Geometrie

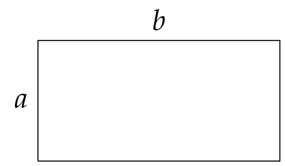
26. Juni 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Zweidimensionale Geometrie

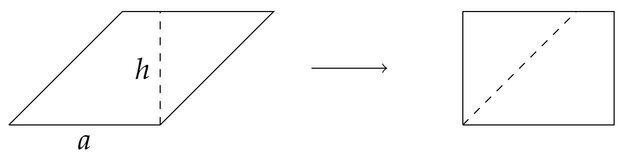
In diesem Kapitel wollen wir uns mit einigen einfachen geometrischen Formen beschäftigen und ihre Flächeninhalte bzw. ihre Inhalte berechnen. Wir beginnen dabei im zweidimensionalen Fall und konzentrieren uns daher auf die Flächeninhalte der Figuren. Dabei untersuchen wir hauptsächlich einfache Figuren, deren Flächeninhalt man direkt angeben kann. Komplizierte Figuren müssen dann aus diesen zusammengesetzt werden, um dort den Flächeninhalt zu berechnen.

Beispiele 1.1
Sei M ein Rechteck gegeben mit den Seitenlängen a und b, dann ist der Flächeninhalt (oft wegen dem englischen „Area" A genannt) von M gegeben durch $A = ab$.



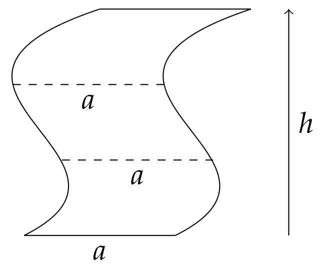
$A = ab$

Ähnlich lässt sich der Flächeninhalt eines Parallelogramms berechnen: Ist M ein Parallelogramm mit Grundseite a und Höhe h, so berechnet sich der Flächeninhalt durch Abschneiden einer Ecke und Zusammenkleben zu einem Rechteck zu $A = ah$.



$A = ah$

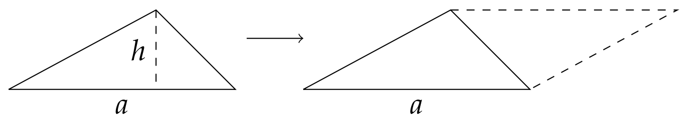
Das Beispiel des Parallelogramm weißt auf ein allgemeineres Prinzip hin, das *Prinzip von Cavalieri*. Es besagt, dass bei einer gegebenen Höhe h und Grundfläche a jede Figur den Flächeninhalt $A = ah$ hat, wenn jeder vertikale Querschnitt der Figur ebenfalls die Länge a hat.



Prinzip von Cavalieri liefert $A = ah$

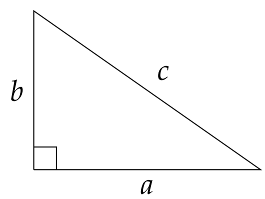
Hier sollte erwähnt werden, dass es in diesen Fällen natürlich immer darauf ankommt, die Höhe der Figur und nicht die Länge der Seiten zu kennen. Kennt man lediglich die Seiten, so ist es meist aufwändiger den Flächeninhalt einer solchen Figur zu bestimmen.

Dies beendet bereits unsere Betrachtung der Vierecke, jetzt wollen wir uns den Dreiecken widmen. Ist eine Seite a und die Höhe h des Dreiecks bezüglich dieser Seite bekannt, so lässt sich der Flächeninhalt des Dreiecks durch Erweiterung zu einem Parallelogramm berechnen. Wir erhalten dann als Flächeninhalt $A = \frac{ah}{2}$. Sind statt der



$A = \frac{ah}{2}$

Höhe des Dreiecks weitere Seiten bekannt, so kann der Flächeninhalt bei Kenntnis einiger Winkel des Dreiecks berechnet werden. Auf diese Möglichkeiten wollen wir hier allerdings nicht eingehen. Einen Spezialfall von Dreiecken wollen wir allerdings noch untersuchen, die *rechtwinkligen* Dreiecke. Diese haben einen rechten Winkel, also einen Winkel, der genau 90° beträgt. Eine der Seiten (b) steht also orthogonal auf einer der anderen (a), sodass b auch eine Höhe des Dreiecks ist.



$A = \frac{ab}{2}$

In solchen Dreiecken haben wir eine einfache Möglichkeit, aus der Länge zweier Seiten die Länge der dritten zu bestimmen. Hier gilt nämlich der berühmte *Satz des Pythagoras*:

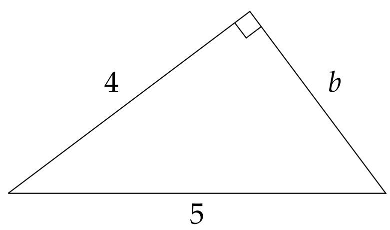
Satz 1.2 (Pythagoras)
In einem rechtwinkligen Dreieck gilt folgende Gleichung der Seitenlängen a, b, c:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Hierbei ist c die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt.

So können wir also durch Auflösen der Gleichung nach einer Seitenlänge jede Seite aus den beiden anderen berechnen. Insbesondere können wir so den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen, auch wenn die Höhe des Dreiecks nicht bekannt ist.

Beispiel 1.3
Wir berechnen den Flächeninhalt des folgenden rechtwinkligen Dreiecks:



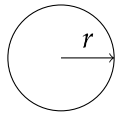
Zunächst berechnen wir mit Hilfe des Satzes des Pythagoras die fehlende Seite b:

$$\begin{aligned} b^2 + 4^2 = 5^2 &\Leftrightarrow b^2 + 16 = 25 \\ &\Leftrightarrow b^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow b = 3 \end{aligned}$$

Dann berechnet sich der Flächeninhalt zu

$$A = \frac{ab}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

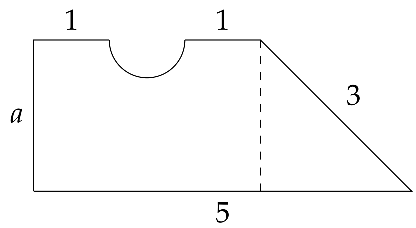
Als letzte grundlegende zweidimensionale Figur wollen wir noch den Kreis betrachten. Die meisten Figuren lassen sich dann aus den besprochenen Formen zusammensetzen und so nacheinander berechnen. Ein Kreis mit Radius r (bzw. Durchmesser $2r$) besitzt den Flächeninhalt $A = \pi r^2$; hier bezeichnet $\pi \approx 3,141529\ldots$ die *Kreiszahl*.



$$A = \pi r^2$$

Wir wollen hier nicht die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises herleiten, dafür bräuchten wir auch eine genauere Definition von π. Stattdessen betrachten wir ein Beispiel einer komplexeren Form, die sich aus vorigen zusammensetzen.

Beispiel 1.4
Wir berechnen den Flächeninhalt der folgenden Figur:



Wir zerlegen die Form an der gestrichelten Linie in ein Rechteck $\square$ und ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle$. Dann ziehen wir die Fläche des Halbkreises $\smile$ ab und erhalten die Fläche der gesamten Figur. Wir beginnen mit dem Dreieck: Ähnlich wie oben berechnen wir mit dem Satz des Pythagoras die Länge der unteren Seite $\sqrt{3^2 - a^2} = \sqrt{9 - a^2}$ und erhalten damit als Flächeninhalt:

$$A(\triangle) = \frac{a\sqrt{9 - a^2}}{2}.$$

Die untere Seite des Rechtecks hat damit Länge $5 - \sqrt{9 - a^2}$ und damit ist

$$A(\square) = 5a - a\sqrt{9 - a^2}.$$

Schließlich erhalten wir für den Halbkreis einen Durchmesser von $5 - \sqrt{9 - a^2} - 2 = 3 - \sqrt{9 - a^2}$ und somit hat der Halbkreis den Radius $\frac{\sqrt{9-a^2}}{2}$. Damit berechnet sich der Flächeninhalt zu

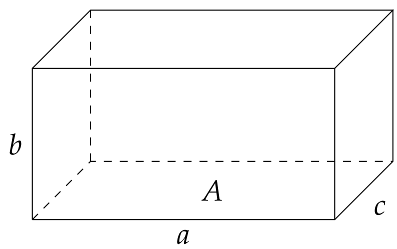
$$A(\smile) = \frac{\pi \left(\frac{3 - \sqrt{9-a^2}}{2}\right)^2}{2}.$$

Insgesamt erhalten wir also insgesamt für den Flächeninhalt A der gesamten Figur:

$$A = A(\triangle) + A(\square) - A(\smile) = 5a - \frac{a\sqrt{9-a^2}}{2} - \frac{\pi\left(\frac{3-\sqrt{9-a^2}}{2}\right)^2}{2}.$$

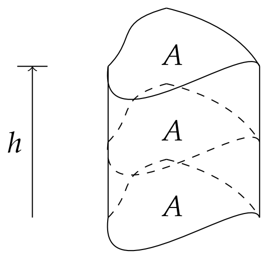
2 Dreidimensionale Geometrie

Wir wollen uns nun mit dreidimensionalen Figuren und ihrem Volumen beschäf-tigen. Das Volumen dieser Figuren bezeichnen wir häufig mit V. Für einen Quader mit den Kantenlängen a, b, c gilt dann: $V = abc$ Dies können wir auch erhalten durch Multiplizieren der Grundfläche des Quaders $A = ac$ mit der Höhe b. Hier sieht man, dass



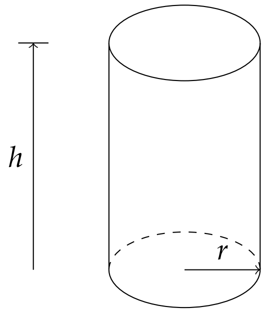
$V = abc$

jeder Querschnitt des Quaders wieder die Grundfläche A hat. Wir erhalten also eine dreidimensionale Form des *Prinzips von Cavalieri*: Haben wir eine Figur gegeben mit einer Grundfläche A und einer Höhe h und hat jeder Querschnitt der Figur ebenfalls Fläche A, so ist das Volumen des Körpers $V = Ah$:



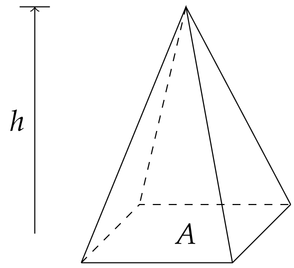
Prinzip von Cavalieri liefert: $V = Ah$

Können wir also für eine Figur die Höhe und die Fläche der Grundfläche bestimmen (mit den Methoden des vorigen Abschnitts), so lässt sich mit dem Prinzip von Cavalieri das Volmen bestimmen. Zum Beispiel errechnet sich so das Volumen eines Zylinders mit Höhe h und Radius r zu $V = \pi r^2 h$.



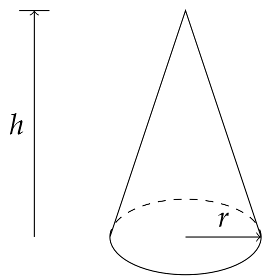
$$V = \pi r^2 h$$

Ein weiterer Körper den wir uns anschauen wollen, ist die *Pyramide*. Diese muss im Allgemeinen keine quadratische Grundfläche haben; solange alle Kanten in einer bestimmten Höhe zusammenlaufen zu einer Spitze, können wir das Volumen einer solchen Pyramide direkt angeben als $V = \frac{1}{3}Ah$, hierbei ist h die Höhe der Pyramide und A der Flächeninhalt der Grundfläche.



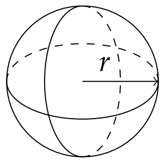
$$V = \frac{1}{3}Ah$$

Diese Formel gilt also für *alle* Pyramiden, egal, wie genau die Grundfläche aussieht. Zum Beispiel beträgt also das Volumen eines Kegels (eine spezielle Pyramide mit einem Kreis als Grundfläche) mit unterem Radius r und Höhe h: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Als letztes geben wir noch die Volumenformel für die Kugel an; hier auch wieder ohne Beweis: Für eine Kugel mit Radius r gilt: Das Volumen V der Kugel beträgt $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Mit diesen grundlegenden Körpern und Flächen lassen sich viele Flächeninhalte und Volumina von auch komplexeren Körpern bestimmen, indem man diese in behandelte Figuren oder Teile davon unterteilt.