Einführung in die Gruppentheorie

NAME: MAURICE STRAUB

STUDIENGANG: LEHRAMT SEKUNDARSTUFE I UND II

DOZENT: PROF. DR. MORITZ WEBER

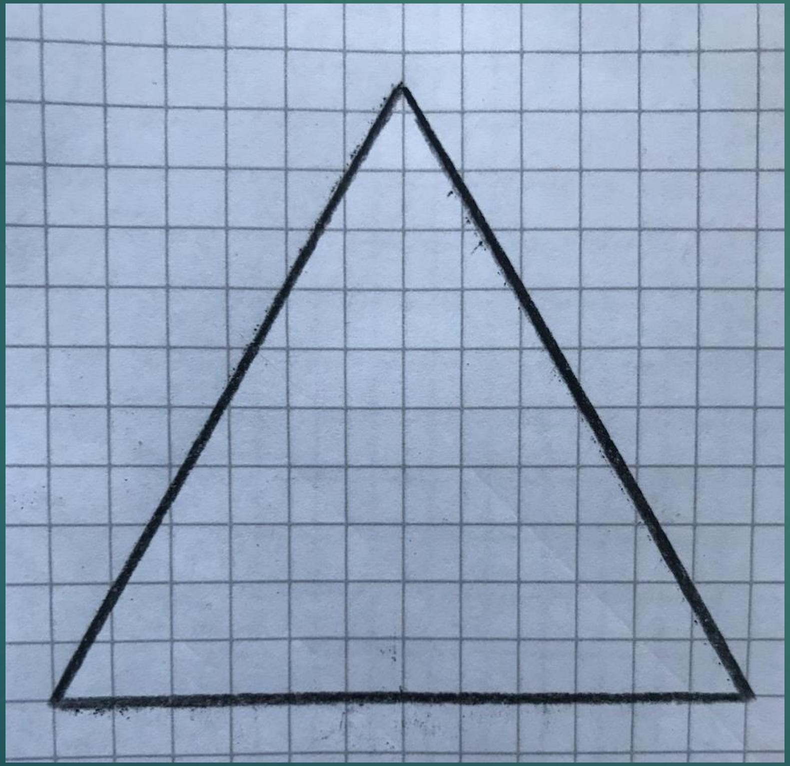
VERANSTALTUNG: PROSEMINAR - BEISPIELE GEOMETRISCHER STRUKTUREN

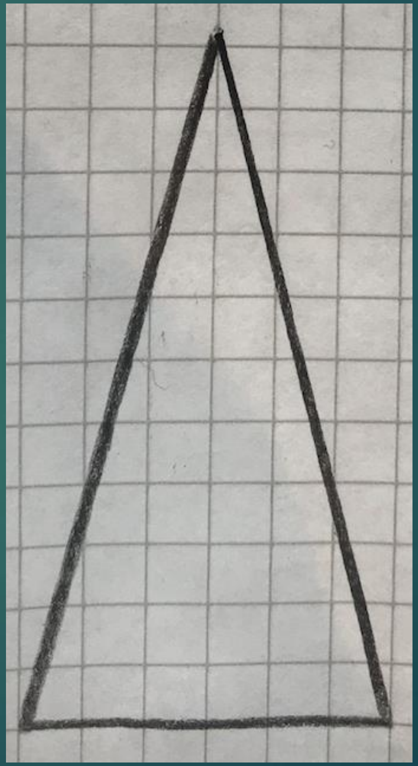
DATUM: 19. JANUAR 2021 (WS 2020/21)

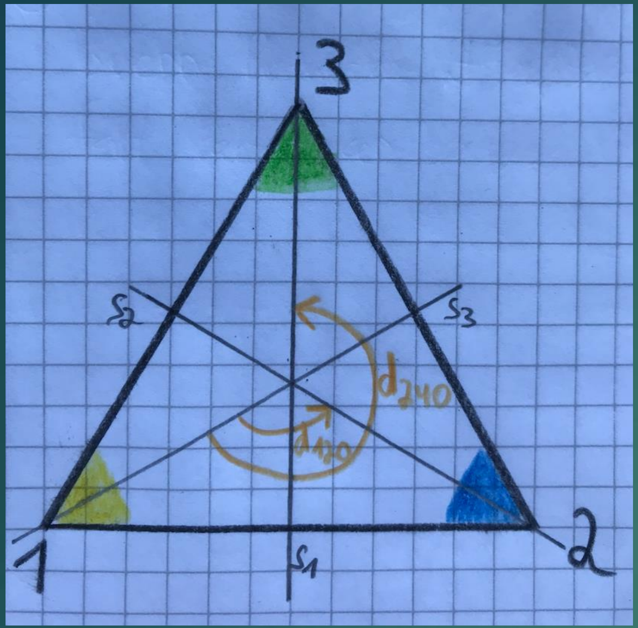
Gliederung

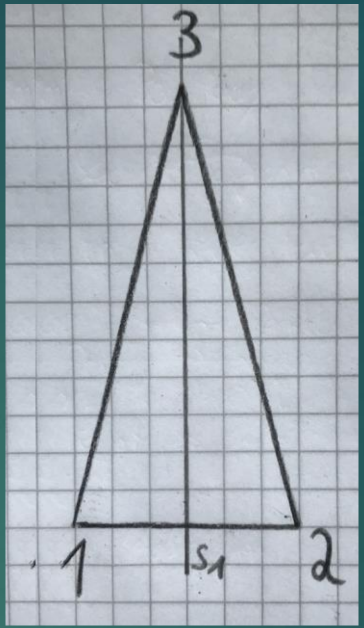
(1) Einstiegsbeispiel
(2) Einführung in die euklidische Geometrie
   i. Isometrien
   ii. Figuren, Deckabbildungen und Permutationen
   iii. Hintereinanderausführung zweier Isometrien
(3) Gruppentheorie
   i. Definition einer Gruppe
   ii. Abelsche Gruppen und Beispiele
   iii. Erzeugendensystem und zyklische Gruppen
   iv. Gruppenordnung und die Ordnung eines Elements
   v. Eigenschaften von Gruppen (inklusive Beweis)

Einstiegsbeispiel:
Wie können wir ein gleichseitiges bzw. gleichschenkliges Dreieck auf sich selbst abbilden?









gleichseitiges Dreieck

- id
- d_{120}
- d_{240}
- s_1
- s_2
- s_3

$D_3 = \{id, d_{120}, d_{240}, s_1, s_2, s_3\}$

gleichschenkliges Dreieck

- id
- s_1

Isometrien

- Die Abbildungen aus D_3 bilden nicht nur das Dreieck auf sich ab, sondern sogar die ganze Ebene auf sich, wenn wir uns das Dreieck in der Ebene gegeben denken.

- Definition Isometrie: Eine (ebene) Isometrie (oder auch eine Bewegung) ist eine längenerhaltende bijektive Abbildung der Ebene auf sich.

Ebene: euklidische Ebene, also die Menge aller Punkte $\mathbb{R} x \mathbb{R} = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}\}$

- Beispiele einer Isometrie:
  (1) Spiegelung an einer festen Geraden
  (2) Drehung um einen bestimmten Punkt mit einem bestimmten Winkel gegen den Uhrzeigersinn
  (3) Translation (Verschiebung der Ebene um einen festen Betrag in eine feste Richtung)

Figuren und Permutationen

Definitionen:

(1) Eine **Figur** ist eine Teilmenge der Ebene.

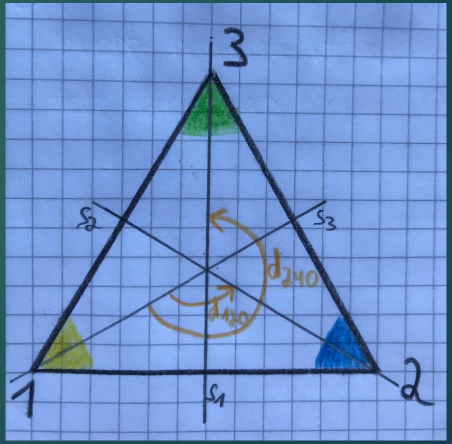
(2) Eine **Deckabbildung** einer Figur ist eine Isometrie der Ebene, die die Figur auf sich abbildet.

(3) Eine **Permutation** ist eine bijektive Abbildung einer Menge auf sich.

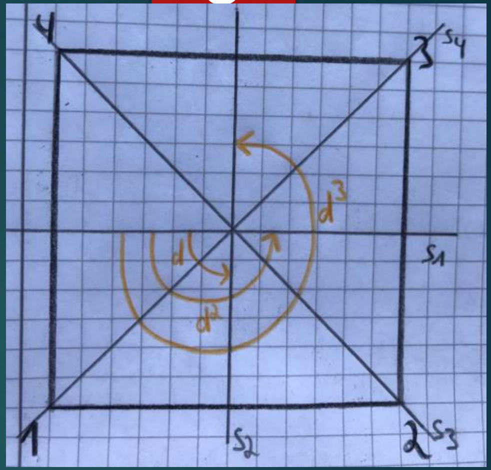
$D_3 = \{id, d_{120}, d_{240}, s_1, s_2, s_3\}$

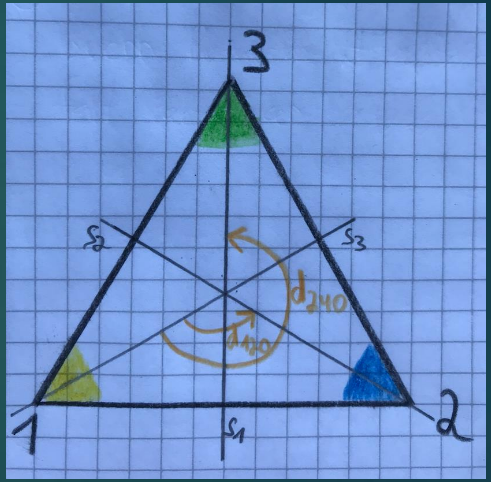
Notation

- Bei jeder Isometrie eines regulären n-Ecks (ein n-Eck mit gleich großen Innenwinkeln und gleich langen Kanten) ist allein durch die Angabe der Bilder der Eckpunkte bereits die gesamte Abbildung bestimmt → welcher Eckpunkt wird wohin abgebildet?
- Hier nutzen wir die **Permutationsschreibweise**: $s_1 \simeq (1,2)(3)$
- Jeder Punkt in einem Klammerpaar wird auf den ihm nachfolgenden Punkt abgebildet (Klammern werden zyklisch gelesen, die letzte Zahl wird auf die erste abgebildet).
  - id: 1 auf 1, 2 auf 2, 3 auf 3 → id $\simeq$ (1)(2)(3), also ()
  - d_{120}: 1 auf 2, 2 auf 3, 3 auf 1 → $d_{120} \simeq (1,2,3)$
  - s_2: 1 auf 3, 2 auf 2, 3 auf 1 → $s_2 \simeq (1,3)(2)$, also (1,3)



Ein reguläres n-Eck



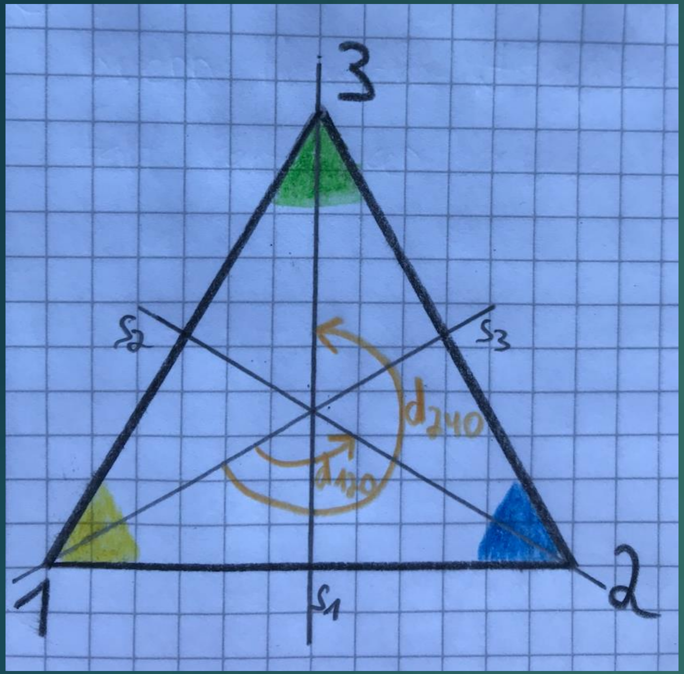


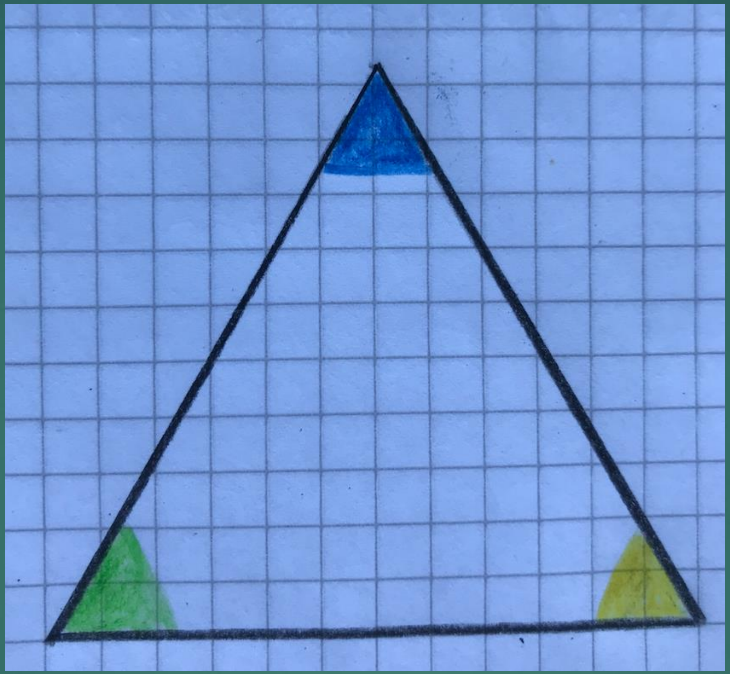
- Welche Deckabbildungen hat ein reguläres n-Eck?
- Jede Figur hat die Identität als Deckabbildung.
- <u>Drehungen</u>: das n-Eck lässt Drehungen um $\frac{k \cdot 360°}{n}$ mit k ∊ {1, 2, ..., n - 1} zu
- <u>Spiegelungen</u>: das n-Eck lässt n Spiegelungen zu:
  (1) n ungerade: n Spiegelachsen verlaufen jeweils durch eine Ecke und die gegenüberliegende Kantenmitte.
  (2) n gerade: $\frac{n}{2}$ Spiegelachsen verlaufen durch gegenüberliegende Eckpunkte und $\frac{n}{2}$ Spiegelachsen verlaufen durch gegenüberliegende Kantenmitten.
- Insgesamt besteht die Menge der Deckabbildungen des regulären n-Ecks aus 2n Elementen:

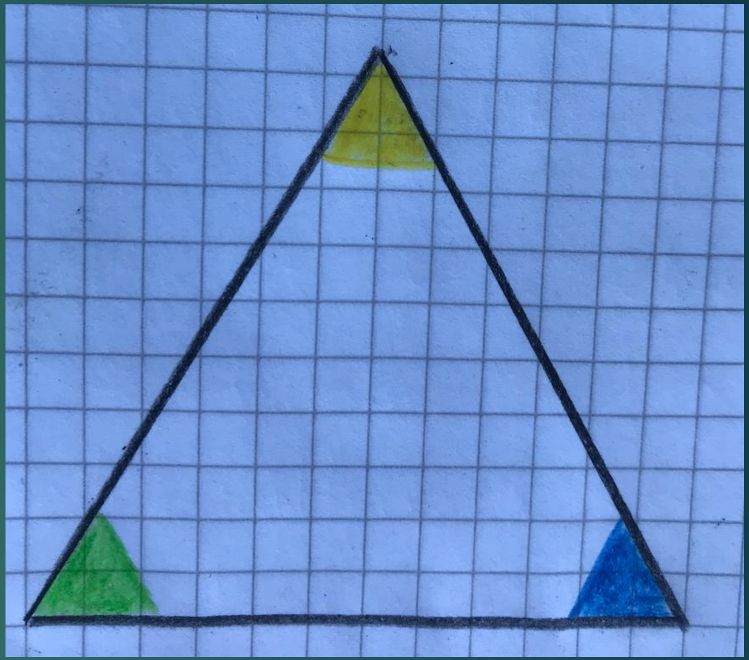
  $D_n = \{id, \frac{1 \cdot 360°}{n}, \frac{2 \cdot 360°}{n}, ..., \frac{(n-1) \cdot 360°}{n}, s_1, s_2, ..., s_n\}$

Und wie sieht es aus, wenn wir zwei Isometrien miteinander verknüpfen???

$s_3 \circ d_{120} = ?$







→ Es ergibt sich: $s_3 \circ d_{120} \simeq (2,3) \circ (1,2,3) = (1,3) \simeq s_2$

Ergebnis

- Die Verknüpfung (Hintereinanderausführung) zweier längenerhaltender Bijektionen ist wieder eine längenerhaltende Bijektion.
- Verknüpft man zwei Elemente aus D_3 miteinander, so erhält man wieder ein Element aus D_3 → D_3 ist bezüglich der Hintereinanderausführung abgeschlossen.
- Die Menge der Deckabbildungen einer beliebigen Figur ist stets abgeschlossen bezüglich ihrer Hintereinanderausführung.

Ergebnis

- Aber Achtung:
  - $s_3 \circ d_{120}$ bedeutet, dass wir das Dreieck zuerst um 120 Grad drehen und dann erst an der Achse s_3 spiegeln!!!
  - Die Spiegelachsen bleiben an ihren ursprünglichen Plätzen und drehen sich bei den Drehungen nicht mit bzw. werden bei Spiegelungen nicht mitgespiegelt!!!

Definition Gruppe

Sei G eine Menge und $\circ$ eine Verknüpfung, bezüglich der G abgeschlossen ist. Das Paar $(G,\circ)$ heißt Gruppe, wenn es folgende Eigenschaften erfüllt:

(a) **(Assoziativität):**
Für alle $u, v, w \in G$ gilt:
$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$

(b) **(Existenz eines neutralen Elements):**
Es gibt ein $e \in G$, so dass
$e \circ g = g \circ e = g$, für alle $g \in G$
e heißt *neutrales Element* der Gruppe G.

(c) **(Existenz inverser Elemente):**
Zu jedem $g \in G$ gibt es ein $g^{-1} \in G$, so dass
$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$
wobei e ein neutrales Element ist. g^{-1} heißt das *Inverse* zu g.

Kleine Beweise

- Behauptung: Jedes linksinverse Element ist auch rechtsinvers.
- Beweis: (es gilt $g^{-1} \circ g = e$, also auch $(g^{-1})^{-1} \circ g^{-1} = e$) $g \circ g^{-1} = e \circ (g \circ g^{-1}) = ((g^{-1})^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} \circ (e \circ g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} \circ g^{-1} = e$

- Behauptung: Jedes linksneutrale Element ist auch rechtsneutral.
- Beweis: (es gilt $e \circ g = g$ und $g^{-1} \circ g = e = g \circ g^{-1}$) $g \circ e = g \circ (g^{-1} \circ g) = (g \circ g^{-1}) \circ g = e \circ g = g$

Ist die Hintereinanderausführung zweier Isometrien am gleichseitigen Dreieck eine Gruppe?

Beweis, dass $(D_3,\circ)$ bzw. $(D_3´,\circ)$ eine Gruppe ist

- $D_3 = \{id, d_{120}, d_{240}, s_1, s_2, s_3\}$ und $D_3´ = \{(), (1,2,3), (1,3,2), (1,2), (1,3), (2,3)\}$
- **Assoziativität:**

ohne Permutationsschreibweise	mit Permutationsschreibweise
$(s_1\circ d_{120})\circ s_2 = s_1\circ(d_{120}\circ s_2)$ $\Leftrightarrow s_3\circ s_2 = s_1\circ s_3$ $\Leftrightarrow d_{120} = d_{120}$	$[(1,2)\circ(1,2,3)]\circ(1,3) = (1,2)\circ[(1,2,3)\circ(1,3)]$ $\Leftrightarrow (2,3)\circ(1,3) = (1,2)\circ(2,3)$ $\Leftrightarrow (1,2,3) = (1,2,3)$

- Existenz eines **neutralen Elements**: die Identität ist das neutrale Element! Für alle $g \in D_3$ und für alle $h \in D_3´$ gilt:

ohne Permutationsschreibweise	mit Permutationsschreibweise
$id\circ g = g\circ id = g$	$()\circ h = h\circ() = h$

Beweis, dass $(D_3,\circ)$ bzw. $(D_3{}',\circ)$ eine Gruppe ist

- Existenz **inverser Elemente**:

ohne Permutationsschreibweise		mit Permutationsschreibweise
- $id \circ id = id$	$(id^{-1} = id)$	- $() \circ () = ()$
- $d_{120} \circ d_{240} = id = d_{240} \circ d_{120}$	$(d_{120}{}^{-1} = d_{240}$ und $d_{240}{}^{-1} = d_{120})$	- $(1,2,3) \circ (1,3,2) = () = (1,3,2) \circ (1,2,3)$
- $s_1 \circ s_1 = id = s_1{}^2$	$(s_1{}^{-1} = s_1)$	- $(1,2) \circ (1,2) = ()$
- $s_2 \circ s_2 = id = s_2{}^2$	$(s_2{}^{-1} = s_2)$	- $(1,3) \circ (1,3) = ()$
- $s_3 \circ s_3 = id = s_3{}^2$	$(s_3{}^{-1} = s_3)$	- $(2,3) \circ (2,3) = ()$

Ein Element einer Gruppe, das nicht die Identität ist, aber dessen Quadrat die Identität ist, heißt *Involution.*

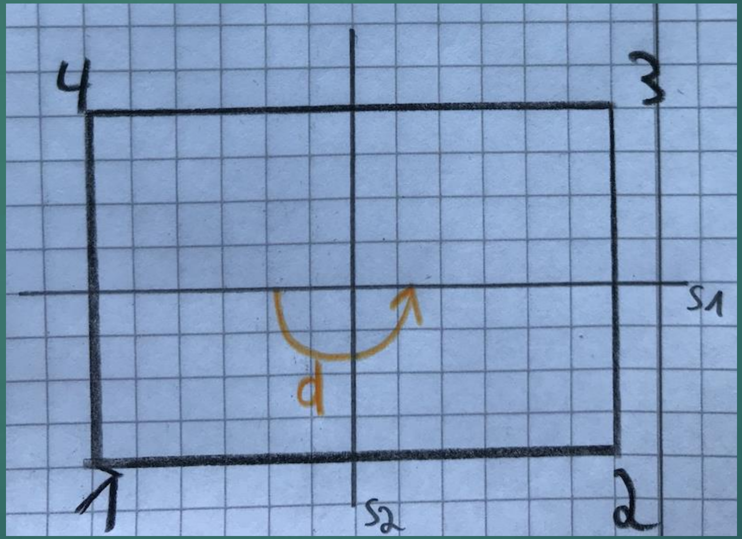
Gruppentabelle D_3

$\circ$	id	d_{120}	d_{240}	s_1	s_2	s_3
id	id	d_{120}	d_{240}	s_1	s_2	s_3
d_{120}	d_{120}	d_{240}	id	s_3	s_1	s_2
d_{240}	d_{240}	id	d_{120}	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	id	d_{120}	d_{240}
s_2	s_2	s_3	s_1	d_{240}	id	d_{120}
s_3	s_3	s_1	s_2	d_{120}	d_{240}	id

Ist die Hintereinanderausführung von Isometrien am Rechteck eine Gruppe?

- $D_{Rechteck} = \{id, d, s_1, s_2\}$ mit $d = d_{180}$

∘	**id**	**d**	$\mathbf{s_1}$	$\mathbf{s_2}$
id	id	d	s_1	s_2
d	d	id	s_2	s_1
$\mathbf{s_1}$	s_1	s_2	id	d
$\mathbf{s_2}$	s_2	s_1	d	id



Abgeschlossenheit:
Ja, siehe Tabelle

Neutrales Element:
Für alle $g \in D_{Rechteck}$ gilt:
$id \circ g = g \circ id = g$

Inverse Elemente:
(1) $id \circ id = id$
(2) $d \circ d = id$
(3) $s_1 \circ s_1 = id$
(4) $s_2 \circ s_2 = id$

Zudem gilt:
(1) $d \circ s_1 = s_2 = s_1 \circ d$
(2) $d \circ s_2 = s_1 = s_2 \circ d$
(3) $s_1 \circ s_2 = d = s_2 \circ s_1$
→ kommutativ

Definition abelsche Gruppe

- Eine Gruppe $(G,\circ)$ heißt **abelsch** oder **kommutativ**, wenn für je zwei $g, h \in G$ gilt: $g \circ h = h \circ g$.

- Die Verknüpfung $(G,\circ)$ ist eine abelsche Gruppe, wenn
  (1) $(G,\circ)$ eine Gruppe ist und wenn
  (2) für alle $g, h \in G$ gilt: $g \circ h = h \circ g$.

Beispiele

- (□,+) ist keine Gruppe, da es keine Inversen gibt
- (□*,+) ist keine Gruppe, da es kein neutrales Element gibt
- (□,+) ist eine abelsche Gruppe
- (□*,·) ist keine Gruppe, da es zu 2 kein Inverses gibt
- (□,+), (□*,·), (□,+) und (□*,·) sind jeweils abelsche Gruppen
- (D_3,∘) und (D_4,∘) sind jeweils Gruppen, ($D_{Rechteck}$,∘) ist eine abelsche Gruppe
- Die symmetrische Gruppe S_n ist für $n \geq 3$ nicht abelsch
- Die Deckabbildungen einer Figur in der Ebene bilden bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die Symmetriegruppe der Figur

(D_n, ∘) mit $n \geq 2$ ist die sogenannte Diedergruppe. Diedergruppen sind für $n \geq 3$ nicht abelsch

Begründung, dass (□,+) eine abelsche Gruppe ist

(1) **Abgeschlossenheit**: Seien m, n ∊ □ → m + n = a mit a ∊ □

(2) **Assoziativität**: Seien k, m, n ∊ □ , dann gilt: (n + m) + k = n + (m + k), denn:
Fügt man Strecken mit den Längen n, m und k in der Reihenfolge aneinander, so erhält man die Länge n + m + k.

(3) **Neutrales Element**: Für alle k ∊ □ gilt: k + 0 = 0 + k = k
→ 0 ist neutrales Element

(4) **Inverse Elemente**: Für alle k ∊ □ gilt: -k ∊ □. Dann ist k + (-k) = k - k = 0 = -k + k = (-k) + k → jedes Element k hat ein inverses Element -k

(5) **Kommutativität**: Seien m, n ∊ □, dann gilt: m + n = n + m

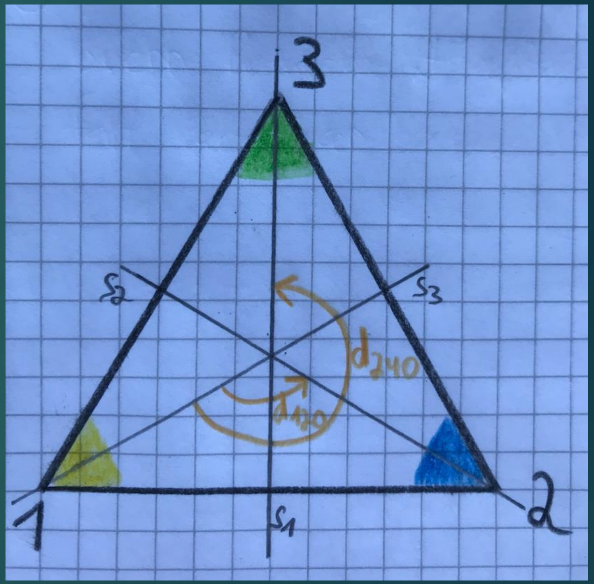
Definition Erzeugendensystem

- Eine Gruppe G wird erzeugt von den Elementen $E = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$, wenn jedes Element von G durch Verknüpfung der Elemente aus E und deren Inversen dargestellt werden kann. Dabei heißt die Menge E **Erzeugendensystem** der Gruppe G. Man schreibt: $G = < g_1, g_2, ..., g_n >$.

Beispiele eines Erzeugendensystems

- Die Symmetriegruppe $D_3 = \{id, d_{120}, d_{240}, s_1, s_2, s_3\}$ des gleichseitigen Dreiecks wird von den Elementen d_{120} und s_1 erzeugt.
  - Inverse zu $d_{120} = d_{240}$ und Inverse zu $s_1 = s_1$
  - $id = d_{120} \circ d_{240}$
  - $s_2 = s_1 \circ d_{240}$ $\qquad$ $s_3 = s_1 \circ d_{120}$

  → $D_3 = < d_{120}, s_1 >$



- Die Gruppe D_n wird von einer Drehung d um $\frac{360}{n}$ Grad und einer Spiegelung s_i erzeugt
  - alle Drehungen erhält man durch $d, d^2, d^3, \ldots, d^n = id$
  - alle Spiegelungen erhält man durch $s_i \circ d, s_i \circ d^2, s_i \circ d^3, \ldots, s_i \circ d^n = s_i$

Zyklische Gruppen

- Definition: Eine Gruppe G heißt **zyklisch**, wenn sie von einem Element erzeugt wird.
- In mathematischer Schreibweise:
  Eine Gruppe G heißt **zyklisch**, wenn es ein $g \in G$ gibt, so dass alle $h \in G$ als $h = g^n$ geschrieben werden können mit $n \in$ □. → $G = < g >$
- Beispiel: (□,+) ist zyklisch mit 1 als Erzeugende, denn:
  - jede positive ganze Zahl lässt sich als Summe von Einsen darstellen
  - negative ganze Zahlen: $h = g^{-m} = g^{-1 \cdot m} = (g^{-1})^m$ (mit $m \in$ □ und g^{-1} ist das Inverse von g → $g^{-1} = -1$) → jede negative ganze Zahl h erreicht man durch: $(g^{-1})^m = (-1)^m$
  - $0 = 1^0$

Weiteres Beispiel einer zyklischen Gruppe

- Sei nun $\frac{\square}{n\square}$:= {[0], [1], ..., [n - 1]} mit $n \in \square$ und

  $+_n: \frac{\square}{n\square} \times \frac{\square}{n\square} \rightarrow \frac{\square}{n\square}$, [a] + [b] := [a + b] mit a, b ∈ {0, 1, ..., n - 1}

- $(\frac{\square}{4\square}, +_4)$ ist zyklisch mit [1] als Erzeugende, denn:

  - $(\frac{\square}{4\square}, +_4)$ besteht aus den Elementen [0], [1], [2] und [3]
  - $[0] = [1]^4 = [1] + [1] + [1] + [1]$
  - $[2] = [1]^2 = [1] + [1]$
  - $[3] = [1]^3 = [1] + [1] + [1]$

Zyklische Gruppen sind immer kommutativ und damit abelsch

Die Ordnung einer Gruppe

- Definition: Die **Ordnung** einer Gruppe ist die Anzahl ihrer Elemente.

- Beispiele:
  - $D_3 = \{id, d_{120}, d_{240}, s_1, s_2, s_3\}$ → Ordnung 6 → $|D_3| = 6$
  - $D_n = \{id, \frac{1 \cdot 360°}{n}, \frac{2 \cdot 360°}{n}, ..., \frac{(n-1) \cdot 360°}{n}, s_1, s_2, ..., s_n\}$ → Ordnung 2n → $|D_n| = 2n$
  - $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ → Ordnung ∞ → $|\mathbb{Z}| = \infty$
  - $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ besteht aus n Elementen → Ordnung n → $|\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}| = n$

Die Ordnung eines Elements

- Definition: Die **Ordnung** oder **Periode** eines Elements g in einer Gruppe ist die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}^*$, so dass $g^n = e$ gilt. Man schreibt auch $|g| = n$.

- Beispiele:
  - Jede Spiegelung hat die Ordnung 2 (denn $s_i^2 = s_i \circ s_i = id = e$)
  - Die Identität hat die Ordnung 1 (denn $id^1 = id = e$)
  - In $\mathbb{Z}$ haben alle Elemente die Ordnung unendlich (außer die 0)
  - Die Ordnung einer Drehung um $\frac{360}{n}$ Grad ist n mit $n \in \mathbb{N}$, denn $d_{360/n}{}^n = d_{n \cdot (360/n)} = d_{360} = id = e$
  - In $(\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, +_4)$ gilt: $[1]^4 = [2]^2 = [3]^4 = [0]^1 = [0]$

Eigenschaften von Gruppen

- Satz 1: Sei $(G,\circ)$ eine beliebige Gruppe und $v, w, g \in G$. Dann gilt:
  1. $v \circ g \circ g^{-1} \circ w = v \circ w$ (denn: $v \circ g \circ g^{-1} \circ w = v \circ e \circ w = v \circ w$)
  2. $g^0 = e$ (denn: $g^n = g^{n+0} = g^n \circ g^0$ und $g^n = g^n \circ e$ $\rightarrow g^0 = e$)
  3. $(g^{-1})^{-1} = g$ (denn: $g \circ g^{-1} = id$ $\rightarrow$ g Inverses zu g^{-1} $\rightarrow g = (g^{-1})^{-1}$)
  4. $g^{-n} = (g^{-1})^n$

- Satz 2: Sei $(G,\circ)$ eine beliebige Gruppe. Dann gilt:
  1. In G gibt es nur ein neutrales Element.
  2. Zu jedem Gruppenelement gibt es nur genau ein Inverses.
  3. Für $g, v, w \in G$ gilt: aus $g \circ v = g \circ w$ oder $v \circ g = w \circ g$ folgt $v = w$.
  4. Für $g_1, g_2, ..., g_n \in G$ gilt: $(g_1 \circ g_2 \circ ... \circ g_{n-1} \circ g_n)^{-1} = g_n^{-1} \circ g_{n-1}^{-1} \circ ... \circ g_2^{-1} \circ g_1^{-1}$.

Beweis von Satz 2 (Teil (1) und (2))

- zu zeigen: Es existiert genau ein neutrales Element.

  Seien e und e* jeweils neutrale Elemente, dann gilt:

  i. $e \circ e^* = e^* \circ e = e^*$ (weil e neutrales Element ist)
  ii. $e^* \circ e = e \circ e^* = e$ (weil e* neutrales Element ist)

  → dann ist $e = e^* \circ e = e^*$, also $e = e^*$

- zu zeigen: Für alle $g \in G$ gibt es genau ein inverses Element.

  Seien $u, v \in G$ Inverse zu $g \in G$, dann gilt:

  i. $g \circ u = u \circ g = e$ (weil u das zu g Inverse ist)
  ii. $g \circ v = v \circ g = e$ (weil v das zu g Inverse ist)

  → dann ist $u = e \circ u = (v \circ g) \circ u = v \circ (g \circ u) = v \circ e = v$, also $u = v$

Beweis von Satz 2 (Teil (3))

- zu zeigen: $g \circ v = g \circ w$ oder $v \circ g = w \circ g$ => $v = w$ für alle $g, v, w \in G$

  Seien $g, v, w \in G$, dann gilt:

$g \circ v = g \circ w$	$v \circ g = w \circ g$
$\Leftrightarrow$ $g^{-1} \circ (g \circ v) = g^{-1} \circ (g \circ w)$	$\Leftrightarrow$ $(v \circ g) \circ g^{-1} = (w \circ g) \circ g^{-1}$
$\Leftrightarrow$ $(g^{-1} \circ g) \circ v = (g^{-1} \circ g) \circ w$	$\Leftrightarrow$ $v \circ (g \circ g^{-1}) = w \circ (g \circ g^{-1})$
$\Leftrightarrow$ $e \circ v = e \circ w$	$\Leftrightarrow$ $v \circ e = w \circ e$
$\Leftrightarrow$ $v = w$	$\Leftrightarrow$ $v = w$

→ also ist $v = w$

Beweis von Satz 2 (Teil (4))

- zu zeigen: $(g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_{n-1} \circ g_n)^{-1} = g_n^{-1} \circ g_{n-1}^{-1} \circ \ldots \circ g_2^{-1} \circ g_1^{-1}$ für $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$

  Seien $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& (g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_{n-1} \circ g_n) \circ (g_n^{-1} \circ g_{n-1}^{-1} \circ \ldots \circ g_2^{-1} \circ g_1^{-1}) \\
= \quad & g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_{n-1} \circ g_n \circ g_n^{-1} \circ g_{n-1}^{-1} \circ \ldots \circ g_2^{-1} \circ g_1^{-1} \\
= \quad & g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_{n-1} \circ e \circ g_{n-1}^{-1} \circ \ldots \circ g_2^{-1} \circ g_1^{-1} \\
= \quad & g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_{n-1} \circ g_{n-1}^{-1} \circ \ldots \circ g_2^{-1} \circ g_1^{-1} \\
= \quad & g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ e \circ \ldots \circ g_2^{-1} \circ g_1^{-1} \\
= \quad & \ldots \\
= \quad & g_1 \circ e \circ g_1^{-1} \\
= \quad & g_1 \circ g_1^{-1} \\
= \quad & e
\end{aligned}
$$

Literaturverzeichnis

- Beutelspacher, A. (2003). *Lineare Algebra. Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen* (6. Auflage). Wiesbaden: Vieweg.
- Fischer, G. (2010). *Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger* (17. Auflage). Wiesbaden: Vieweg.
- Rosebrock, S. (2004). *Geometrische Gruppentheorie. Ein Einstieg mit dem Computer. Basiswissen für Studium und Mathematikunterricht* (1. Auflage). Wiesbaden: Vieweg.
- Rosebrock, S. (2010). *Geometrische Gruppentheorie. Ein Einstieg mit dem Computer. Basiswissen für Studium und Mathematikunterricht* (2. Auflage). Wiesbaden: Vieweg.
- Rosebrock, S. (2020). *Anschauliche Gruppentheorie. Eine computerorientierte geometrische Einführung* (3. Auflage). Berlin: Springer.

VIELEN DANK FÜR EURE AUFMERKSAMKEIT