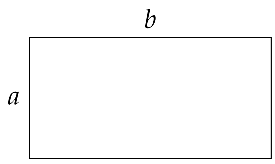
الهندسة

١. الهندسة ثنائية الأبعاد

في هذا الفصل نريد التعرف على بعض الأشكال الهندسية وطرق حساب مساحتها. سنركز بشكل رئيسي على الأشكال ثنائية الأبعاد البسيطة التي يمكن حساب مساحتها بشكل مباشر. سيسهل علينا حينها حساب مساحة الأشكال الأكثر تعقيدا حيث تكون هذه الأشكال مؤلفة من مجموعة من الأشكال البسيطة .

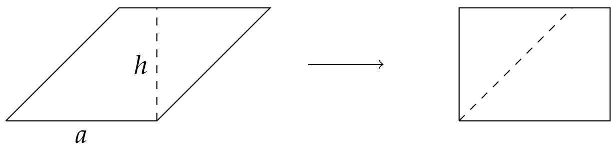
أمثلة ١.١

ليكن M مستطيل طول أضلاعه a و b، عندها تعطى مساحة هذا المستطيل بالعلاقة $A = ab$ (A من الكلمة الإنكليزية Area).



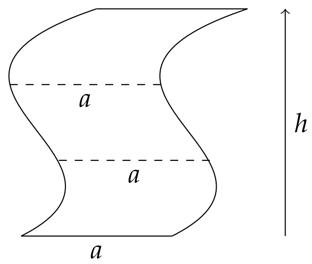
$$A = ab$$

بشكل مشابه يمكن حساب مساحة متوازي الأضلاع: على اعتبار M متوازي أضلاع طول ضلعه الأسفل a وله الإرتفاع h، تحسب المساحة بقصّ الزاوية وإعادة تجميعها لتشكيل مستطيل. فتكون المساحة $A = ah$.



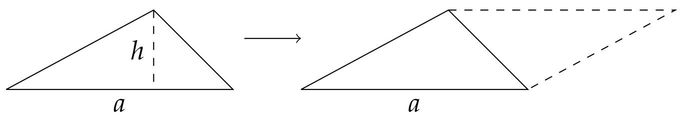
$$A = ah$$

يوضح لنا مثال متوازي الأضلاع مبدأً عاماً، وهو مبدأ كافاليري (eng. Cavalieri's Principle). هذا المبدأ ينص على أن مساحة أي شكل له الإرتفاع h والقاعدة a تعطى بالعلاقة $A = ah$، إذا كان طول أي مقطع عرضي لهذا الشكل أيضا a.



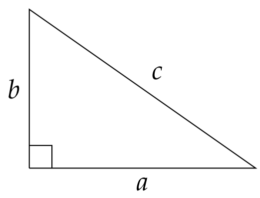
انطلاقاً من مبدأ كافاليري $A = ah$

من الجدير هنا بالذكر، أنه في هذه الحالات طبعا من الضروري معرفة إرتفاع الشكل وليس طول أضلاعه. إذا عرف فقط طول أضلاع الشكل، فسيتطلب حساب مساحته مجهودا أكبر.
هذا ينهي دراستنا للأشكال رباعية الأضلاع، سنبدأ الأن بمعاينة المثلثات. إذا عرف لمثلث طول ضلعه a والإرتفاع h المتعلق به، يمكن عندها حساب مساحة هذا المثلث عن طريق توسيعه إلى متوازي أضلاع. تعطى المساحة بالعلاقة $A = \frac{ah}{2}$. إذا عرف للمثلث بدلاً من إرتفاعه أطوال أضلاع أخرى، يمكن عندها حساب مساحته بمعرفة بعض زواياه.



$$A = \frac{ah}{2}$$

لكننا لن نتطرّق لهذه الحالة هنا. حالة خاصة سنتطرق إليها على أية حال، هي المثلثات قائمة الزاوية. هذه المثلثات لها زاوية قائمة $90°$. أحد أضلع المثلث قائم الزاوية (b) يعامد أحد الأضلاع الأخرى (a)، حيث أن الضلع b هو أيضا إرتفاع لهذا المثلث.



$$A = \frac{ab}{2}$$

في هذا النوع من المثلثات يمكننا بسهولة عند معرفة طول ضلعين حساب طول الضلع الثالث، نحتاج عندها فقط لتطبيق نظرية فيثاغورث الشهيرة:

نظرية ١.٢ (فيثاغورث)
في مثلث قائم الزاوية تتحقق معادلة أطوال الأضلاع a, b, c التالية:

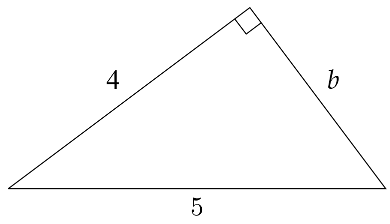
$$a^2 + b^2 = c^2$$

هنا تكون c وتر المثلث (الضلع المقابلة للزاوية القائمة).

هكذا يمكننا بحل هذه المعادلة بعد تعويض طول أي ضلعين معرفة طول الضلع الثالثة. يمكننا بشكل خاص حساب مساحة مثلث قائم مجهول الإرتفاع.

مثال ١.٣

لنقوم بحساب مساحة المثلث التالي:



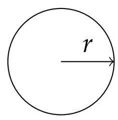
بداية نقوم بالإعتماد على نظرية فيثاغورث بحساب الضلع b:

$$\begin{aligned} b^2+4^2=5^2 &\Leftrightarrow b^2+16=25 \\ &\Leftrightarrow b^2=9 \\ &\Leftrightarrow b=3 \end{aligned}$$

بعدها نحصل على المساحة كالتالي:

$$A=\frac{ab}{2}=\frac{12}{2}=6.$$

أخر شكل ثنائي الأبعاد نود إلقاء الضوء عليه هي الدائرة، أما غالبية الأشكال المتبقية فيمكننا تبسيطها وحساب مساحاتها اعتماداً على المعادلات التي ناقشناها. تمثل المعادلة $A=\pi r^2$ مساحة دائرة لها نصف القطر r (أو القطر $2r$) حيث يعادل الرمز باي تقريبا $\pi \approx 3,141529\ldots$.

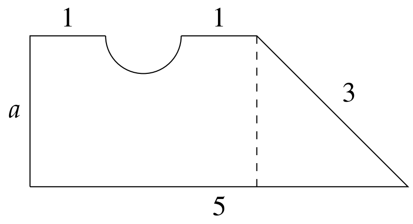


$$A=\pi r^2$$

لا نريد هنا استنتاج معادلة حساب المساحة لأن ذلك يتطلب تعريف π تعريفاً دقيقاً. سنلقي النظر بدلاً من ذلك على شكل أكثر تعقيداً يتألف من عدة أشكال بسيطة مألوفة.

مثال ١.٤

لنحاول حساب مساحة هذا الشكل:



نجزّء الشكل عند المستقيم المخطط إلى مستطيل ▭ ومثلث قائم الزاوية ◺. ثم نقوم بحساب المساحتين مع طرح مساحة

نصف الدائرة فنحصل على مساحة الشكل الكلية. لنبدأ مع المثلث: كما في الأعلى نقوم بمساعدة نظرية فيثاغورث بحساب طول الضلع السفلي $\sqrt{3^2 - a^2} = \sqrt{9 - a^2}$ فنحصل على المساحة كالتالي:

$$A(◺) = \frac{a\sqrt{9-a^2}}{2}.$$

طول الضلع السفلي إذاً $5 - \sqrt{9 - a^2}$، لذلك تكون مساحة المستطيل:

$$A(\square) = 5a - a\sqrt{9-a^2}.$$

نهاية نحصل على $5 - \sqrt{9-a^2} - 2 = 3 - \sqrt{9-a^2}$ كقطر لنصف الدائرة وبالتالي يكون نصف القطر $\frac{3-\sqrt{9-a^2}}{2}$. تحسب عندها المساحة كالتالي:

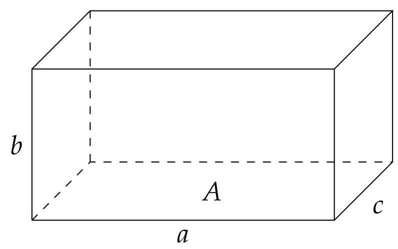
$$A(◡) = \frac{\pi\left(\frac{3-\sqrt{9-a^2}}{2}\right)^2}{2}.$$

بالمجمل تكون المساحة الكلية A للشكل:

$$A = A(◺) + A(\square) - A(◡) = 5a - \frac{a\sqrt{9-a^2}}{2} - \frac{\pi\left(\frac{3-\sqrt{9-a^2}}{2}\right)^2}{2}.$$

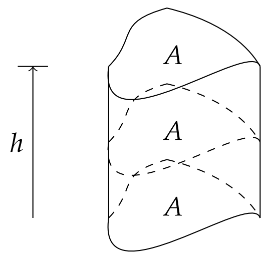
٢. الهندسة ثلاثية الأبعاد

سنطّلع الأن على الأشكال ثلاثية الأبعاد وأحجامها. يرمز غالبا لحجم هذه الأشكال ب V. من أجل متوازي مستطيلات طول حوافه a, b, c يتحقق: $V = abc$ هذه المعادلة يمكننا الحصول عليها أيضا من خلال ضرب مساحة القاعدة $A = ac$ بالإرتفاع b.



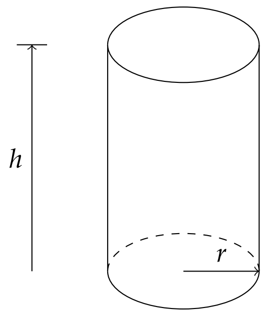
$$V = abc$$

هنا نلاحظ أن لكل مقطع عرضي لمتوازي المستطيلات هذا مساحة القاعدة A نفسها. أي أننا نحصل على صيغة ثلاثية الأبعاد من مبدأ كافاليري: إذا كان لشكل مساحة قاعدة A وإرتفاع h وكان لكل مقطع عرضي المساحة A نفسها، فيكون حجم هذا الشكل $V = Ah$:



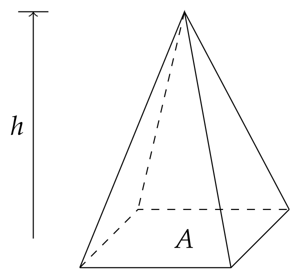
بالإعتماد على مبدأ كافاليري $V = Ah$

إذا استطعنا حساب إرتفاع ومساحة قاعدة جسم أو شكل ما (باستخدام الطرق السابقة)، عندها يمكننا حساب حجم هذا الشكل بالإعتماد على مبدأ كافاليري. على سبيل المثال يمكننا حساب حجم أسطوانة إرتفاعها h ونصف قطر قاعدتها r بالمعادلة $V = \pi r^2 h$.



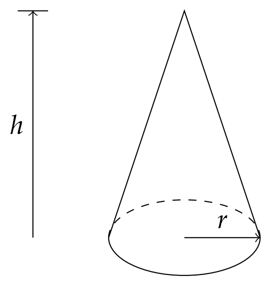
$V = \pi r^2 h$

جسم أخر نريد الإطّلاع عليه هو الهرم، هذا الجسم لا يملك بالضرورة قاعدة رباعية الأضلاع. طالما أن حواف الهرم تحافظ على طول مشترك معيّن إلى أن تجتمع بالذروة، نستطيع حساب حجم الهرم مباشرة عن طريق المعادلة $V = \frac{1}{3}Ah$، حيث h إرتفاع الهرم و A مساحة قاعدته.



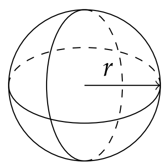
$V = \frac{1}{3}Ah$

تصلح هذه المعادلة إذا لأي هرم، بغض النظر عن شكل قاعدته. يبلغ مثلا حجم المخروط (هرم قاعدته دائرية) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$، حيث r نصف قطر القاعدة و h الإرتفاع.



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

أخيراً سنعطي معادله حساب حجم الكرة، ولكن مرة أخرى من دون إثبات: من أجل كرة نصف قطرها r يعادل الحجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

من خلال الأجسام والمساحات الأساسية التي سلّطنا الضوء عليها، يمكننا حساب العديد من مساحات وأحجام الأجسام الأكثر تعقيدا بعد أن نقوم بداية بتجزيئها إلى أشكال أكثر بساطةً.