كثيرات الحدود و نقاطها الحرجة

١٢ أغسطس ٢٠١٧

المحتويات

١ المقدّمة

في هذا الفصل نريد التعرف على نوع خاص من الدوال (التوابع)، ألا وهو كثيرات الحدود. هذا النوع يمتاز بسهولة التعامل معه حيث يمكننا أيضاً من خلاله القيام بعملية تقريب فئة كبيرة من التوابع. يهتم هذا الفصل بشكل خاص بالنقاط الحرجة لكثيرات الحدود.

تعريف ١.٠.١
نطلق على دالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة كثيرة الحدود، عندما تكون f من الشكل :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0$$

نطلق على الرقم n درجة الدالة f، a_n تدعى المعامل الرئيسي للدالة f و a_0 يدعى الحد الثابت. إذا كانت $a_n = 1$، نطلق على كثيرة الحدود أوليّة (eng. Monic Polynomial).
إذا كانت $f(a) = 0$ عندما $a \in \mathbb{R}$، نطلق على a النقطة الحرجة للدالة f.

أمثلة ١.٠.٢
بعض الأمثلة على كثيرات الحدود:

(i) لتكن $a \in \mathbb{R}$، $a \neq 0$ عندها تكون الدالة الثابتة

$$f(x) = a \quad \text{لأجل أي قيمة} \quad x$$

كثيرة حدود من الدرجة صفر ليس لها أي نقطة حرجة.

(ii) ليكن $n \in \mathbb{N}$ عدد طبيعي، عندها تكون الدالة

$$f(x) = x^n$$

كثيرة حدود من الدرجة n لها نقطة حرجة وحيدة 0. كما تدعى f في هذه الحالة أيضا دالة أحادية الحد من الدرجة n.

(iii) الدالة

$$f(x) = x^2 - 1$$

هي دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية لها نقطتين حرجتين ± 1.

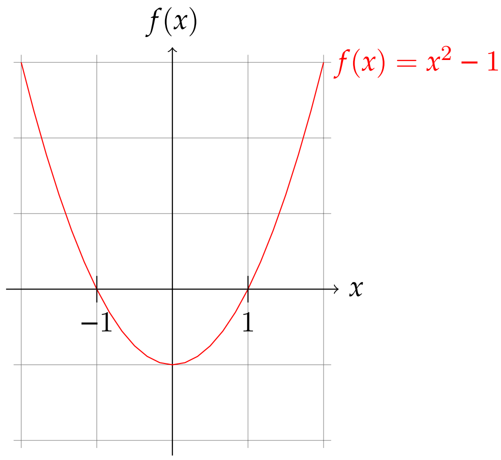
(iv) الدالة

$$f(x) = x^2 + 1$$

هي دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية ليس لها نقاط حرجة حقيقية، أي أنه لا توجد $a \in \mathbb{R}$ تحقّق المعادلة $f(a) = 0$.

ملاحظة ١.٠.٣

النقاط الحرجة لكثيرات الحدود هي النقاط التي تتقاطع فيها كثيرة الحدود مع المحور x.



شكل ١: الرسم البياني للدالة كثيرة الحدود $x^2 - 1$ تتقاطع مع المحور x في النقطتين ± 1 (انظر المثال ١.٠.٢(iii)).

ملاحظة ١.٠.٤

يمكننا جعل أي دالة كثيرة الحدود f أوليّة من خلال قسمتها على المعامل الرئيسي a_n، حيث لن تتغير النقاط الحرجة عند قيامنا بذلك:

$$f(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(a)}{a_n} = 0$$

يمكننا بالتالي دوماً قبل حساب النقاط الحرجة لكثيرة حدود ما، جعلها أوليّة لتسهيل عملية الحساب.

٢ الحساب الصريح للنقاط الحرجة

يمكن للنقاط الحرجة لكثيرة حدود أحادية عرض كثيرة الحدود هذه غالباً بشكل كامل (إنظر المقطع عن تحليل كثيرات الحدود إلى عوامل في أسفل الفصل). لذلك سنرى أن حساب النقاط الحرجة لكثيرات الحدود ذو أهمّيّة خاصة. من غير الممكن إيجاد معادلة عامة لحساب النقاط الحرجة لأي كثيرة حدود من أي درجة، لذلك سنقوم تالياً بدراسة بعض الأساليب التي ستمكننا من إيجاد النقاط الحرجة في بعض الحالات المحددة. خلاله سنقوم أيضاً بتبسيط أغلب كثيرات الحدود بجعلها أوليّة وفقاً للملاحظة ١.٠.٤.

٢.١ كثيرات الحدود من الدرجة 0

هذا النوع يمتلك حد ثابت وحيد a_0 وقد تم التطرّق له في المثال ١.٠.٢(i).

تنبيه! الدالة الثابتة "$f(x) = 0$ لأجل أي قيمة x" هي أيضاً كثيرة حدود ولكن لها عدد لا نهائي من النقاط الحرجة.

٢.٢ كثيرات الحدود من الدرجة 1

الدالة التالية

$$f(x) = x + a$$

هي كثيرة حدود من الدرجة الأولى. يمكننا مباشرة الملاحظة أن $f(x) = 0$ تتحقق عندما $x = -a$، هذا يعني أن f لها نقطة حرجة واضحة وهي $-a$ (نطلق على هذا النوع من الدوال دوال خطية، وتأتي هذه التسمية من رسمها البياني).

٢.٣ كثيرات الحدود من الدرجة 2

لتكن الدالة

$$f(x) = x^2 + px + q, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

كثيرة حدود من الدرجة الثانية، ما هي نقاطها الحرجة؟ هكذا يمكننا حساب هذه النقاط بشكل واضح:

$$\begin{aligned}
& x^2 + px + q &&= 0 && \mid -q \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 + px &&= -q && \mid + \frac{p^2}{4} \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 + px + \frac{p^2}{4} &&= \frac{p^2}{4} - q && \mid (a^2 + 2ab + b^2) = (a+b)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &&= \frac{p^2}{4} - q &&
\end{aligned}$$

يمكننا الأن تطبيق الجذر على كلا الطرفين، لأجله نفترض أن $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ (لا يمكننا تطبيق الجذر على الأرقام السالبة)، نحصل الأن على:

$$\begin{aligned}
& \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 &&= \frac{p^2}{4} - q && \mid \sqrt{(\quad)} \\
\Leftrightarrow\quad & x+\frac{p}{2} &&= \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} && \mid -\frac{p}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & x &&= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}
\end{aligned}$$

أي أننا نحصل على قانون p-q :

نظرية ٢.٣.١

لأجل

$$f(x) = x^2 + px + q$$

نحصل على النقاط الحرجة عن طريق المعادلة:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \qquad \text{(قانون-p-q)}$$

بشرط كون $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$.

ما الذي يخبرنا الرقم $p^2/4 - q$ عن عدد النقاط الحرجة؟

- $p^2/4 - q < 0$.
  لا يوجد نقاط حرجة.
- $p^2/4 - q = 0 \Rightarrow x = -p/2 \pm 0 \Rightarrow x = -p/2$.
  لدينا نقطة حرجة واحدة.
- $p^2/4 - q > 0 \Rightarrow x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$.
  لدينا نقطتان حرجتان مختلفتان.

هذا يعني أن كثيرة حدود من الدرجة الثانية يمكن ألّا يكون لها أي نقطة حرجة، أو نقطة حرجة وحيدة، أو نقطتان من الأعداد الحقيقية.

أمثلة ٢.٣.٢ (i) $f(x) = x^2 + x - 6$، أي $p = 1, q = -6$. قانون p-q يعطي:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

لكون $25/4 > 0$، نحصل على النقطتين الحرجتين:

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2, \qquad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3.$$

بالتعويض نجد أن هذه النقطتان هما بالفعل النقاط الحرجة:

$$f(2) = 2^2 + 2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0, \quad f(-3) = (-3)^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$$

(ii) $f(x) = x^2 + 2x + 2$، أي $p = 2, q = 2$. بالتالي:

$$\frac{p^2}{4} - q = 1 - 2 = -1 < 0.$$

لذلك ليس للدالة f أي نقاط حرجة.

ملاحظة ٢.٣.٣
إلى جانب معادلة p–q يمكننا أيضاً مع كثيرات الحدود من الدرجة الثانية (ليس من الضروري أن تكون أحادية) استخدام المعادلة التربيعيّة:
لتكن المعادلة $f(x) = ax^2 + bx + c$، نقوم بتعيين $\Delta = b^2 - 4ac$، فنحصل على كلتا النقطتين الحرجتين عن طريق:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

كلتا المعادلتين (التربيعيّة و p–q) متكافئتين تماماً لأجل ($a = 1$)، ويمكن عندها استخدام أي واحدة منهما.

هكذا نكون قد انتهينا من دراسة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية، أما من أجل كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة والرابعة فهنالك أيضاً قوانين ومعادلات مشابهة لقانون p–q. غير أن هذه المعادلات أكثر تعقيداً بكثير وليس من العمليّ حفظها. بدلاً من ذلك سنقوم بتعلّم بعض الأساليب التي ستمكننا في أغلب الحالات من إيجاد النقاط الحرجة لكثيرات الحدود هذه، ولكن قبلها سنستعرض ملاحظة تنطبق على كثيرات الحدود من أي درجة.

ملاحظة ٢.٣.٤
لتكن $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x$ كثيرة حدود لا تملك حداً ثابتاً a_0، عندها يكون 0 دائماً نقطة حرجة لكثيرة الحدود هذه. يمكننا بعدها كتابة $f(x) = xg(x)$ على الشكل $g(x) = a_nx^{n-1} + \cdots + a_1$. كثيرة الحدود g لها درجة أصغر من درجة f والنقاط الحرجة للدالة g هي بقيّة النقاط الحرجة للدالة f.

مثال ٢.٣.٥
$f(x) = x^3 + x^2 - 6x$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة ويمكن كتابتها على الشكل $f(x) = x(x^2 + x - 6)$. لهذه الدالة إذاً النقطة الحرجة 0 وباقي نقاطها الحرجة قد قمنا بحسابها في المثال ٢.٣.٢. إجمالاً تمتلك الدالة f النقاط الحرجة 0، 2 و -3.

سنعود إلى كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة لاحقاً.

٢.٤ كثيرات الحدود من الدرجة 4

ليكن لدينا كثيرة حدود من الدرجة الرابعة معطاة بالشكل الخاص التالي:

$$f(x) = x^4 + a_2x^2 + a_0,$$

f لا تتضمن أحد الحدّين x^3 أو x، يمكننا بالتالي القيام بعملية الإستعاضة التالية:
نقوم بتعيين $y = x^2$ فنحصل على $g(y) = y^2 + a_2y + a_0$. هذه الدالة من الدرجة الثانية و يمكننا حساب نقاطها الحرجة $y_{1,2}$ (في حالة وجود أي من هذه النقاط). نقوم الأن (إذا أمكن) بتعيين $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}$ و $x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$، فنحصل على النقاط الحرجة الأربع للدالة $f(x)$.
بشكل مشابه يمكننا الحصول على النقاط الحرجة لكثيرات الحدود من الدرجات 6، 8، ...

أمثلة ٢.٤.١ (i) لنحاول إيجاد النقاط الحرجة لكثيرة الحدود $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$، نحصل بتعويض $x^2 = y$ على الدالة $g(y) = y^2 - 5y + 6$. بمساعدة قانون p–q نحصل على النقطتين الحرجتين 2 و 3 للدالة g. يكون إذاً للدالة f النقاط الحرجة الأربع $\pm\sqrt{2}$، $\pm\sqrt{3}$.

(ii) من أجل كثيرة الحدود $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ نحصل بتعويض $y = x^2$ على الدالة $g(y) = y^2 - 8y + 16$، بعد حساب النقاط الحرجة للدالة g (باستخدام قانون p–q) نحصل على النقطتين الحرجتين ± 4. بسبب عدم إمكانية الحصول على جذر العدد -4، يكون للدالة f فقط النقطتين الحرجتين $\pm\sqrt{4} = \pm 2$.

٢.٥ كثيرات الحدود من الدرجة 3

لتكن $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة. هنا من الأفضل أن نقوم بشرح هذه الطريقة بالإستعانة بمثال. باعتبار أن لدينا كثيرة الحدود التالية:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 51x - 54.$$

يجدر بنا أولا –خصوصا مع كثيرات الحدود التي معاملاتها (أمثال x) أعداد صحيحة– تعويض أرقام صغيرة مختلفة وملاحظة إذا ما كان ناتج التعويض 0 أو لا. أي أننا سنقوم بتخمين نقطة حرجة لهذه الدالة. نقوم بتجريب مجموعة الأرقام التالية ± 2، ± 1، 0، مع الدالة المعطاة أعلاه، نجد أن الرقم -1 نقطة حرجة للدالة f، لأن $f(-1) = -1 + 4 + 51 - 54 = 0$. ولكن ما هي النقاط الحرجة الأُخرى للدالة f؟ هل هنالك نقاط حرجة أُخرى بالأصل؟ لمعرفة كل هذا من المفيد القيام بعملية قسمة كثيرات الحدود. هذه الطريقة تمكننا من القسمة على النقطة الحرجة -1 والحصول بالتالي

على كثيرة حدود من الدرجة الثانية، التي يمكننا حساب نقاطها الحرجة بسهولة كما تعلّمنا في السابق. سنقوم بالبحث عن كثيرة حدود $g(x)$، بحيث تكون $f(x) = (x+1)g(x)$ محقّقة (هنا كتبنا العامل $(x+1)$ لأن -1 نقطة حرجة معروفة للدالة f وللعامل $(x+1)$ كذلك). نبدأ الأن بعملية قسمة كثيرات الحدود خطوة خطوة:

- أولاً نقوم بكتابة كثيرة الحدود ونقطتها الحرجة، التي نريد القسمة عليها، جنباً إلى جنب:

$$\Big(\quad x^3 + 4x^2 - 51x - 54\Big) \div \Big(x+1\Big) =$$

- الأن نقوم بقسمة الأس الأكبر من الجهة اليسرى (x^3) على الأس الموجود في كثيرة الحدود اليمنى (x):

$$\Big(\quad x^3 + 4x^2 - 51x - 54\Big) \div \Big(x+1\Big) = x^2$$

- بعدها نقوم بضرب ناتج القسمة السابق (x^2) مع $(x+1)$ ونطرح الناتج من كثيرة الحدود اليسرى:

$$\begin{array}{l}
\Big(\quad x^3 + 4x^2 - 51x - 54\Big) \div \Big(x+1\Big) = x^2 \\
\underline{\ -x^3 \quad -x^2\ } \\
\qquad\quad 3x^2 - 51x
\end{array}$$

- نقوم بتكرار عملية القسمة ولكن هذه المرّة مع الأس الأكبر للحد الناتج من الخطوة السابقة ($3x^2$):

$$\begin{array}{l}
\Big(\quad x^3 + 4x^2 - 51x - 54\Big) \div \Big(x+1\Big) = x^2 + 3x \qquad , \\
\underline{\ -x^3 \quad -x^2\ } \\
\qquad\quad 3x^2 - 51x
\end{array}$$

نعيد أيضا تكرار عملية الضرب ومن بعدها الطرح:

$$\begin{array}{l}
\Big(\quad x^3 + 4x^2 - 51x - 54\Big) \div \Big(x+1\Big) = x^2 + 3x \\
\underline{\ -x^3 \quad -x^2\ } \\
\qquad\quad 3x^2 - 51x \\
\qquad \underline{\ -3x^2 \quad -3x\ } \\
\qquad\qquad\quad -54x - 54
\end{array}$$

- الأن نقوم بتكرار العملية من البداية مع الحد الناتج الجديد للمرّة الأخيرة، فنحصل في الجهة اليسرى على 0:

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 + 4x^2 - 51x - 54\big) \div \big(x+1\big) = x^2 + 3x - 54 \\ \underline{-x^3 \quad - x^2} \\ \qquad 3x^2 - 51x \\ \quad \underline{-3x^2 \quad -3x} \\ \qquad\qquad -54x - 54 \\ \qquad\qquad \underline{\quad 54x + 54} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

نهايةً نحصل على كثيرة الحدود المطلوبة $g(x)$ على الجهة اليمنى.
أي $g(x) = x^2 + 3x - 54$ و $f(x) = (x+1)(x^2+3x-54)$. للتأكّد:

$$(x+1)(x^2+3x-54) = x^3 + 3x^2 - 54x + x^2 + 3x - 54 = x^3 + 4x^2 - 51x - 54 = f(x).$$

النقاط الحرجة المتبقية للدالة f هي نفسها النقاط الحرجة للدالة g، وللحصول عليها نقوم بتطبيق قانون p–q فنحصل على $x_2 = 6$ و $x_3 = -9$.
أي أننا عندما نستطيع تخمين نقطة حرجة لكثيرة حدود ما، نستطيع الحصول عبر قسمة كثيرات الحدود على كثيرة حدود أُخرى من درجة أقل ولها النقاط الحرجة المتبقية.

٢.٦ تحليل كثيرات الحدود

إذا عرفنا كل النقاط الحرجة لكثيرة حدود ما مع تعددية كل منها، يمكننا في كثير من الأحيان كتابة كثيرة الحدود هذه بصيغة مبسّطة.

نظرية ٢.٦.١
لتكن $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n و $a_1, \ldots$ ،a_k كل نقاطها الحرجة، عندها يمكننا كتابة f على الشكل التالي:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_k) g(x),$$

هنا لدينا g كثيرة حدود من الدرجة $n - k$ وليس لها أي نقاط حرجة. إذا كانت $n = k$، يكون للدالة f تماماً n نقطة حرجة ويمكن كتابتها على الشكل:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n).$$

ندعو هذا تحليل f إلى عوامل أو تجزئة f إلى عوامل خطيّة .

عند القيام بعملية التجزئة قد يحصل أن يتكرر ظهور نقطة حرجة n مرة (أي أن يكون لعدّة a_i نفس القيمة)، نقول في هذه الحالة أن لهذه النقطة الحرجة التعددية n. إذاً نعني بالتعددية عدد مرّات ظهور هذه النقطة الحرجة عند تجزئة f.

مثال ٢.٦.٢

بتحليل $f(x) = x^3 + 4x^2 - 51x - 54$ نحصل على (إنظر المقطع السابق):

$$x^3 + 4x^2 - 51x - 54 = (x+1)(x+9)(x-6)$$

كثيرة الحدود $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ لها العوامل:

$$g(x) = (x-1)(x-1)(x-1),$$

أي أن للدالة g النقطة الحرجة الوحيدة 1 ولكن لها التعددية 3.