Skript zur Analysis

26. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen und deren Graphen

In diesem Kapitel werden wir den Begriff einer *Funktion* auffrischen und uns einige Beispiele für Funktionen und deren Graphen anschauen. Wir beginnen mit der Frage: Was ist eine Funktion?

Definition 1.1. Sei $D \subset \mathbb{R}$. Wir nennen $f : D \to \mathbb{R}$ eine *Funktion*, falls für jedes $x \in D$ *genau ein* $f(x) \in \mathbb{R}$ existiert. Die Menge D nennen wir *Definitionsbereich*.

1.1 Polynome und rationale Funktionen

Wir präsentieren in diesem Abschnitt zunächst einige Klassen von Funktionen.

a) *Konstante Funktionen* sind Funktionen von der Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = c$$

für ein festes $c \in \mathbb{R}$.

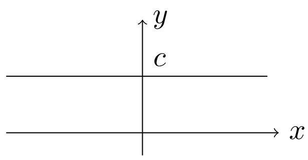

Abbildung 1: Der Graph einer konstanten Funktion.

b) Eine *affine Funktion* ist eine Funktion von der Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ mit *Steigung* a.

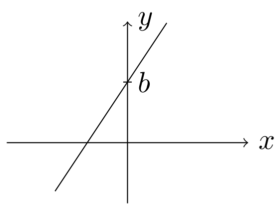

Abbildung 2: Der Graph einer affinen Funktion.

c) Ein *Polynom* ist eine Funktion von der Form $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ für $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

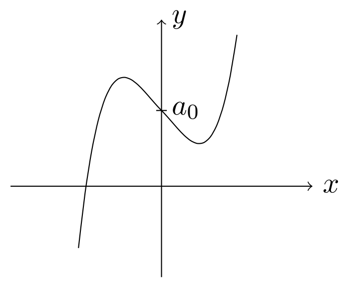

Abbildung 3: Der Graph eines Polynoms.

d) Eine *rationale Funktion* ist eine Funktion von der Form $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, wobei p und q Polynome sind und $q(x) \neq 0$ für alle $x \in D$.

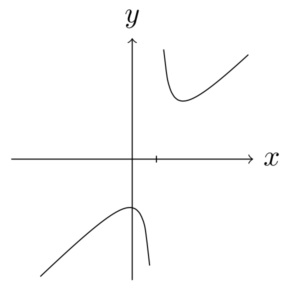

Abbildung 4: Der Graph einer rationalen Funktion.

Im folgenden Beispiel schauen wir uns die Graphen einiger Funktionen an.

Beispiel 1.2. (Wichtige Graphen)

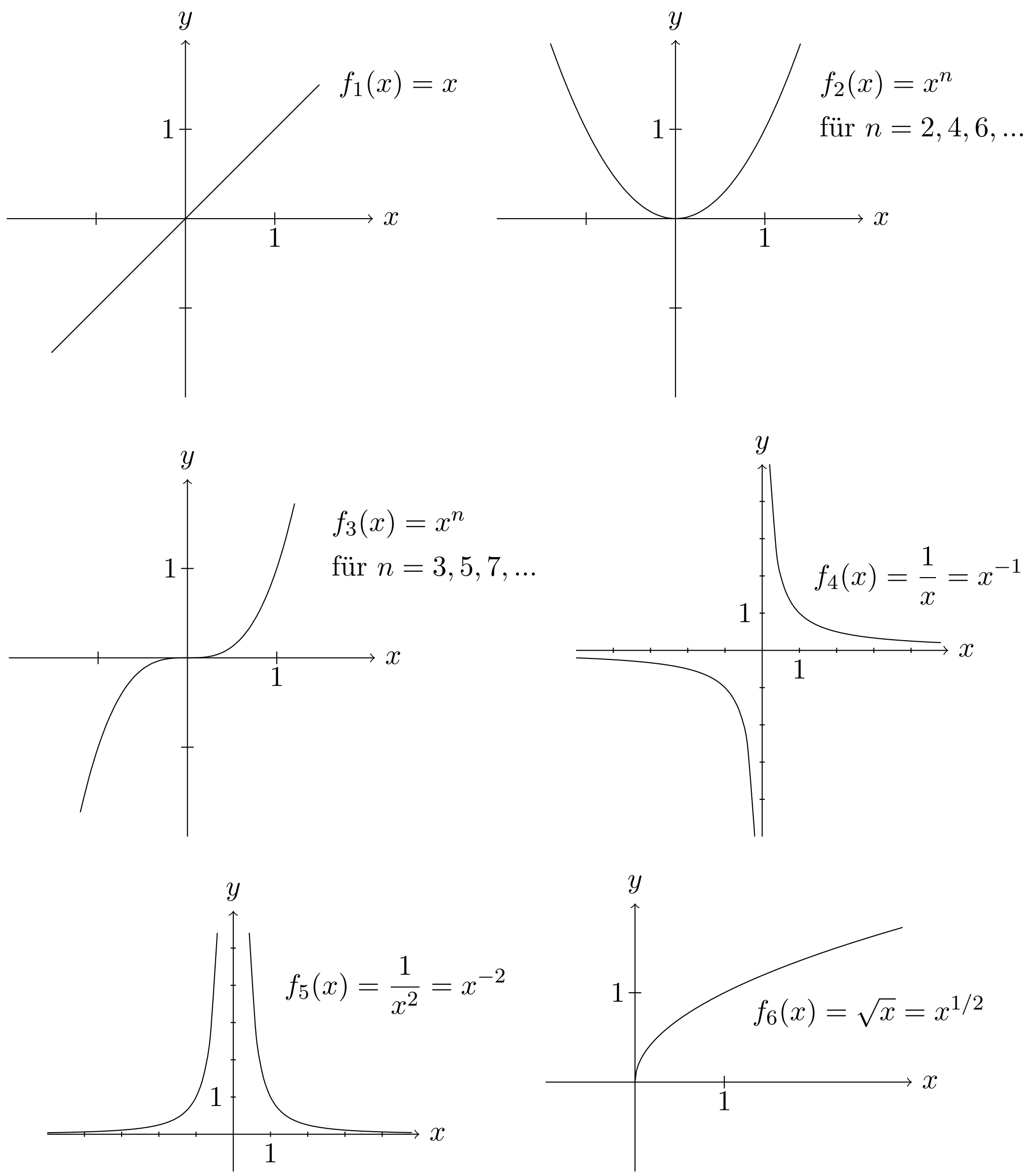

Abbildung 5: Beispiele für Graphen von Funktionen.

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, wie man ausgehend von einer gegebenen Funktion eine Funktion konstruieren kann, deren Graph die Spiegelung/Verschiebung des Graphen der ursprünglichen Funktion ist.

Beispiel 1.3. Die folgende Abbildung zeigt, dass die Multiplikation einer Funktion mit (-1) einer Spiegelung des Graphen entlang der x-Achse entspricht.

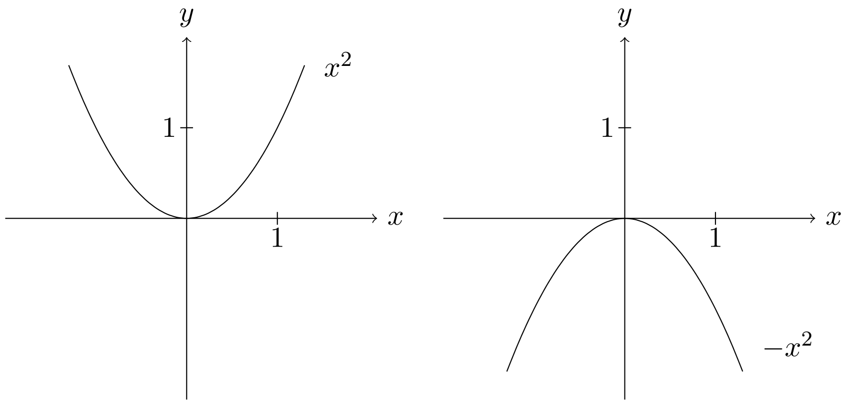

Abbildung 6: Spiegelung eines Graphen entlang der x-Achse.

Beispiel 1.4. Die folgende Abbildung zeigt, dass die Funktion $f(-x)$ zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ einer Spiegelung entlang der y-Achse entspricht.

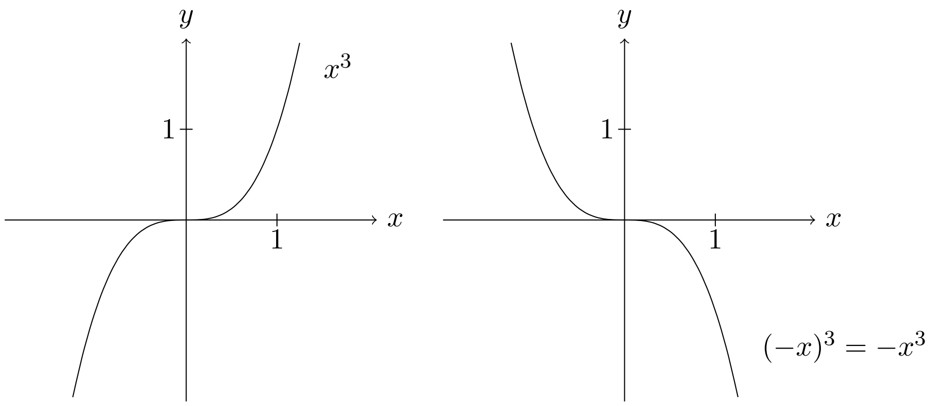

Abbildung 7: Spiegelung eines Graphen entlang der y-Achse.

Bemerkung 1.5 (Spiegelungen)**.** Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Dann ist der Graph der Funktion $g(x) := -f(x)$ die Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse und $h(x) := f(-x)$ die Spiegelung des Graphen von f an der y-Achse.

Beispiel 1.6. Die folgende Abbildung zeigt, dass die Addition einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ zu einer Funktion einer Verschiebung um c in y-Richtung entspricht.

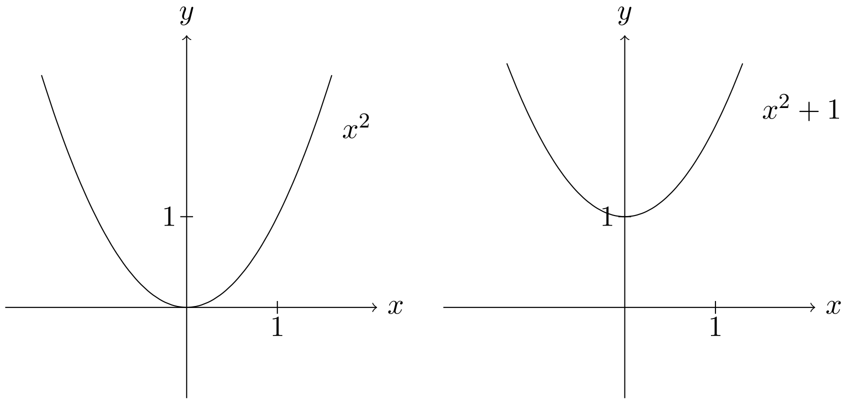

Abbildung 8: Verschiebung eines Graphen in y-Richtung.

Beispiel 1.7. Die folgende Abbildung zeigt, dass die Funktion $f(x-c)$ einer Verschiebung um c in x-Richtung entspricht.

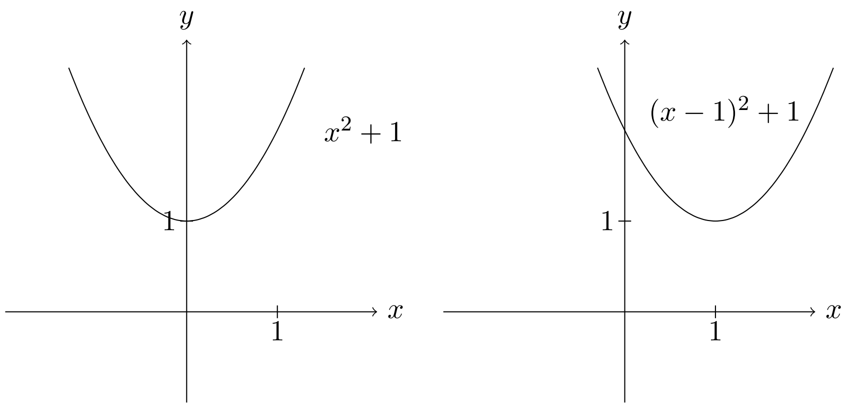

Abbildung 9: Verschiebung eines Graphen in x-Richtung.

Achtung: Die obige Abbildung zeigt, dass die Funktion $f(x-1)$ einer Verschiebung von f um 1 nach *rechts* und nicht nach links entspricht, was der ersten Intuition vielleicht widersprechen mag.

Bemerkung 1.8 (Verschiebungen)**.** Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $c \in \mathbb{R}$. Dann ist der Graph der Funktion $g(x) := f(x) + c$ die Verschiebung des Graphen von f um c in y-Richtung, wobei dies im Fall $c > 0$ einer Verschiebung nach oben und im Fall $c < 0$ einer Verschiebung nach unten entspricht. Der Graph der Funktion $h(x) := f(x-c)$ ist die Verschiebung des Graphen von f um c in x-Richtung, wobei dies im Fall $c > 0$ einer Verschiebung nach rechts und im Fall $c < 0$ einer Verschiebung nach links entspricht.

1.2 Die Umkehrfunktion

Definition 1.9 (Umkehrfunktion)**.** Es sei $f : D \to f(D)$ eine Funktion. Wir bezeichnen eine Funktion $g : f(D) \to D$ als *Umkehrfunktion von* f, falls $g \circ f : D \to D$ bzw. $f \circ g : f(D) \to f(D)$ der *Identität* entspricht, also

$$g(f(x)) = x$$

für alle $x \in D$ und

$$f(g(z)) = z$$

für alle $z \in f(D)$ gilt. Wir schreiben dann für die Umkehrfunktion meist f^{-1} statt g.

Beispiel 1.10.

1. Die Umkehrfunktion zu $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = x^2$ ist gegeben durch $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, denn

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$$

   für alle $x \geq 0$.

2. Die Umkehrfunktion zu $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ist gegeben durch $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$, denn

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{1/x} = x$$

   für alle $x \neq 0$.

1.3 Trigonometrische Funktionen

In diesem Abschnitt schauen wir uns trigonometrische Funktionen und deren Eigenschaften an. Wir beginnen mit den Graphen der Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ (Sinus) und $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ (Kosinus).

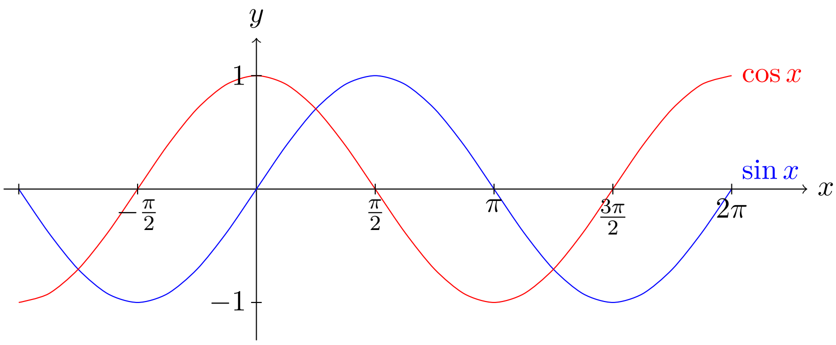

Abbildung 10: Die Graphen von Sinus und Kosinus.

Bemerkung 1.11. Sinus und Kosinus haben die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x), & \cos(-x) &= \cos(x), \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin(x), & \cos(x + 2\pi) &= \cos(x), \\ \sin(x + \pi) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x), \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x), & \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Desweiteren gilt

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Als weitere trigonometrische Funktion definiert man $\tan : D \to \mathbb{R}$ (Tangens) durch die Formel

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

wobei $D = \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Die Punkte, die im Definitionsbereich ausgeschlossen sind, sind genau die Nullstelllen vom Kosinus.

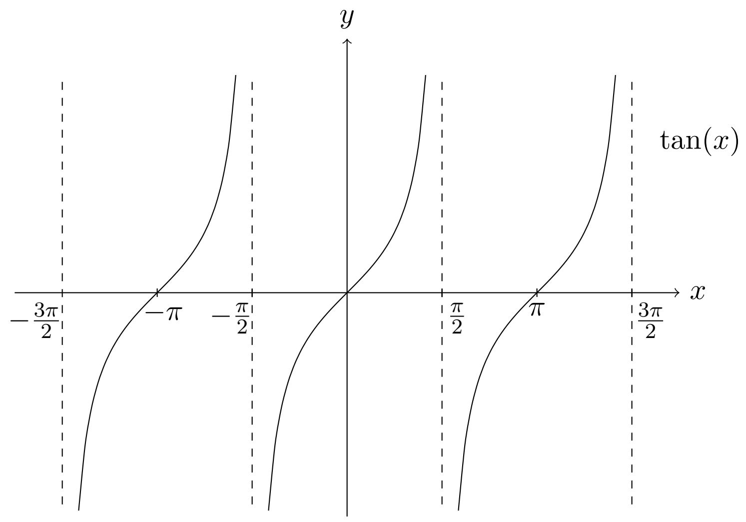

Abbildung 11: Der Graph vom Tangens.

Bemerkung 1.12.

a) Die Umkehrfunktion von $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ ist gegeben durch $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, d.h.

$$\arcsin(\sin x) = x$$

für alle $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und

$$\sin(\arcsin z) = z$$

für alle $z \in [-1,1]$.

b) Die Umkehrfunktion von $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ ist gegeben durch $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, d.h.

$$\arccos(\cos x) = x$$

für alle $x \in [0,\pi]$ und

$$\cos(\arccos z) = z$$

für alle $z \in [-1,-1]$.

c) Die Umkehrfunktion von $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, d.h.

$$\arctan(\tan x) = x$$

für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und

$$\tan(\arctan z) = z$$

für alle $z \in \mathbb{R}$.

Definition 1.13. Für eine Funktion der Form $c \cdot \sin x$ bzw. $c \cdot \cos x$ mit $c > 0$ nennen wir c die *Amplitude*.

Beispiel 1.14. Die folgende Abbildung zeigt den Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to [-2, 2]$, $f(x) = 2 \sin x$. Der Graph ist nur eine Streckung von Sinus in y-Richtung.

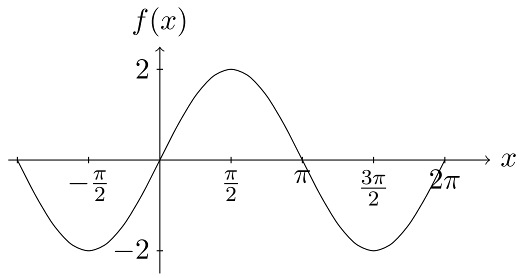

Abbildung 12: Der Graph der Funktion $f(x) = 2 \sin x$.

Definition 1.15. Für eine Funktion der Form $\sin(\omega x)$ bzw $\cos(\omega x)$ mit $\omega > 0$ nennen wir ω die *Frequenz*.

Beispiel 1.16. In der folgenden Abbildung ist der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ zu sehen. Die Frequenz $1/2$ bewirkt eine Streckung des Graphes von Kosinus in x-Richtung.

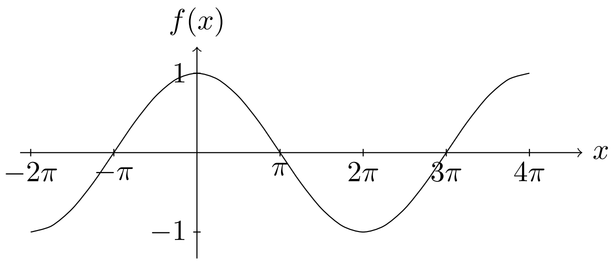

Abbildung 13: Der Graph der Funktion $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$.

1.4 Exponentialfunktion und Logarithmus

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Exponentialfunktion und ihrer Umkehrabbildung, dem natürlichen Logarithmus. Wir beginnen dabei mit einer Wiederholung der Potenzgesetze.

Bemerkung 1.17 (Potenzgesetze)**.** Für $a, b > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m}, & \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}, \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m}, & (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n, \\ \sqrt[m]{a} &= a^{1/m}, & \sqrt[m]{a^n} &= a^{n/m}, \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n}, & \frac{a^n}{a^m} &= a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}. \end{aligned}$$

Desweiteren gilt

$$a^0 = 1$$

für alle $a \in \mathbb{R}$.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der *Exponentialfunktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ definiert durch

$$f(x) = \exp(x) = \mathrm{e}^x.$$

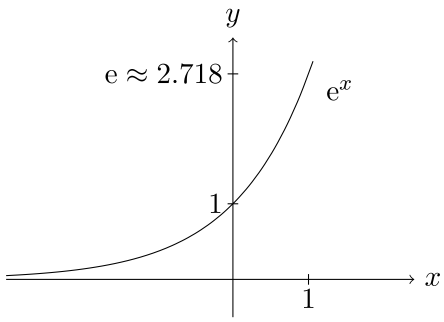

Abbildung 14: Der Graph der Exponentialfunktion.

Die Umkehrfunktion ist gegeben durch $f^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit

$$f^{-1}(x) = \ln(x)$$

und wir bezeichnen diese als den *natürlichen Logarithmus*. Da der natürliche Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt offenbar

$$\ln(\mathrm{e}^x) = x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\mathrm{e}^{\ln(z)} = z$$

für alle $z \in \mathbb{R}_{>0}$.

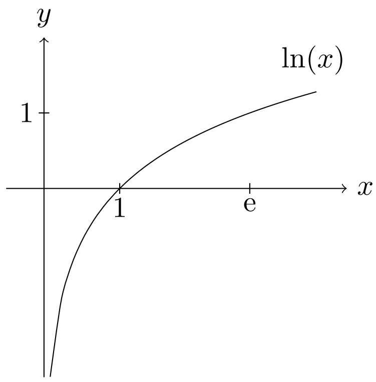

Abbildung 15: Der Graph des natürlichen Logarithmus.

Bemerkung 1.18 (Logarithmusgesetze)**.** Für $a, b > 0$ gilt

$$\begin{aligned} a^n &= \left(\mathrm{e}^{\ln(a)}\right)^n = \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot n}, \\ \ln(a^n) &= n \cdot \ln(a), \\ \ln(a \cdot b) &= \ln(a) + \ln(b) \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a) - \ln(b). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\ln(1) = 0, \qquad \ln(\mathrm{e}) = 1.$$

Viele Terme lassen sich mithilfe der Potenz- und Logarithmusgesetze vereinfachen, wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel 1.19.

a) $\ln(\mathrm{e}^7) = 7$,

b) $\mathrm{e}^{4\cdot\ln(3)} = \mathrm{e}^{\ln(3)\cdot 4} = \left(\mathrm{e}^{\ln(3)}\right)^4 = 3^4 = 81$,

c) $\ln\left(\sqrt{\frac{1}{\mathrm{e}^3}}\right) = \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^{-3}}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{-3/2}\right) = -\frac{3}{2}$

d) $\mathrm{e}^{\ln(5)-5} = \frac{\mathrm{e}^{\ln(5)}}{\mathrm{e}^5} = \frac{5}{\mathrm{e}^5}$.

2 Grenzwerte (Limiten)

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage nach dem Verhalten von Funktionen "im Unendlichen" bzw. das Verhalten in der Nähe von problematischen Stellen, beispielsweise *Polstellen.* Dazu beginnen wir mit einem Beispiel.

Beispiel 2.1. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3$. Wie verhält sich die Funktion f, wenn wir mit x beliebig groß werden, also mit x gegen ∞ laufen?

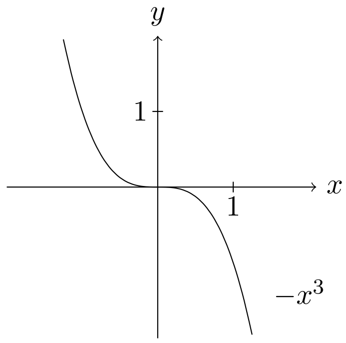

Abbildung 16: Der Graph der Funktion $f(x) = -x^3$.

Anhand des Graphen können wir ablesen, dass die Funktionswerte $f(x)$ für größer werdende Werte von x negativ und betragsmäßig beliebig groß werden. Wir sagen in diesem Fall die Funktion f strebt/konvergiert für $x \to \infty$ gegen den *Grenzwert* $-\infty$ und schreiben

$$\lim_{x\to\infty} -x^3 = -\infty.$$

Analog kann man anhand des Graphen ablesen, dass

$$\lim_{x\to-\infty} -x^3 = \infty.$$

Es gibt jedoch auch Funktionen, bei denen es nicht nur interessant ist zu wissen, was "im Unendlichen" passiert, sondern wie sich die Funktionen um bestimmte Werte von x verhalten. Besonders dann ist dies interessant, wenn man diese bestimmten Werte für x selbst nicht in die Funktion einsetzen kann, weil die Funktion dort nicht definiert ist.

Beispiel 2.2. Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Wir können diese Funktion nicht an der Stelle $x = 0$ auswerten, da sie dort nicht definiert ist. Wie verhält sich jedoch g, wenn wir sehr kleine Werte für x, also Werte nahe bei Null einsetzen?

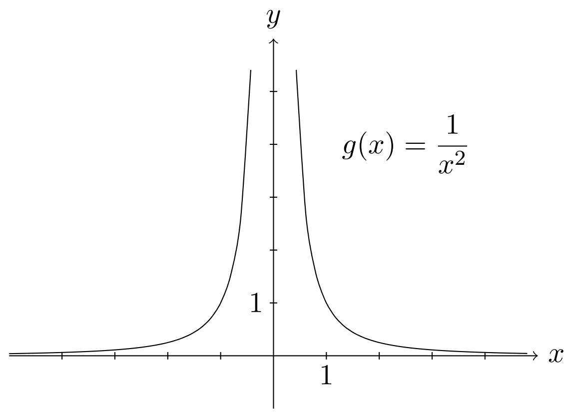

Abbildung 17: Der Graph der Funktion $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Anhand des Graphen können wir ablesen, dass die Funktionswerte immer größer werden, je näher wir uns mit x der Null nähern. Wir sagen in diesem Fall die Funktion g strebt/konvergiert für $x \to 0$ gegen ∞ und schreiben

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Analog folgt beispielsweise, dass

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty.$$

Bemerkung 2.3. Im Allgemeinen gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -\infty & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Möchte man den Grenzwert eines Polynoms für $x \to \pm\infty$ bestimmen, so ist nur das Verhalten des Terms mit dem höchsten Exponenten ausschlaggebend für den Grenzwert.

Beispiel 2.4.

a) Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 + 2x - 6 = \infty$, denn $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

b) Es gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 + 3x^2 + 6x - 10 = \infty$, denn $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = \infty$.

c) Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} -2x^3 - 12x + 3 = -\infty$, denn $\lim\limits_{x\to\infty} -2x^3 = -\infty$.

Wir wissen nun, wie man Grenzwerte von Polynomen für $x \to \pm\infty$ bestimmt. Wie sieht es aber mit rationalen Funktionen aus?

Beispiel 2.5. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Die folgende Bemerkung gibt Kriterien für die Bestimmung des Grenzwerts einer rationalen Funktion.

Bemerkung 2.6 (Grenzwerte von rationalen Funktionen)**.** Für eine rationale Funktion f unterscheidet man die Folgenden drei Fälle beim Bestimmen von Grenzwerten für $x \to \pm\infty$.

1. Fall: Der Grad des Polynoms im Zähler ist größer als der Grad des Polynoms im Nenner, d.h.

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0},$$

wobei $n > m$ $(m, n \in \mathbb{N})$ und $a_n, ..., a_0, b_m, ..., b_0 \in \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, && \text{falls } \frac{a_n}{b_m} > 0,\\
&\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, && \text{falls } \frac{a_n}{b_m} < 0,\\
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, && \text{falls } \frac{a_n}{b_m} \cdot (-1)^{(n-m)} > 0,\\
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, && \text{falls } \frac{a_n}{b_m} \cdot (-1)^{(n-m)} < 0.
\end{aligned}$$

2. Fall: Der Grad des Polynoms im Zähler ist kleiner als der Grad des Polynoms im Nenner, d.h.

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0},$$

wobei $n < m$ $(m, n \in \mathbb{N})$ und $a_n, ..., a_0, b_m, ..., b_0 \in \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

3. Fall: Der Grad des Polynoms im Zähler stimmt mit dem Grad des Polynoms im Nenner überein, d.h.

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_n, ..., a_0, b_n, ..., b_0 \in \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_n}.$$

Beispiel 2.7.

a) Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{18x^6 - 2x^2 - 7}{6x^5 - 2x^2 + 8} = \infty,$$

da der Grad des Polynoms im Zähler größer als der Grad des Polynoms im Nenner ist und $\frac{18}{6} > 0$ (1. Fall).

b) Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{17x^3 + 6x - 12}{13x^4 - 18} = 0,$$

da der Grad des Polynoms im Zähler kleiner als der Grad des Polynoms im Nenner ist (2. Fall).

c) Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^4 - 2x^2 - 7}{3x^4 + 6x^3 - 12} = \frac{6}{3} = 2,$$

da der Grad des Polynoms im Zähler gleich dem Grad des Polynoms im Nenner ist (3. Fall).

Bemerkung 2.8 (Grenzwerte von Exponentialfunktion und Logarithmus)**.** Für die Exponentialfunktion und den natürlichen Logarithmus gelten die folgenden Aussagen.

a) $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$.

b) $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

c) $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$.

d) $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

Nun bleibt die Frage offen, wie man den Grenzwert einer Funktion bestimmt, die aus einem Polynom und der Exponentialfunktion bzw. dem natürlichen Logarithmus zusammengesetzt ist. Im folgenden Beispiel werden Regeln für solche Grenzwertbetrachtungen formuliert.

Beispiel 2.9. Wir stellen uns die Frage, was der Grenzwert von

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x^4 + x^2 - 6}$$

für $x \to \infty$ ist. Die Frage lässt sich auf den ersten Blick nicht einfach beantworten denn der Term

$$\frac{1}{x^4 + x^2 - 6}$$

geht für $x \to \infty$ gegen 0, während e^x gegen ∞ strebt. In diesem Fall "gewinnt" die Exponentialfunktion gegen die rationale Funktion, d.h. für den Grenzwert für $x \to \infty$ ist nur die Exponentialfunktion relevant. Es gilt also

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^4 + x^2 - 6} = \infty.$$

Allgemein gilt: "Exponentiale schlagen Potenzen" in der Grenzwertbetrachtung. Mit derselben Begründung gilt

$$\lim_{x\to\infty} (x^4 + x^2 - 6) \cdot \mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Für den natürlichen Logarithmus sieht es etwas anders aus. Wir betrachten die Funktion

$$x \cdot \ln(x)$$

für $x \to 0$. Auch hier lässt sich auf den ersten Blick nicht sagen was der Grenzwert ist, denn der Term x geht für $x \to 0$ gegen 0, während $\ln(x)$ für $x \to 0$ gegen $-\infty$ strebt. In diesem Fall "gewinnt" jedoch der Term x gegen den natürlichen Logarithmus. Es gilt also

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \ln(x) = 0.$$

Allgemein gilt: "Potenzen schlagen Logarithmen" bei der Grenzwertbetrachtung. Das gleiche Argument liefert

$$\lim_{x\to\infty} 2 + \frac{\ln(x)}{x^3} = 2.$$

2.1 Definitionslücken

In diesem Abschnitt werden wir uns das Verhalten von Funktionen um Definitionslücken anschauen und Definitionslücken in zwei Typen unterteilen. Wir beginnen dazu mit einem Beispiel.

Beispiel 2.10. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

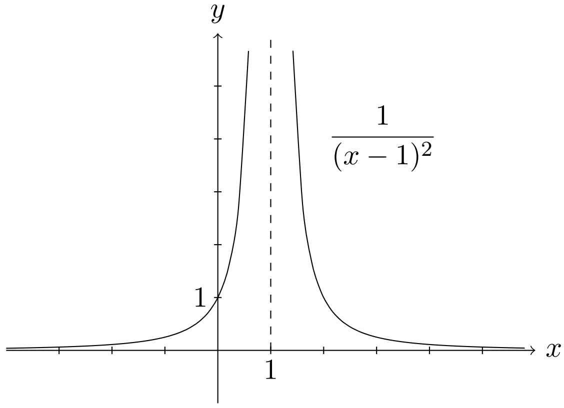

Abbildung 18: Ein Beispiel für einen Graphen mit Polstelle.

Die Funktion ist an der Stelle 1 nicht definiert. Daher interessieren wir uns für das Verhalten der Funktion um diese Definitionslücke. Anhand des Graphen können wir sehen, dass die Funktion sowohl rechts, als auch links von der Definitionslücke immer größer wird, je näher wir an die Stelle 1 kommen. Eine Definitionslücke dieser Art bezeichnen wir als *Polstelle* und wir schreiben in diesem Fall $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$.

Eine Definitionslücke muss jedoch nicht immer eine Polstelle sein, wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel 2.11. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x-1)}{(x-1)}$. Man sieht schnell ein, dass man den Bruch für alle Werte im Definitionsbereich kürzen kann und die Funktion daher konstant 1 ist. In diesem Fall ist die Definitionslücke nur eine *Lücke im Graph* und keine Polstelle. Der Graph ist um die Definitionslücke konstant 1, sodass $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

Anhand des Graphen kann man stets ablesen, ob eine Definitionslücke eine Polstelle oder nur eine Lücke im Graph ist. Anhand der Funktionsvorschrift lässt sich dies aber nicht immer sofort ablesen, wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel 2.12.

a) Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$

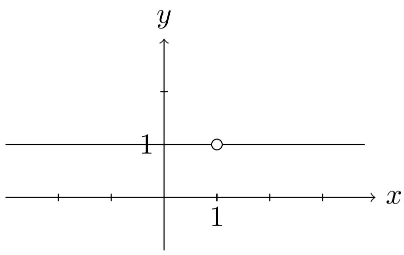

Abbildung 19: Ein Beispiel für einen Graphen mit einer Lücke.

hat an der Stelle 3 eine Lücke im Graph, denn es gilt

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+2) = 3 + 2 = 5.$$

b) Die Funktion

$$g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$$

hat an der Stelle -1 eine Lücke im Graph, denn es gilt

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-2)(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-2) = -1 - 2 = -3.$$

c) Die Funktion

$$h(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2}$$

hat an der Stelle 1 eine Polstelle, denn

$$\lim_{x\to 1} x^2 + 2x + 1 = 4$$

und

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty,$$

sodass die Funktion h für Werte nahe bei 1 beliebig groß wird, also

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2} = \infty.$$

3 Differentialrechnung

Die *Differentialrechnung* beschäftigt sich mit der Steigung von Funktionen in einem Punkt. Wir motivieren den Begriff mit einem einführenden Beispiel. Dazu sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

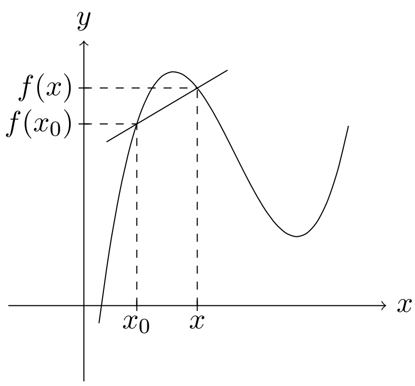

Abbildung 20: Die durchschnittliche Steigung eines Graphen zwischen zwei Punkten.

Durch

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

wird die durchschnittliche Steigung von f zwischen x_0 und x beschrieben. Lässt man nun x_0 fest und x gegen x_0 laufen, so erhält man die Steigung von f im Punkt x_0. Falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

existiert, so nennen wir die Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar und nennen $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ die *Ableitung von f*.

Bemerkung 3.1.

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ eine konstante Funktion. Dann gilt

$$f'(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = m \cdot x + b$. Dann gilt

$$g'(x) = m$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Es sei $h : D \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^\alpha$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt

$$h'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

für alle $x \in D$ und $n \in \mathbb{R}$.

Beispiel 3.2.

a) Sei $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Dann gilt

$$g'(x) = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

b) Sei $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $h(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$. Dann gilt

$$h'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2 \cdot x^{1/2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}.$$

Wir kennen nun Regeln um Potenzen abzuleiten. Doch wie leiten wir Funktionen ab, die sich nicht als Potenzen darstellen lassen? Die folgende Bemerkung beantwortet diese Frage in einigen speziellen Fällen.

Bemerkung 3.3. Es gelten die folgenden Aussagen.

a) $\sin'(x) = \cos(x)$.

b) $\cos'(x) = -\sin(x)$.

c) $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

d) $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Wie sieht es nun aber mit Funktionen aus, die als Summe/Produkt/Quotient von Funktionen zusammengesetzt sind? Im folgenden Abschnitt lernen wir Formeln kennen, mit deren Hilfe wir solche Funktionen ableiten können.

3.1 Rechenregeln für Ableitungen

Bemerkung 3.4 (Linearität)**.** Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$
$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

für alle $x \in (a,b)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beispiel 3.5. Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = 2x^2 + 6x$$

lässt sich schreiben als

$$h(x) = 2 \cdot f(x) + 6 \cdot g(x),$$

wobei $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$. Mit der obigen Regel folgt also für die Ableitung von h

$$h'(x) = 2 \cdot f'(x) + 6 \cdot g'(x) = 2 \cdot (2x) + 6 \cdot 1 = 4x + 6.$$

Bemerkung 3.6 (Produktregel)**.** Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

für alle $x \in (a,b)$.

Beispiel 3.7. Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

lässt sich schreiben als

$$h(x) = f(x) \cdot g(x),$$

wobei $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$. Mit der Produktregel folgt also für die Ableitung von h

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) = \sin^2(x) - \cos^2(x).$$

Bemerkung 3.8 (Quotientenregel)**.** Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Beispiel 3.9. Die Funktion $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

lässt sich schreiben als

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

wobei $f(x) = x^2+1$ und $g(x) = x-1$. Mit der Quotientenregel folgt also für die Ableitung von h

$$h'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

Bemerkung 3.10 (Kettenregel)**.** Seien $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ und $g : (a,b) \to (c,d)$ differenzierbar. Dann gilt

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

für alle $x \in (a,b)$, wobei

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)).$$

Beispiel 3.11. Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \exp(x^3 - 1)$$

lässt sich schreiben als

$$h(x) = f(g(x)),$$

wobei $f(x) = \exp(x)$ und $g(x) = x^3 - 1$. Mit der Kettenregel folgt also für die Ableitung von h

$$h'(x) = \exp(x^3 - 1) \cdot 3x^2.$$

3.2 Bestimmung von Tangenten an einen Graph

In diesem Abschnitt möchten wir für eine differenzierbare Funktion die Tangente in einem bestimmten Punkt berechnen.

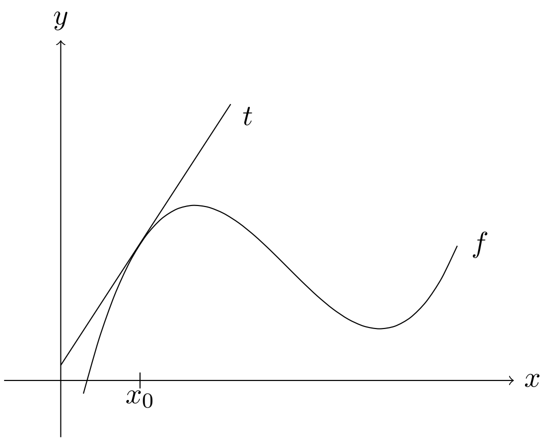

Abbildung 21: Die Tangente an einen Graphen im Punkt x_0.

Sei dazu $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_0 \in (a, b)$. Eine Tangente ist eine Gerade und hat daher die Form $t(x) = m \cdot x + b$. Wir möchten nun m und b so wählen, dass t eine Tangente an f im Punkt x_0 ist. Die gesuchte Tangente erfüllt die Bedingung

$$m = f'(x_0),$$

denn die Tangente und die Funktion haben im Punkt x_0 die gleiche Steigung. Ferner gilt

$$t(x_0) = f(x_0), \tag{1}$$

da die Tangente und die Funktion sich im Punkt x_0 berühren. Aus (1) folgt

$$m \cdot x_0 + b = f(x_0),$$

sodass

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Die Tangente von f im Punkt x_0 ist also gegeben durch die Formel

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + \big(f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0\big).$$

Beispiel 3.12. Wir berechnen die Tangente der Funktion $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$ im Punkt $x_p = \frac{2}{3}$. Die Ableitung von f ist gegeben durch

$$f'(x) = 9x^2 - 4x + 1.$$

Daher ist

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3}.$$

Ferner gilt

$$f\left(\frac{2}{3}\right) - f'\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{8}{9}.$$

Damit ist die Tangente von f im Punkt x_p gegeben durch

$$t(x) = \frac{7}{3}x - \frac{8}{9}.$$

3.3 Minima und Maxima von Funktionen bestimmen

In diesem Teilabschnitt möchten wir uns mit der Frage nach *Extrema* von Funktionen beschäftigen. Was sind Extrema einer Funktion und wie findet man diese? Um diese Frage zu beantworten schauen wir uns zunächst ein einführendes Beispiel an.

Beispiel 3.13. Wir betrachten den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2.$$

Anhand des Graphen können wir ablesen, dass die Funktion an der Stelle $x = 0$ ein *lokales Maximum* bzw. einen *Hochpunkt* mit Funktionswert 2 hat. Das bedeutet, dass der Funktionswert 2 in einer Umgebung um die Stelle $x = 0$ der größte Funktionswert von f ist. Weiterhin kann man am Graphen ablesen, dass die Funktion an der Stelle $x = 2$ ein *lokales Minimum* bzw. einen *Tiefpunkt* mit Funktionswert 0 hat. Das bedeutet, dass der Funktionswert 0 in einer Umgebung um die Stelle $x = 2$ der kleinste Funktionswert von f ist.

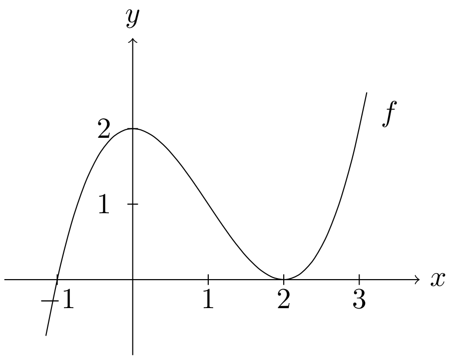

Abbildung 22: Der Graph der Funktion f.

Extrema sind also Minima (Tiefpunkte) oder Maxima (Hochpunkte) von Funktionen. Wie findet man aber im Allgemeinen Minima und Maxima einer gegebenen Funktion? Der folgende Satz liefert ein Kriterium um solche Stellen zu finden.

Satz 3.14. Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und $x_0 \in (a, b)$ ein Punkt mit der Eigenschaft

$$f'(x_0) = 0.$$

Falls

$$f''(x_0) > 0,$$

so ist x_0 ein *lokaler Minimierer* und $f(x_0)$ ein lokales Minimum von f. Ist

$$f''(x_0) < 0,$$

so ist x_0 ein *lokaler Maximierer* und $f(x_0)$ ein lokales Maximum von f. Im Fall

$$f''(x_0) = 0$$

lässt sich im Allgemeinen keine Aussage treffen.

Wir haben nun also ein Verfahren um lokale Minima und Maxima einer differenzierbaren Funktion f zu bestimmen. Dabei sucht man zunächst einen Punkt x_0 mit der Eigenschaft $f'(x_0) = 0$. Anschließend berechnet man die zweite Ableitung f'' und wertet diese im Punkt x_0 aus um zu entscheiden ob $f(x_0)$ ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum ist.

Bemerkung 3.15. In manchen Fällen ist es umständlich die zweite Ableitung zu berechnen. Statt diese zu berechnen und auszuwerten, kann man auch Untersuchen, wie sich die erste Ableitung um die gefundene Nullstelle verhält. Falls die erste Ableitung f' in x_0 einen Vorzeichenwechsel von '$+$' zu '$-$ hat, so ist x_0 ein lokaler Maximierer. Falls f' in x_0 einen Vorzeichenwechsel von '$-$' zu '$+$ hat, so ist x_0 ein lokaler Minimierer.

Beispiel 3.16. Wir suchen das lokale Minimum von $f : (0, 5) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x.$$

Dazu berechnen wir zunächst die Ableitung von f. Es gilt

$$f'(x) = 12x^2 - 30x + 12.$$

Wir suchen nun ein $x_0 \in (0,5)$ mit der Eigenschaft $f'(x_0) = 0$, also:

$$\begin{aligned}
& & 12x_0^2 - 30x_0 + 12 &= 0 & &| : 12 \\
&\Leftrightarrow & x_0^2 - \frac{5}{2}x_0 + 1 &= 0 & &| - 1 \\
&\Leftrightarrow & x_0^2 - \frac{5}{2}x_0 &= -1 & &| + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow & x_0^2 - \frac{5}{2}x_0 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 &= -1 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 & & \\
&\Leftrightarrow & \left(x_0 - \frac{5}{4}\right)^2 &= \frac{9}{16} & &|\sqrt{} \\
&\Rightarrow & x_0 - \frac{5}{4} &= \pm\frac{3}{4} & & \\
&\Rightarrow & x_0 = 2 \quad \text{oder} \quad x_0 &= \frac{1}{2} & &
\end{aligned}$$

Wir prüfen nun ob 2 oder $\frac{1}{2}$ Minimierer sind. Dazu berechnen wir die zweite Ableitung. Es gilt

$$f''(x) = 24x - 30.$$

Wir werten die zweite Ableitung nun in den Punkten 2 und $\frac{1}{2}$ aus. Es gilt

$$f''(2) = 18 > 0,$$

sodass 2 ein lokaler Minimierer ist. Weiterhin gilt

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -18 < 0,$$

sodass $\frac{1}{2}$ ein lokaler Maximierer ist. Damit ist ein lokales Minimum von f gegeben durch $f(2) = -4$.

4 Integralrechnung

Die *Integralrechnung* beschäftigt sich mit der Berechnung von Flächen, die von Graphen eingeschlossen werden. Wir werden in diesem Kapitel Verfahren kennenlernen, mit deren Hilfe wir das Maß der Fläche bestimmen können, die von zwei Graphen eingeschlossen werden. Dazu beginnen wir mit der Definition einer *Stammfunktion*.

Definition 4.1. Für eine gegebene Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ nennen wir eine differenzierbare Funktion $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in (a, b)$ eine *Stammfunktion* von f. Wir schreiben dafür auch

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel 4.2.

a) Es gilt
$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$$
für alle $n \neq -1$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

b) Es gilt
$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|) + c,$$
wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

c) Es gilt
$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c,$$
wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

Bemerkung 4.3 (Rechenregeln für Stammfunktionen)**.** Für integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Um nun Flächeninhalte berechnen zu können, die von Graphen von Funktionen eingeschlossen werden, benötigen wir den folgenden *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*.

Satz 4.4 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Beispiel 4.5. Wir möchten das Integral

$$\int_{-2}^{3} (6x^2 - 4x + 2)\,\mathrm{d}x$$

auswerten. Zunächst bemerken wir, dass

$$F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x$$

eine Stammfunktion von

$$f(x) = 6x^2 - 4x + 2$$

ist. Mit dem Hauptsatz können wir nun das Integral auswerten und wir erhalten

$$\int_{-2}^{3} (6x^2 - 4x + 2)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(-2) = 42 - (-28) = 70.$$

Bemerkung 4.6. Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $c \in (a, b)$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4.1 Flächenberechnung

Wir interessieren uns im Folgenden für den Flächeninhalt von Flächen, die vom Graph einer Funktion f mit der x-Achse eingeschlossen werden.

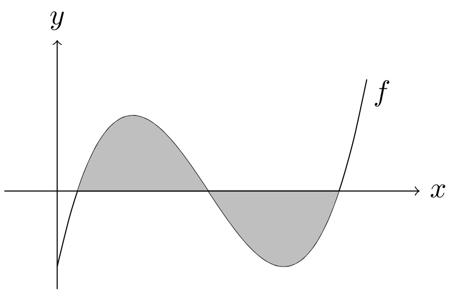

Abbildung 23: Die Fläche(n), die ein Graph mit der x-Achse einschließt.

Solche Flächeninhalte lassen sich mithilfe von Integralen berechnen, wie wir im nächsten Beispiel sehen werden.

Beispiel 4.7. Wir möchten den Flächeninhalt der Fläche berechnen, die der Graph von

$$f(x) = -x^2 + 1$$

mit der x-Achse einschließt.

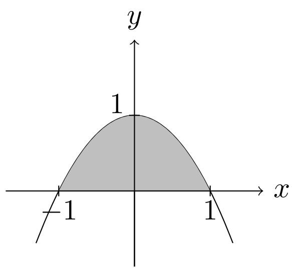

Abbildung 24: Die Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

Offenbar schließt der Graph von f im Intervall $[-1, 1]$ eine Fläche mit der x-Achse ein. Der Flächeninhalt ist in diesem Fall gegeben durch

$$\left|\int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1}\right| = \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}.$$

Der Flächeninhalt einer Fläche, die ein Graph mit der x-Achse einschließt, lässt sich jedoch nicht immer so berechnen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.8. Wir möchten den Flächeninhalt der Fläche berechnen, die der Graph der Funktion $f(x) = x^3$ im Intervall $[-1, 1]$ mit der x-Achse einschließt.

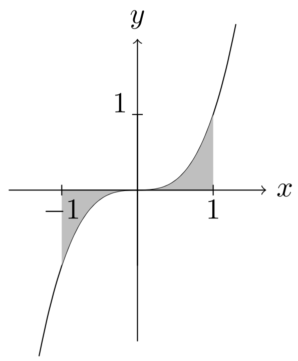

Abbildung 25: Die Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

Versuchen wir nun die Fläche mit dem gleichen Ansatz wie oben zu berechnen, so erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} x^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = 0.$$

Obwohl der Graph eine Fläche einschließt, erhalten wir beim Auswerten des Integrals 0. Das Problem hier ist die Tatsache, dass ein Teil der Fläche über und ein Teil der Fläche unter der x-Achse liegen. Dieses Problem lässt sich beheben indem man nur "zusammenhängende" Flächeninhalte auf diese Weise berechnet und anschließend die Beträge der Ergebnisse addiert. Wir berechnen also

$$\int_{-1}^{0} x^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4},$$
$$\int_{0}^{1} x^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4}.$$

Nun ist die Fläche, die der Graph von f im Intervall $[-1, 1]$ mit der x-Achse einschließt gegeben durch

$$A = \left|-\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung 4.9. Möchte man den Flächeninhalt der Fläche berechnen, die eine gegebene Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ mit der x-Achse einschließt, so bestimmt man zunächst alle Nullstellen von f in $[a, b]$. Anschließend integriert man die Funktion f auf den Teilintervallen, die durch die Nullstellen getrennt sind. Die Fläche ist dann gegeben durch die Summe der Beträge der berechneten Integrale.

Wir wissen nun wie man im Allgemeinen den Flächeninhalt einer Fläche berechnet, die eine Funktion mit der x-Achse einschließt. Im Folgenden interessieren wir uns für Flächen, die von Graphen von zwei Funktionen eingeschlossen werden.

Beispiel 4.10. Wir möchten den Flächeninhalt der Fläche berechnen, die von den Graphen der Funktionen

$$f(x) := x^2$$
$$g(x) := 2x + 3$$

eingeschlossen wird, wobei $f(-1) = g(-1)$ und $f(3) = g(3)$.

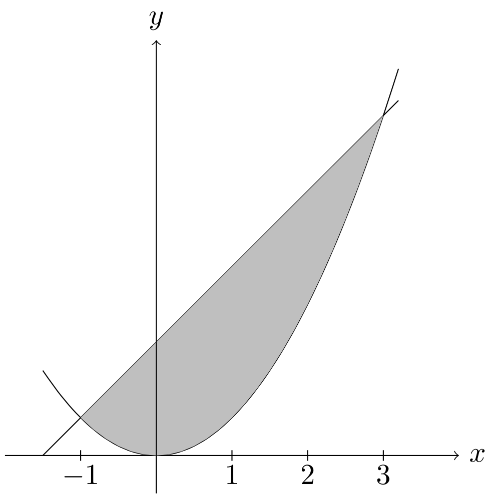

Abbildung 26: Die Fläche, die die Graphen von f und g einschließen.

Um diese Fläche zu berechnen definieren wir uns die *Differenzfunktion*

$$h(x) := f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 3.$$

Diese Funktion gibt uns in jedem Punkt x genau den Abstand der Graphen von f und g in y-Richtung. Der Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche ist nun der Betrag des

Integrals von h im Intervall $[-1, 3]$. Der Flächeninhalt ist also

$$\left|\int_{-1}^{3} h(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{-1}^{3} x^2 - 2x - 3\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3}\right| = \left|-\frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3}.$$

Bemerkung 4.11. Der Flächeninhalt einer Fläche die von zwei Funktionen eingeschlossen wird lässt sich stets mithilfe der Differenzfunktion berechnen. Auch hier integriert man die Differenzfunktion wieder "von Nullstelle zu Nullstelle".