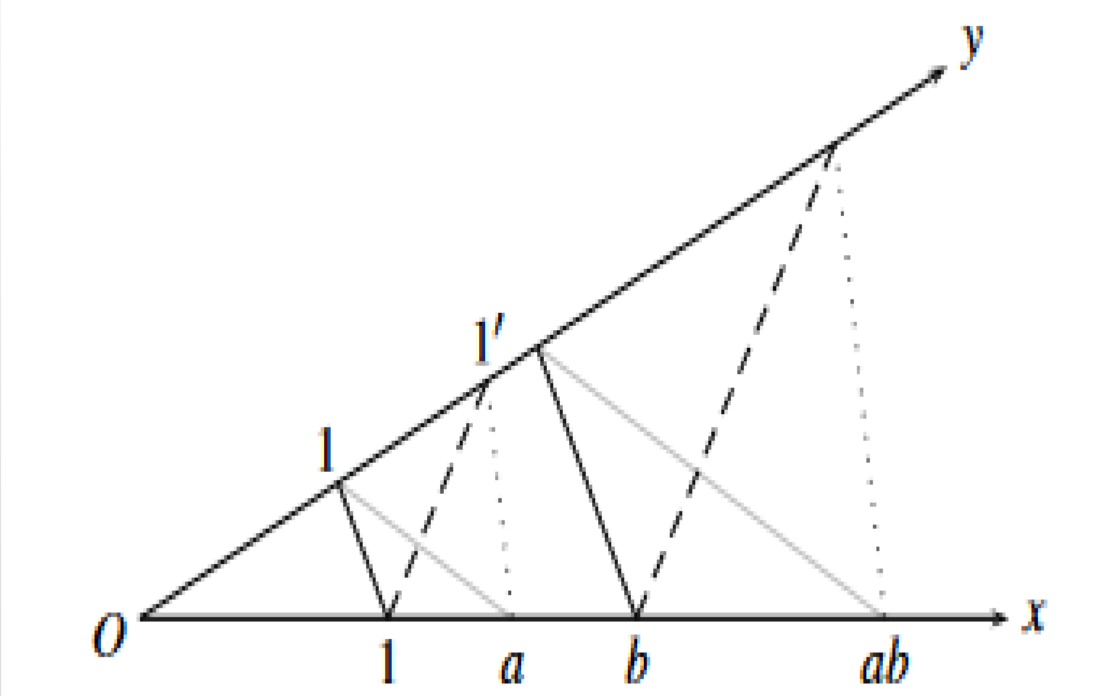
## Multiplikation

Wie konstruiert man das Produkt ab zweier Punkte a und b?

<u>Ausgangspunkt:</u>
Wähle einen Punkt 1≠O auf der x-Achse & y-Achse

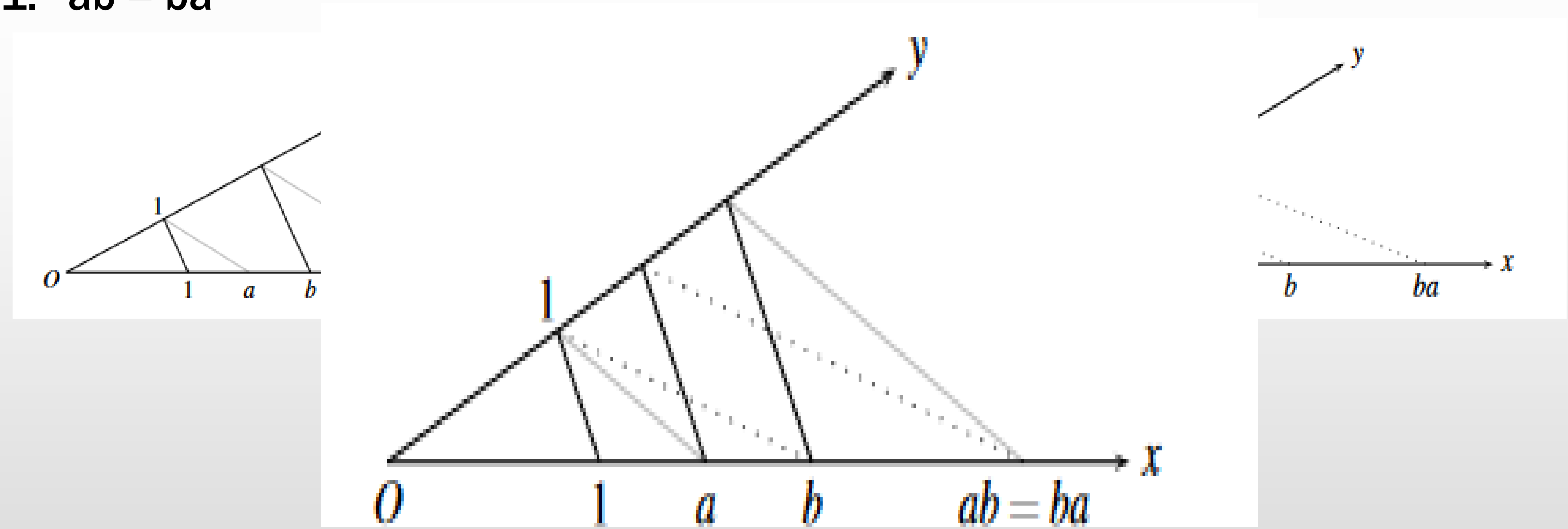
1. Gerade von 1 bis 1
2. Gerade von a zu 1
3. Parallele zur ersten und zweiten Gerade von b bzw. von Schnittpunkt b und y-Achse

→Position von ab hängt von der Wahl von 1 auf der x-Achse ab
→Position von ab hängt nicht von der Wahl von 1 auf der y-Achse ab (Scherensatz)



# Beweis multiplikatives Kommutativgesetz

1. ab = ba

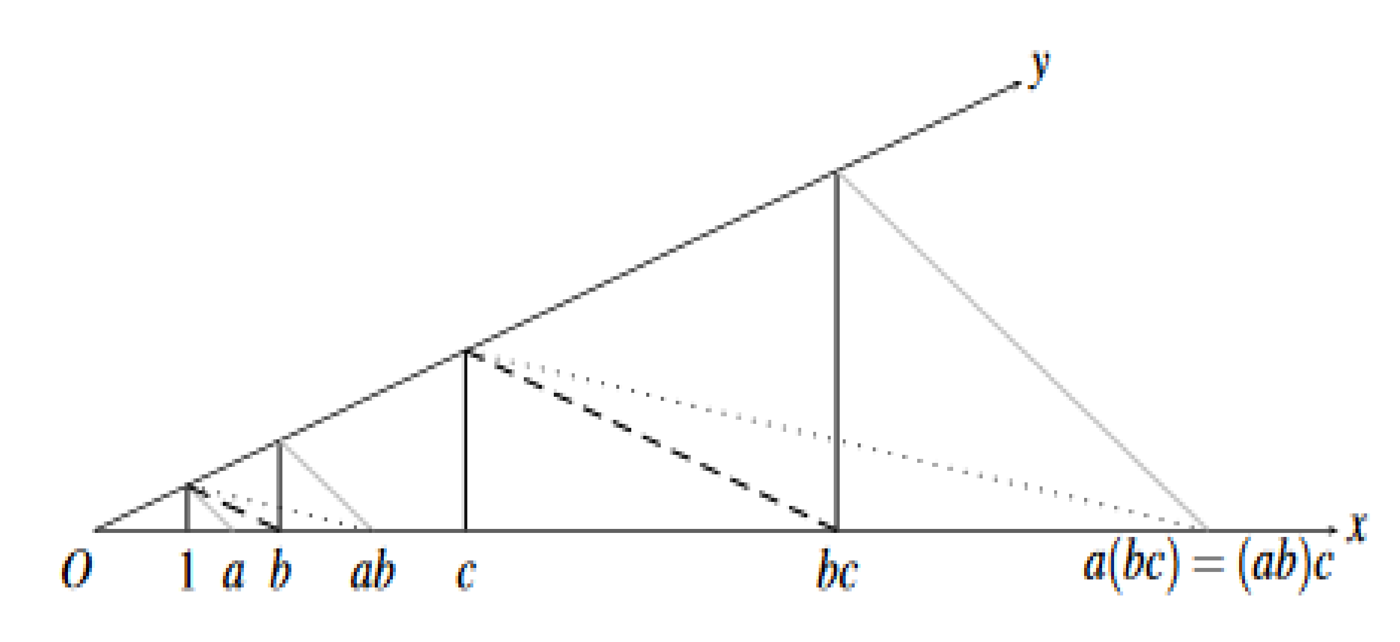



➡ ab=ba

(Pappus)

# Beweis multiplikatives Assoziativgesetz

2. $a(bc) = (ab)c$




➡ $a(bc)=(ab)c$ (Desargues)

# 4.4. Rückblick

| | Geometrie | | |
|---|---|---|---|
| | Euklidische | Vektor- | Projektive |
| Grundkonzept | Länge | Vektorsummen<br>Skalarmultiplikation | „Geradheit“ |
| Folgerungen | Winkel<br>„Geradheit“ | Mittelpunkten von<br>Liniensegmenten | Kreuzverhältnis |

# 5. Transformationen - Begriff

## Definition Transformation:

Eine Transformation ist eine Funktion f, die eine Menge S auf sich selbst abbildet, d. h.

$$f: S \rightarrow S.$$

- **Transformationsgruppe**
- **Geometrische Transformationen:** Bewegung von Punktmengen (Objekten) im Raum
  → Verschiebung, Drehung, Spiegelung, Isometrie, Streckung
- **Koordinatentransformationen:**
  → Verschiebung, Drehung, Spiegelung, Scherung, Skalierung

# 5. Transformationen - Motivation

Was ist eine Geometrie?

➡ Deutsche Mathematiker Felix Klein: Erlangener Programm

- Klein‘s Idee: Geometrien mithilfe von Transformationsgruppen zu unterscheiden
- verschiedene Arten von Geometrien gehören zu verschiedenen Gruppen von Transformationen

**Beispiel:** euklidische Geometrie von $\mathbb{R}^2$ zur Gruppe der Isometrien von $\mathbb{R}^2$

# 5.1. Erlangener Programm (1872)

**ZIEL: verschiedene Geometrien mithilfe von Transformationsgruppen unterscheiden**

Jede Geometrie besitzt …

- … eine Hauptgruppe:
  → Lehrsätze bleiben richtig

- … eine Untergruppe:
  → Begriffe bleiben unverändert

Grundkonzepte einer Geometrie entsprechen Eigenschaften, die durch Transformationen in der Gruppe unverändert bleiben
→ Invarianten

# Exkurs Invariantentheorie

➡ **Zweig der Algebra, der nach Invarianten fragt und diese untersucht**

Wann sind zwei Objekte „gleich“ (mathematisch gesprochen: isomorph)?
→z. B. anhand der Symmetrie
→Objekt wird einer Gruppe zugewiesen

Falls diese Gruppe unter all den erlaubten Transformationen unverändert bleibt, nennt man sie eine Invariante.
→haben zwei Objekte verschiedene Invarianten, so sind sie nicht isomorph

„Die Kunst besteht nun darin, Invarianten zu entdecken, die einfach zu berechnen sind, aber dennoch genug Information über das betrachtete Problem enthalten“ (Löh, 2008).

# 5.2. Beispiele

1. **Euklidische Geometrie**

- Sätze von Euklid bleiben bei Transformationen (Spiegelung, Drehung, Dilatation, …) gültig

  ➡ **Hauptgruppe:** Gruppe der Ähnlichkeiten (durch Spiegelungen, Dilatationen, …erzeugt)

  ➡ **Untergruppe:** Gruppe der Isometrien (durch Spiegelungen erzeugt)

- Erinnerung: eukl. Geometrie von $\mathbb{R}^2$ passt zur Gruppe der Isometrien von $\mathbb{R}^2$

## Gruppe der Isometrien der Ebene:

Eine Isometrie ist eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die den Abstand bewahrt, d. h. für alle Punkte $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ mit $P_1 = (a, b)$ & $P_2 = (x, y)$ gilt

$$|f(P_1)f(P_2)| = |P_1P_2|,$$

wobei

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

den Abstand zwischen den Punkten $P_1$ & $P_2$ definiert.

→Abstand ist Invariante der Isometriegruppe von $\mathbb{R}^2$

Man zeigt leicht:

- f, g Isometrien ➡ Komposition f & g ist Isometrie
- jede Isometrie f besitzt eine Inverse $f^{-1}$, die auch eine Isometrie ist

→diese Eigenschaften von Isometrien sind charakteristisch für eine Gruppe von Transformationen

# 5.2. Beispiele

## 2. Vektortransformationen

- Ebene $\mathbb{R}^2$ als realer VR → Punkte als Vektoren

  ➡ **Vektoraddition:**

  $u=(u_1,u_2)$ & $v=(v_1,v_2)$ mit $u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2)$

  ➡ **Skalarmultiplikation:**

  $a\in\mathbb{R}$, $u=(u_1,u_2)$ mit $au = (au_1, au_2)$

Eine Transformation f von $\mathbb{R}^2$ bewahrt diese Operationen, wenn gilt:

$f(u+v) = f(u) + f(v)$ und $f(au) = af(u)$

➡ lineare Transformation

# 5.2. Beispiele

3. **<u>Projektive Geometrie</u>:** $\mathbb{R}P^1$

➡ analoge Herangehensweise zu Klein's Idee

1) Transformationen von $\mathbb{R}P^1$

   → linear gebrochenrationalen Funktionen $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ mit $ad - bc \neq 0$

2) Kreuzverhältnis als Invariante

3) Projektive Transformationen sind lineare Transformationen

# 6. Symmetrie - Spiegelung

## Kugelgeometrie (Sphärische Geometrie)

Einheitssphäre $S^2$:

- Kugeloberfläche der Einheitskugel im dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$
- Nullpunkt = Mittelpunkt der Einheitskugel

$$\Rightarrow \quad S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

Wir zeigen: Isometrien von $S^2$ = Isometrien von $\mathbb{R}^3$ (wenn O fixiert)

# Isometrien von $S^2$:

Wir wissen: Isometrie f von $\mathbb{R}^3$ bewahrt den Abstand

→O fixiert, dann sendet f jeden Punkt im Abstand 1 von O zu einem anderen Punkt im Abstand 1 von O
→Isometrie f von $\mathbb{R}^3$, die O fixiert, bildet auch $S^2$ in sich ab
→Beschränkung von f auf $S^2$ ist eine Isometrie von $S^2$
(f bewahrt alle Abstände auf $S^2$)

Einfachsten Isometrien von $S^2$: Spiegelungen
→Zwei Ebenen $E_1$ und $E_2$ bilden Schnittgerade L durch O
→Produkt der Spiegelungen in $E_1$ und $E_2$ = Drehung um L (analog in $\mathbb{R}^2$)

Spiegelungsprodukte in 3 Ebenen:

- antipodale Abbildung, die jeden Punkt (x,y,z) an (-x,-y,-z) sendet

→Produkt der folgenden Spiegelungen

1. Spiegelung in der (x,y)-Ebene, die (x,y,z) an (x,y,-z) sendet
2. Spiegelung in der (x,z)-Ebene, die (x,y,z) an (x,-y,z) sendet
3. Spiegelung in der (y,z)-Ebene, die (x,y,z) an (-x,y,z) sendet

„Three reflections theorem":
Jede Isometrie von $S^2$ ist das Produkt einer, zwei oder drei Spiegelungen.

➡ Isometrien von $S^2$ = Einschränkungen der Isometrien von $\mathbb{R}^3$

# Literaturverzeichnis


Stillwell, J. (2005). *The Four Pillars of Geometry.* Springer.

http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/seminars/invarianten.pdf

https://www.mathematik.de/leseecke-article/1459-the-four-pillars-of-geometry-2

https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/das-erlanger-programm-von-felix-klein/2513

# Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!