UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Untergruppen und Normalteiler: Kapitel 3 von Rosebrock

Referentin: Alisha Alexandra Ritz

Dozent: Prof. Dr. Weber

Inhaltsverzeichnis

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Untergruppen

Beispiel 3.1

- Sei U die Menge der Isometrien, die die Menge der Punkte {1, 3 ,5} in sich überführen
- $U=\{id, s1, s2, s3, d^{120}, d^{240}\}$ ist Teilmenge von $D_6=\{id , s1, s2, s3, s4, s5, s6, d^{120}, d^{240}, d^{60}, d^{180}, d^{300}\}$
- U ist *Stabilisator* der Punktmenge {1, 3, 5}
- U ist *Untergruppe* von D_6

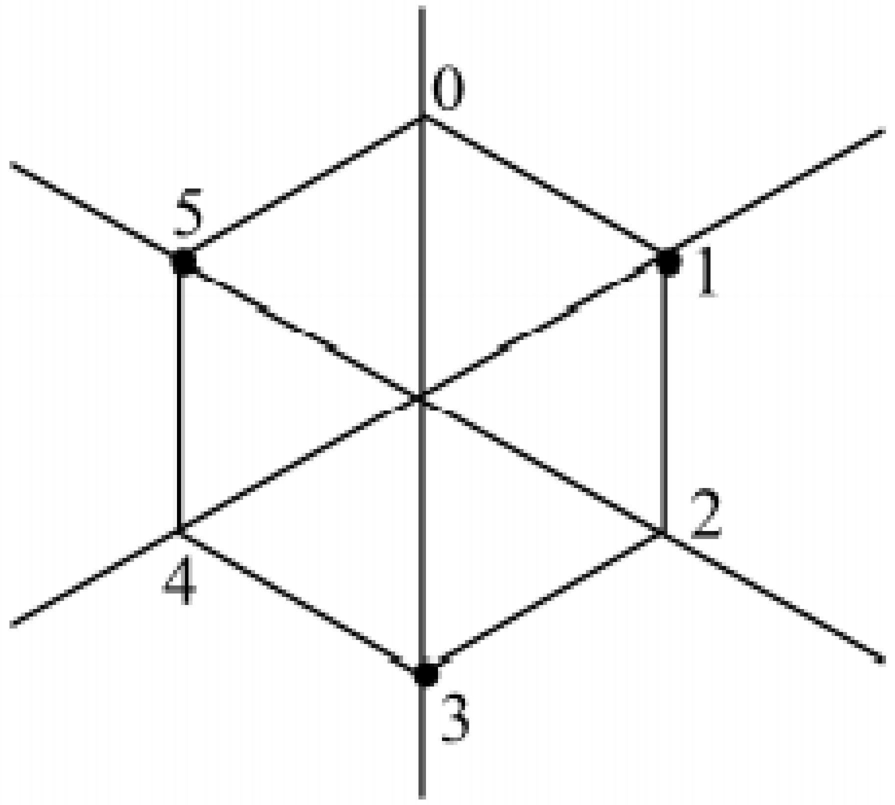

Abbildung 3.1: Reguläres Sechseck

Definition 3.2

Eine Teilmenge H einer Gruppe G heißt Untergruppe wenn

1) H mit der Verknüpfung von G selbst eine Gruppe bildet
2) $a \circ b \in H \ \forall a,b \in H$ (Abgeschlossenheit unter der Verknüpfung)

<u>Das heißt:</u>

$(U, \circ)$ ist eine Untergruppe von $(D_6, \circ)$

Schreibweise: $U < D_6$

<u>Außerdem gilt:</u>

(1) $G < G$

(2) $\{e\} < G$, $\{e\}$ ist die triviale Gruppe

Untergruppenkriterium

Satz 3.9

Eine nichtleere Teilmenge H einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn

$$\forall a, b \in H \text{ gilt } ab^{-1} \in H.$$

Beweis von Satz 3.9

„$\Rightarrow$“ ist klar

„$\Leftarrow$“ Da H nichtleer gilt: $\exists g \epsilon H \Rightarrow e = gg^{-1} \epsilon H \Rightarrow$neutrales Element liegt in H

$\forall a, \epsilon H$ gilt: $e, a\ \epsilon H \Rightarrow a^{-1} = ea^{-1} \epsilon H \Rightarrow$Inverses liegt in H

$\forall a, b^{-1} \epsilon H$ ist $a(b^{-1})^{-1} = ab \epsilon H \Rightarrow$ H ist abgeschlossen unter der Verknüpfung

$\Rightarrow$ H ist Untergruppe von G

Untergruppe – Ja oder Nein?

$(2\mathbb{Z},+)<(\mathbb{Z},+)$ $2\mathbb{Z}=\{n \mid n=2m,\ m \in \mathbb{Z}\}$

Ja, denn $2=2*1 \Rightarrow 1 \in \mathbb{Z}$ und somit nichtleer, und $\forall a=2m,\ b=2n \in 2\mathbb{Z}$ gilt

$a+b^{-1}=2m+(-2n)=2m-2n=2(m-n) \in 2\mathbb{Z}$ da $(m-n) \in \mathbb{Z}$

$(\mathbb{Z}^*,+)<(\mathbb{Z},+)$

Nein, denn $\nexists 0=e \in \mathbb{Z}^*$ und somit besitzt diese kein neutrales Element.

Satz 3.10

Die Untergruppen einer zyklischen Gruppe sind zyklisch.

Beweis

Sei $G=<g>$ eine zyklische Gruppe und $U<G$ eine nichtrriviale Untergruppe. Sei $g^n \epsilon U$ so gewählt, dass der Exponent den minimal möglichen Betrag aller Potenzen ungleich der Identität hat. Sei $g^k \epsilon U$ ein beliebiges Element der Untergruppe. Es lässt sich nun mit Division mit Rest von k durch n durchführen, d.h.:

$k = ni + r, 0 \leq r < |n|$. *Es gilt also* $g^k = g^{ni} \circ g^r \Leftrightarrow g^r = g^k \circ (g^n)^{-i}$

Die rechte Seite ist ein Element von U und deswegen ist $g^r \epsilon U$. Da aber $|n|$ minimal ist, folgt $r=0$ und deswegen $(g^n)^i = g^k$. Es lässt sich also jedes Element der Untergruppe durch eine Potenz von g^n ausdrücken, und deshalb ist $U =< g^n >$ zyklisch.

Nebenklassen und Normalteiler

Definition

Sei G eine Gruppe und sei H⊆G eine Untergruppe. Die Menge

$$aH = \{a \circ x | x \epsilon H\} (für\ ein\ a\ \epsilon G)$$

heißt die **linke Nebenklasse** von H bezüglich a.

Die Menge

$$Ha = \{x \circ a | x \epsilon H\} (für\ ein\ a\ \epsilon G)$$

heißt die **rechte Nebenklasse** von H bezüglich a.

Die Menge aller **Linksnebenklassen** von H wird durch **G/H** bezeichnet.

Die Menge aller **Rechtsnebenklassen** von H wird durch **H\G** bezeichnet.

Definition 3.33

Sei N eine Untergruppe einer Gruppe G. Gilt für alle $g \epsilon G$ die Bedingung

$$gN = Ng,$$

so heißt N Normalteiler von G. Man sagt auch, N ist normale Untergruppe von G.

Schreibweise $N \lhd G$.

Satz 3.34

Sei $N<G$. N ist Normalteiler von G genau dann, wenn die Nebenklasen gN für alle $g\epsilon G$ eine Gruppe G/N mit der Operation

$$g_i N * g_k N = (g_i g_k) N$$

bilden.

Beispiel

$(\mathbb{Z},+)/\ (2\mathbb{Z},+)$, additive abelsche Gruppe der ganzen Zahlen modulo n

Satz 3.12

Sei G eine Gruppe und H<G eine Untergruppe. Dann kann man G als disjunkte Vereinigung von Linksnebenklassen schreiben.

Beweis

Es gilt $G = \bigcup_{g \in G} gH$ weil e ϵH. In der Nebenklasse gH ist deswegen nämlich mindestens g. Sei jetzt $c=ah_1$ und $c=bh_2$ wobei $h_1,h_2 \epsilon H$. Dann gilt $a=ch_1^{-1}=bh_2h_1^{-1}$. Jedes Element $ah\epsilon aH$ hat somit die Form $ah=b(h_2h_1^{-1}h)\ \epsilon bH$. Deswegen gilt $aH\subset bH$. Genau so zeigt man $bH\subset aH$, so dass $aH=bH$ gilt. Streiche nun jede Nebenklasse, die mehrfach vorkommen ⇒ Vereinigung ist disjunkt.

Folgerungen

Lemma 3.13

Ist G eine Gruppe und $H<G$, dann gilt $\forall a,b \in G$: $b \in aH \Rightarrow aH=bH$.

Lemma

Sei G eine Gruppe, sei $H<G$ eine Untergruppe. Dann gilt:

$\forall a,b \in H \quad aH=bH \Leftrightarrow aH \cap bH \neq \emptyset$.

Lemma

Sei G eine Gruppe und sei H<G eine Untergruppe von G. Dann gilt:

$\forall a, b \epsilon G$: $|aH|=|bH|$

Beweis

Betrachten wir die Abbildung:

$$\phi: aH \rightarrow bH,\ y \mapsto ba^{-1}y$$

Diese ist wohldefiniert:

$$\text{wenn } y \epsilon H \Rightarrow \exists x\ \epsilon H : y=ax \Rightarrow ba^{-1}y=bx\ \epsilon bH.$$

Diese Funktion ist bijektiv, da die Abbildung

$$\Psi: bH \rightarrow aH,\ z \mapsto ab^{-1}z$$

die Inverse Abbildung zu ϕ ist. $\Rightarrow |aH|=|bH|$

Satz von Lagrange

Satz von Lagrange

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Satz 3.14

Die Ordnung einer Untergruppe H einer endlichen Gruppe G ist ein Teiler der Ordnung von G. $(|G|=|H|*|G/H|)$ $(|G/H| \triangleq |G:H|)$

Beweis

Die Element von G/H bilden eine Partition von G und somit

$G = \coprod_{aH \in G \setminus H} aH \Rightarrow |G| = \sum_{aH \in G \setminus H} aH$ diese Summe hat $|G/H|$ Summanden

Und jeder Summand hat $|H|$ Elemente $\Rightarrow |G|=|H|*|G/H|$.

Beispiel

Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G, sodass

$|G|<45$, $|H|>10$ und $|G:H|>3$. Bestimme $|G|$, $|H|$, $|G:H|$!

Mit dem Satz von Lagrange *($|G|=|H|*|G/H|$)* folgt:

$|H|$ teilt $|G|$:

$|H|=11>10$ und $|G:H|=4>3$ mindestens nach Voraussetzung

d.h. $|G|=11*4=44<45$

Passt! Wir haben die Mächtigkeiten gefunden.

Homomorphismen

Definition 3.25

Seien $(G, \circ)$ und $(H,\#)$ zwei Gruppen. Eine Abbildung $\Phi: G \to H$ heißt **Homomorphismus**, wenn,

$$\phi(u \circ v) = \phi(u) \# \phi(v),\ \forall u, v \in G$$

Ein Homomorphismus ist ein

(a) **Monomorphismus**, wenn ϕ injektiv ist

(b) **Epimorphismus**, wenn ϕ surjektiv ist

(c) **Isomorphismus**, wenn ϕ bijektiv ist.

(d) **Automorphismus**, wenn ϕ bijektiv und $G=H$

Definition 3.29

Der **Kern** eines Homomorphismus $\Phi\colon G \rightarrow H$ besteht aus allen Urbildern des neutralen Elements, d.h

$$kern(\phi) = \{g \epsilon G \mid \phi(\mathrm{g}) = \mathrm{e}\}$$

Das **Bild** eines Homomorphismus $\Phi\colon G \rightarrow H$ sind alle Elemente, die als Bild vorkommen, d.h.

$$bild(\phi) = \{h \epsilon H \mid \exists g \epsilon G, \phi(g) = h\}$$

Satz 3.27

Jeder Homomorphismus $\Phi: G \rightarrow H$ bildet das neutrale Element auf das neutrale Element ab und das Inverse eines Elementes auf das Inverse seines Bildes.

(i) $\Phi(e_G) = e_H$

(ii) $\Phi(a^{-1}) = \Phi(a)^{-1} \; \forall a \in G$

Satz 3.30

Sei $\Phi: G \rightarrow H$ ein Homomorphismus.

kern(Φ) bildet eine Untergruppe von G.

bild(Φ) bildet eine Untergruppe von H.

Satz 3.31

Sei $\Phi\colon G\rightarrow H$ ein Homomorphismus. Dann gilt Φ hat einen trivialen Kern genau dann, wenn Φ injektiv ist.

Beweis

„$\Rightarrow$“ Sei Φ injektiv, also hat jedes Bild genau ein Urbild, d.h.

in $\Phi^{-1}(e_G)=\{e_H\}$ liegt nur ein Element. Somit folgt aus 3.30, dass

$kern\Phi=\{e_G\}$

„$\Leftarrow$" Sei $ker n\Phi=\{e_G\}$. Sei weiterhin a, b$\in G$ mit

$$\Phi(a)=\Phi(b)$$

$$\Leftrightarrow \Phi(a)\,\Phi(b)^{-1}=e_H$$

$$\Leftrightarrow \Phi(ab^{-1})=e_H$$

$$\Leftrightarrow ab^{-1}=e_G$$

$$\Leftrightarrow a=b$$

$\Rightarrow \Phi$ ist injektiv

Satz 3.32

Sei $\Phi\colon G \to H$ ein Homomorphismus und $U<H$. Dann ist $\Phi^{-1}(U)$ eine Untergruppe von G.

Beweis

Übung. Tipp: Untergruppenkriterium.

Isomorphiesatz

Satz

Sei $\theta\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist $G/kern\theta$ eine Gruppe mit der kanonische Projektion $\pi\colon G \to G/kern\theta$ und es ex. Ein Gruppenhomomorphismus $\xi\colon G/kern\theta \to H$,sodass $\theta = \xi \circ \pi$.

Die Abbildung ξ induziert den Gruppenisomorphismus

$$G/kern\theta \cong \mathrm{bild}\theta.$$

Literaturverzeichnis

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

- Rosebrock, S. (2004). Geometrische Gruppentheorie. Ein Einstieg mit dem Computer. Basiswissen für Studium und Mathematikunterricht (1. Auflage). Wiesbaden: Vieweg.
- Rosebrock, S. (2010). Geometrische Gruppentheorie. Ein Einstieg mit dem Computer. Basiswissen für Studium und Mathematikunterricht (2. Auflage). Wiesbaden: Vieweg.
- Rosebrock, S. (2020). Anschauliche Gruppentheorie. Eine computerorientierte geometrische Einführung (3. Auflage). Berlin: Springer.

UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!