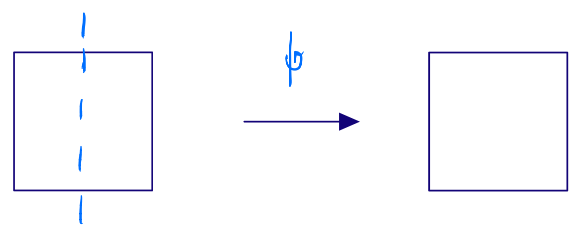
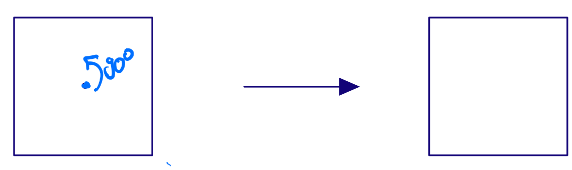
Symmetrien und Gruppenwirkung

- Wann nennen wir etwas symmetrisch?

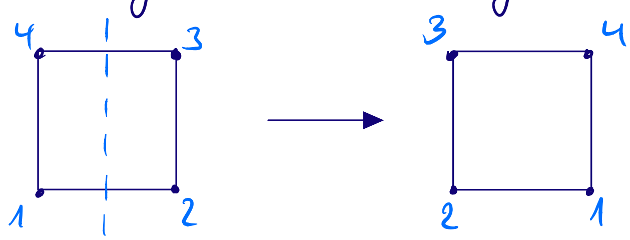


Erscheinungsbild bleibt erhalten.

- Was können wir noch machen?



- Was genau haben wir gemacht?



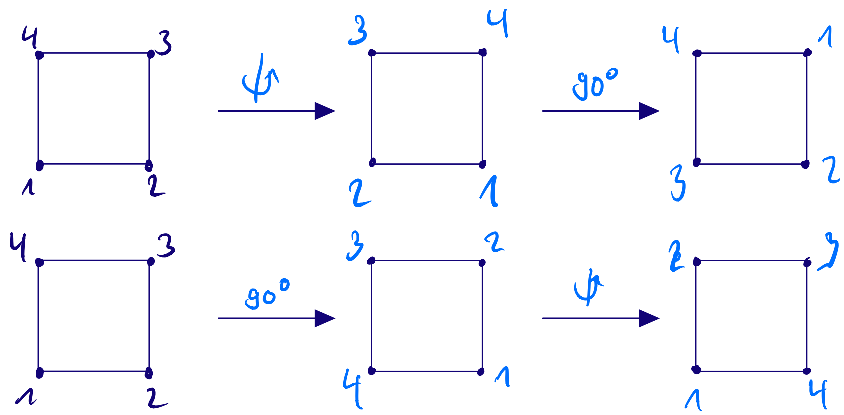
- Für ein bisschen mehr Matheflavour

$$\sigma : \{1, \dots, 4\} \to \{1, \dots, 4\} \quad i \mapsto \begin{cases} 2 ; & i = 1 \\ 1 ; & i = 2 \\ 4 ; & i = 3 \\ 3 ; & i = 4 \end{cases}$$

1. Symmetrische Gruppe

Def 1.1 (Symmetrische Gruppe):
Sei $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Wir bezeichnen mit $S_n = \{\sigma : M \to M;\ \sigma \text{ bijektiv}\}$ die Permutationsgruppe von M.
Die Verknüpfung $\circ : S_n \times S_n \to S_n$, $(\sigma, \sigma')(i) = (\sigma \circ \sigma')(i) = \sigma(\sigma'(i))$ für $i \in M$ (Abbildungsverknüpfung) mit der Menge S_n bildet zusammen eine Gruppe. Die Gruppe $(S_n, \circ)$ heißt die symmetrische Gruppe.

Bemerkung 1.2 (Gruppenaxiome von $(S_n, \circ)$):
- $\circ$ assoziativ, σ^{-1} Inverse, $id_M \in S_n$



Bemerkung 1.3 (Darstellung der Permutationen):
1. Wertetabelle: $\sigma : \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

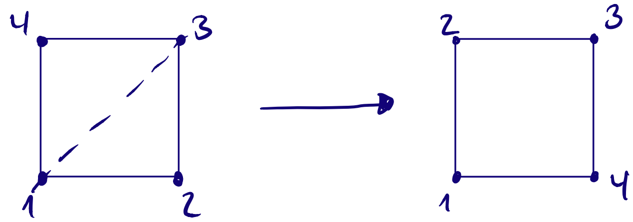
2. Zykel: Sei $\sigma \in S_n$ und $i_1, \dots, i_p \in M$ mit folgenden Eigenschaften:
   1. $\sigma(i_k) = i_{k+1}$ für $k = 1, \dots, l$
   2. $\sigma(i_p) = i_1$

3. $\sigma(x) = x$ für alle $x \in M \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$

$\Rightarrow \quad \sigma = (i_1\ i_2\ i_3 \ldots i_p) \quad \Rightarrow \sigma \in S_n.\quad \sigma = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_r$

σ_i sind paarweise disjunkt

Beispiel 1.4:

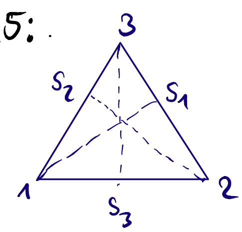


$\sigma : \{1, \ldots, 4\} \to \{1, \ldots, 4\},\quad i \mapsto \begin{cases} 1 & ; i = 1 \\ 4 & ; i = 2 \\ 3 & ; i = 3 \\ 2 & ; i = 4 \end{cases}$

$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\sigma = (2\ 4)$

Beispiel 1.5:



$D_3 = \{s_1, s_2, s_3, id, d_{120}, d_{240}\}$

$= \{(2\ 3), (1\ 3), (1\ 2), id, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

Satz 1.6 (von Cayley):
Jede endliche Gruppe der Ordnung n ist isomorph zu einer UG der Gruppe S_n.

Beweis: Sei $G = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$,

$\phi_i : G \to G,\ g \mapsto a_i g$ bijektive

$\Phi = \{\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}\} \subseteq S_n \qquad G \cong \Phi$

1.) $(\Phi, \circ)$ ist ein UG

Folgt daraus, dass G eine Gruppe ist.

2.) Isomorphie

$\lambda : G \to \Phi \,,\; a_i \mapsto \phi_i$

- $\lambda(a_i)\lambda(a_k) = \phi_i \phi_k = \phi_e = \lambda(a_e) = \lambda(a_i a_k)$

- $\lambda(a_i) = \lambda(a_k)$

  $\phi_i(x) = \phi_k(x) \quad \forall x \in G$

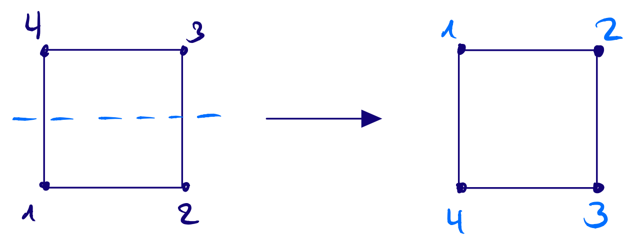
  $a_i \cdot a_0 = a_k \cdot a_0 \iff a_i = a_k$

  $\Rightarrow \lambda$ injektiv $\iff$ bijektiv

  $\Rightarrow G \cong \Phi$ $\blacksquare$

2. Operationen von Gruppen auf Mengen

Beispiel 2.1:



$X = \{1,2,3,4\}$

$(14)(23)\,1 = 4 \qquad (14)(23)\,2 = 3$

$(14)(23)\,3 = 2 \qquad (14)(23)\,4 = 1$

$(14)(23) \in S_4$, insbesondere $(14)(23) \in D_4$

Def. 2.2 (Operation von G auf X):

Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine Operation von G auf X ist eine Abbildung $\Phi: G \times X \to X$ mit folgenden Eigenschaften:

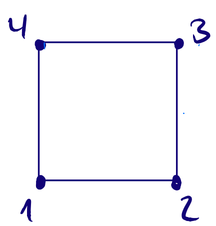
1. $\forall x \in X: \Phi(\cancel{e},x) = ex = x$ 2. $\forall x \in X: \Phi(g\cancel{h},x) = (gh)x = g(hx)$

Die Operation nennt man auch Linksoperation. Man nennt die Menge X auch eine G-Menge.

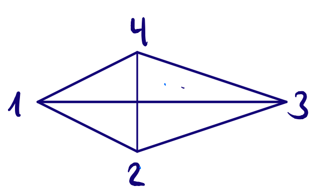
Was ist die größte Menge G, die auf X wirken kann, ohne das wir deren Struktur verändern?

Beispiel 2.3:

1. $M = \{1,2,3,4\}$ $\qquad G = S_4 \qquad |S_4| = 4! = 24$

2. 

$G = D_4 \qquad |D_4| = 2 \cdot 4 = 8$

3. 

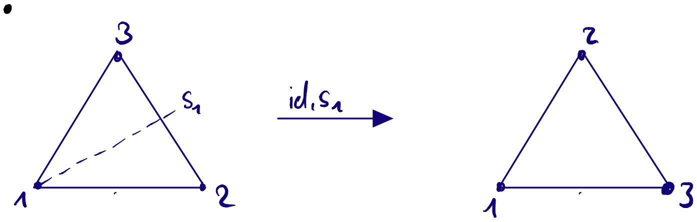
$G = \{id, (2\ 4)\} \qquad |G| = 2$

$\Rightarrow$ Die maximale Symmetriegruppe variiert, obwohl man bei allen Beispielen eine Menge mit vier Punkten betrachtet. Der Grund ist, die Gruppe erhält die Struktur.

Def. 2.4 (Symmetriegruppe):
Die Symmetriegruppe einer Figur besteht aus der Menge aller Kongruenzabbildungen der Figur und der Verkettung von Abbildungen als Gruppenoperationen.
Die Symmetriegruppe ist somit die größte Gruppe G, welche auf die Figur wirkt und dessen Eigenschaften erhält.

3. Bahnformel

Beispiel 3.1:

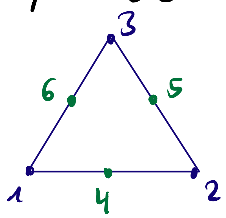


$s_1(1) = 1$, $id(1) = 1 \Rightarrow Stab(1) = \{id, (2\,3)\}$

Def. 3.2 (Stabilisator):
Sei X eine G-Menge. Der Stabilisator von x ist die Menge

$$Stab(x) = \{g \in G ; gx = x\} \subseteq G$$

Beispiel 3.3:



$X = \{1, \dots, 6\}$

$G = \{id, (1\,2)(5\,6), (2\,3)(4\,6), (1\,3)(4\,5), (1\,2\,3)(4\,5\,6), (1\,3\,2)(4\,6\,5)\}$

$id(1) = 1$ $\quad$ $id(4) = 4$

$(12)(56)\,1 = 2$ $\quad$ $(23)(46)\,4 = 6$

$(13)(45)\,1 = 3$ $\quad$ $(13)(45)\,4 = 5$

$G1 = \{1,2,3\} = G2 = G3$

$G4 = \{4,5,6\} = G5 = G6$

Def. 3.4 (Bahn / Orbit):

Sei X eine G-Menge und $x \in X$. Die Menge

$$Gx = \{y \in X ; \exists g \in G \;\; gx = y\}$$

heißt **Bahn (Orbit)** von X.

$|Gx|$ nennt man übrigens auch die **Bahnlänge**.

Satz 3.5:

Sei X eine G-Menge. Dann ist die Menge aller Bahnen von X $\{Gx ; x \in X\}$ eine Partion von X.

(i) $X = \bigcup_{x \in X} Gx$ $\quad$ (ii) $Gx = Gy \Longleftrightarrow Gx \cap Gy \neq \emptyset$

Beweis: Wir definieren uns die Relation:

$$y \sim x :\Longleftrightarrow y \in Gx$$

Wir zeigen: 1.) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation

2.) Gx sind die Äquivalenzklassen von $\sim$

Da Äquivalenzklassen eine Partion bilden, zeigt das die Aussage.

1.) • reflexiv: $x = ex \Rightarrow x \sim x$

• sym.: $x \sim y$: $x = gy \overset{G \text{ ist}}{\underset{\text{eine Gruppe}}{\Longleftrightarrow}} y = g^{-1}x \Rightarrow y \sim x$

• transitiv: $x \sim y$ und $y \sim z$:

$x = gy$ und $y = hz$

$x = gy = g(hz) = (gh)z \Rightarrow x \sim z$

$$\begin{aligned} 2.)\ [x] &= \{y \in X ;\ y \sim x\} \\ &= \{y \in X ;\ y \in Gx\} \\ &= \{y \in X ;\ \exists g \in G : y = gx\} \\ &= Gx \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{Gx ; x \in X\}$ bildet eine Partion. ∎

Satz 3.6 (Bahnformel):

Sei X eine G-Menge, G eine endl. Gruppe und $x \in X$. Dann gilt

$$|G| = |\mathrm{Stab}(x)| \cdot |Gx|$$

Beweis: 1.) $\mathrm{Stab}(x)$ ist eine UG von G mit dem Satz von Lagrange folgt:

$$\begin{aligned} |G| &= |\mathrm{Stab}(x)| \cdot |G/\mathrm{Stab}(x)| \\ &\overset{(*)}{=} |\mathrm{Stab}(x)| \cdot |Gx| \end{aligned}$$

Lagrange

2.) $|Gx| = |G/\mathrm{Stab}(x)|$

$\varphi : G/\mathrm{Stab}(x) \to G,\ \varphi(g\,\mathrm{Stab}(x)) = gx$

- Wohldefiniertheit:

  Sei $g\,\mathrm{Stab}(x) = h\,\mathrm{Stab}(x) \Leftrightarrow h^{-1}g \in \mathrm{Stab}(x)$

  Dann existiert ein $t \in \mathrm{Stab}(x)$ mit

  $$t = h^{-1}g \Leftrightarrow ht = g$$

  $$\begin{aligned} \varphi(g\,\mathrm{Stab}(x)) &= gx \\ &= (ht)x \\ &= h(tx) \\ &\overset{t \in \mathrm{Stab}(x)}{=} hx = \varphi(h\,\mathrm{Stab}(x)) \end{aligned}$$

- Injektivität: Folgt analog wie Wohldefiniertheit

Bahnensatz

- Surjektiv! Sei $y \in Gx$.
  Dann existiert ein $g \in G$ mit $y = gx$.
  $$y = gx = \varphi(g\,\mathrm{Stab}(x))$$

$\Rightarrow |Gx| = |G/\mathrm{Stab}(x)|$

$\blacksquare$

4. Zusammenfassung

1. Symmetrische Gruppe
   - $(S_n = \{\sigma : M \to M ; \sigma \text{ bijektiv}\}, \circ)$ symmetrische Gruppe
   - schreibbar als Zykel und Wertetabelle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, $(i_1 \dots i_n)$
   - Satz von Cayley: Gruppen endl. Ordnung sind isomorph zu einer UG von S_n. Also darstellbar als Zykel.
2. Gruppenoperation
   - Gruppenoperation: $\Phi : G \times X \to X$ mit (i) $ex = x \ \forall x$ (ii) $(gh)x = g(hx)$
   - Symmetriegruppe: Größte Gruppe, welche auf X wirkt und dessen Struktur erhält.
3. Bahnformel
   - Bahn: $Gx = \{gx \in X ; g \in G\}$ partioniert X
   - Stabilisator: $G(x) = \{g \in G ; x = gx\}$ erhalten x
   - $|G| = |G(x)| \cdot |Gx|$

5. Literatur

[1] Karpfinger C., Meyberg K., „Algebra - Gruppen - Ringe - Körper", Springer Spektrum, 2017

[2] Bosch S. „Algebra", Springer, 2009

[3] Rosebrock S., „Anschauliche Gruppentheorie Eine geometrische Einführung", Springer, 2020

[4] 3Blue1Brown, „Gruppentheorie und 808,017,424,794,512,875,886,459,904,961,710,757,005,754,368,000,000,000", YouTube