Vektorrechnung

10. August 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Vektoren

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ können wir uns als eine unendlich lange Zahlengerade vorstellen; die Zahlen sind wie an einer Schnur aufgereiht. Es ist also möglich einen Punkt auf einer Geraden durch eine Zahl zu kennzeichnen und sich durch Addition oder Subtraktion von reellen Zahlen auf der Geraden fortzubewegen.

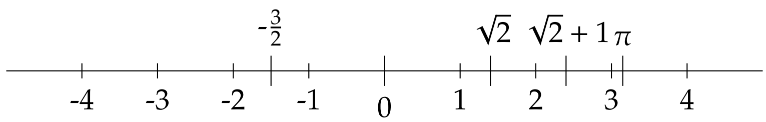


Abbildung 1: Die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$

So können wir in einer Dimension Punkte und Richtungen durch reelle Zahlen beschreiben. Wie aber beschreiben wir Punkte und Richtungen in einer Ebene oder im gesamten dreidimensionalen Raum? Dafür benötigen wir mehr Koordinaten.

Definition 1.1
Ein *n-dimensionaler Vektor* ist ein Tupel, das heißt, eine geordnete Menge von n reellen Zahlen. Wir schreiben dies oft als

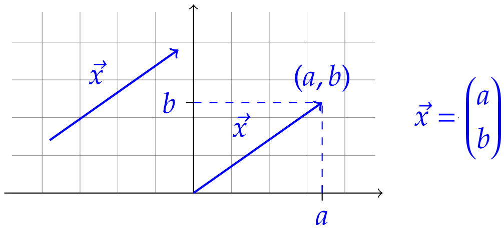
$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere erhalten wir für $n = 2$ und $n = 3$, die im Folgenden unsere Standardbeispiele sein werden:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Bemerkung 1.2
Wir können uns Vektoren als Pfeile vorstellen, die eine Richtung und eine (endliche) Länge haben. Statten wir zum Beispiel die Ebene mit einem kartesischen Koordinatensystem aus und ist $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ ein zweidimensionaler Vektor, $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, dann zeigt der Pfeil von $\vec{x}$ auf den Punkt (a, b) in der Ebene, wenn wir den Anfang des Pfeiles in die 0 legen.

$\vec{x}$ heißt auch der *Ortsvektor* von (a, b). Verschieben des Pfeiles in der Ebene ändert aber den Vektor nicht:



Zwei Pfeile beschreiben den gleichen Vektor genau dann, wenn ihre Länge und ihre Richtung gleich sind. Dann sind sie nämlich Ortsvektor des gleichen Punktes in einem Koordinatensystem. Analog funktioniert dies im dreidimensionalen Raum mit einem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

2 Grundlegende Rechenoperationen mit Vektoren

Auf der Zahlengerade können wir uns durch Addition mit reellen Zahlen fortbewegen. Wir werden nun eine Addition und eine Skalarmultiplikation von Vektoren definieren, die uns das Zusammensetzen und Strecken/Stauchen von Vektoren ermöglicht.

Definition 2.1
Seien $\vec{x}, \vec{y}$ zwei Vektoren des $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann definieren wir die Vektoren $\vec{x} + \vec{y}$, bzw. $\lambda\vec{x}$ durch komponentenweise Addition bzw. Multiplikation, das heißt

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda\vec{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 2.2
Wir sehen an Abbildung 2, dass die Addition der Vektoren also darauf hinausläuft, den einen Vektor an die Spitze des anderen zu setzen. Genauso können wir natürlich auch Vektoren voneinander abziehen oder durch eine reelle Zahl $\neq 0$ dividieren. Subtraktion von zwei Vektoren liefert hier den Pfeil, der von der Spitze des einen Pfeiles auf den

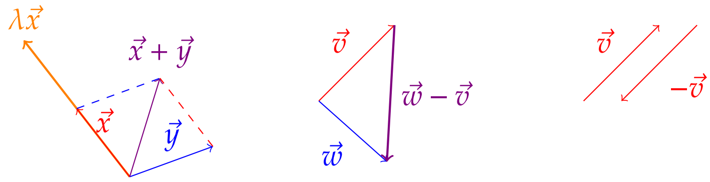


Abbildung 2: Die Vektoraddition und Skalarmultiplikation in der Ebene

anderen zeigt, wenn beide Pfeile in einem gemeinsamen Punkt starten. Multiplikation eines Vektors mit -1 ist das Umdrehen des Pfeiles, das heißt, die Richtung wird genau umgekehrt, während die Länge erhalten bleibt.

Achtung! Wir definieren zunächst keine Multiplikation auf den Vektoren, $\vec{x}\cdot\vec{y}$ ist also kein Vektor! Erst später werden wir sehen, wie und in welcher Situation ein 'Vektorprodukt' berechnet werden kann.
Mit Hilfe von Mengen von Vektoren können wir Geraden oder Ebenen im zwei- oder dreidimensionalen Raum beschreiben.

Definition 2.3
Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ drei Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Dann definiert die Menge

$$\{\vec{x} + \lambda\vec{y} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

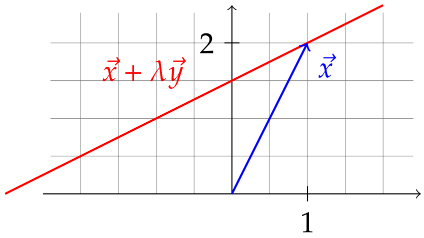
die *Gerade durch $\vec{x}$ in Richtung $\vec{y}$*. Ähnlich definiert die Menge

$$\{\vec{x} + \lambda\vec{y} + \mu\vec{z} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

die *Ebene durch $\vec{x}$, die von $\vec{y}$ und $\vec{z}$ aufgespannt* wird.

Beispiel 2.4
Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ gegeben. Dann hat die Gerade durch $\vec{x}$ in Richtung $\vec{y}$

die folgende Gestalt:



3 Geometrie der Vektoren

Wir wollen nun die Länge eines Vektors definieren. Hier ist die Idee, sich an dem Satz des Pythagoras zu orientieren und davon ausgehend im Allgemeinen die Länge eines Vektors des $\mathbb{R}^n$ zu definieren. Der Satz des Pythagoras besagt: Die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks erfüllen die Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

hierbei bezeichnen a, b, c die Seitenlängen des Dreiecks, c die Hypotenuse, das heißt, die Seite, die dem rechten Winkel des Dreiecks gegenüberliegt. Schreiben wir nun einen Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ als

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \vec{x} + \vec{y},$$

so können wir die Länge des Vektors $\vec{w}$ definieren als $\sqrt{x^2 + y^2}$, siehe Abbildung 3.

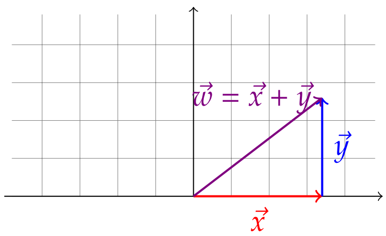


Abbildung 3: Der Satz des Pythagoras liefert uns die Länge des Vektors $\vec{w}$.

Dies führt uns zu folgender Definition der Länge eines allgemeinen Vektors des $\mathbb{R}^n$:

Definition 3.1
Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit Einträgen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dann ist die *Länge* $\| \vec{x} \|$ von $\vec{x}$ definiert

als

$$\| \vec{x} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Ist $\| \vec{x} \| = 1$, dann heißt $\vec{x}$ *normiert*, für einen allgemeinen Vektor $\vec{y}$ heißt der Vektor $\vec{y}' = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$ die *Normierung* von $\vec{y}$.

Um den Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen oder überhaupt erst definieren zu können, benötigen wir das Skalarprodukt zweier Vektoren.

Definition 3.2
Es seien $\vec{x}, \vec{y}$ zwei Vektoren des $\mathbb{R}^n$ mit Einträgen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Dann ist das *Skalarprodukt* von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ definiert durch

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere gilt also $\vec{x} \cdot \vec{x} = \| \vec{x} \|^2$.

Das Skalarprodukt gibt uns also die Möglichkeit, zwei Vektoren zu „multiplizieren“; wir erhalten aber keinen neuen Vektor, sondern eine reelle Zahl! Mit Hilfe dieses Skalarprodukts können wir nun Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen.

Bemerkung 3.3
Es seien $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ zwei Vektoren des $\mathbb{R}^n$ und α der Winkel der von (den Pfeilen von) $\vec{x_1}$ und $\vec{x_2}$ gebildet wird (siehe Abbildung 4). Dann gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{x_1} \cdot \vec{x_2}}{\| \vec{x_1} \| \| \vec{x_2} \|}.$$

Insbesondere gilt also für $\vec{x_1} \cdot \vec{x_2} = 0$, dass $\cos(\alpha) = 0$, also $\alpha = 90°$ ist. Die Vektoren stehen also senkrecht aufeinander.

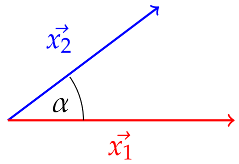


Abbildung 4: Die Vektoren $\vec{x_1}$ und $\vec{x_2}$ schließen den Winkel α ein.

Definition 3.4

Zwei Vektoren $\vec{x_1}, \vec{x_2} \in \mathbb{R}^n$ heißen *orthogonal*, wenn $\vec{x_1} \cdot \vec{x_2} = 0$ gilt. Wir schreiben dann auch

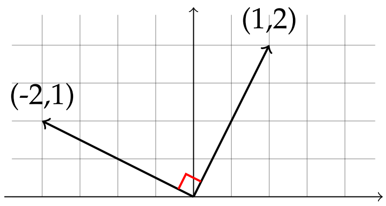
$$\vec{x_1} \perp \vec{x_2}.$$

Beispiel 3.5

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind orthogonal zueinander da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = 0$$

gilt. Die Vektoren schließen also einen Winkel von 90° Grad ein, einen *rechten Winkel*.



Beispiel 3.6

Wir wollen einen normierten Vektor $\neq 0$ finden, der orthogonal auf dem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

steht. Wir schreiben dafür $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und rechnen nach:

$$0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 2v_1 + v_2 + v_3.$$

Setzen wir nun $v_3 = 0$, so erhalten wir mit der Gleichung von oben, dass $2v_1 = -v_2$ gelten muss. Setzen wir also auch $v_1 = 1$, so erhalten wir $v_2 = -2$ und damit ist zum Beispiel $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonal zu $\vec{x}$. Nun müssen wir noch $\vec{v}$ normieren. (Das ändert nicht die Orthogonalität zu $\vec{x}$). Dafür berechnen wir die Länge von $\vec{v}$:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

Nun müssen wir nur noch $\vec{v}$ durch die Länge teilen und erhalten, dass

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein normierter Vektor ist, der orthogonal auf $\vec{x}$ steht.

Das Skalarprodukt enthält also Informationen über die geometrische Lage der Vektoren zueinander. Zum Beispiel können wir mit der Hilfe des Skalarprodukts die Entfernung eines Punktes von einer Geraden bestimmen.

Beispiel 3.7

Wir betrachten die Gerade durch $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, das heißt die Menge aller Vektoren, die sich als $\vec{x_0} + \lambda\vec{v}$ schreiben lassen können für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir möchten herausfinden, wie weit der Punkt P mit Ortsvektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ von der Geraden entfernt ist. Wir brauchen also die Länge des Vektors $\vec{z} - \vec{x}(\lambda)$, hier ist $\vec{x}(\lambda)$ ein Vektor der Geraden so gewählt, dass

$$\vec{z} - \vec{x}(\lambda) \perp \vec{v}$$

gilt. Sind diese Vektoren nämlich orthogonal, so ist die Länge von $\vec{z} - \vec{x}(\lambda)$ gerade die Länge des kürzesten Weges von P zu der Geraden. (Siehe Abbildung 5.) Wir berechnen also λ durch das Skalarprodukt:

$$0 = (\vec{z} - \vec{x}(\lambda)) \cdot \vec{v} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 + \lambda \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 1 - 1 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - \lambda - \lambda = 2 - 2\lambda.$$

Dies führt uns direkt zu $\lambda = 1$ und damit ist $\vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ der gesuchte Vektor der Geraden. Schließlich berechnen wir die Länge von $\vec{z} - \vec{x}(1)$ durch

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}.$$

Der Punkt P ist also $\sqrt{2}$ von der Geraden entfernt.

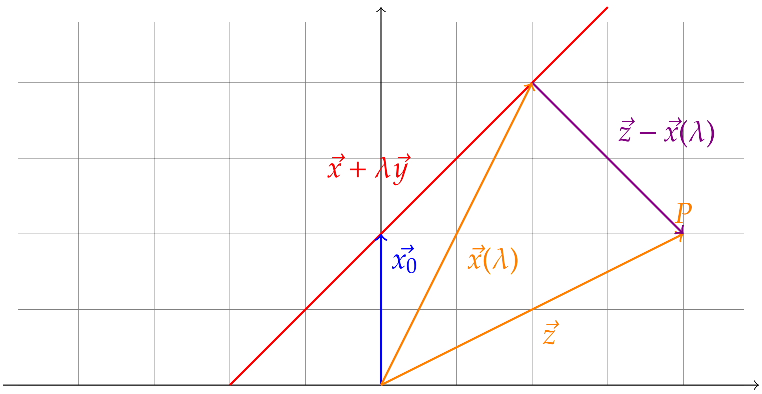


Abbildung 5: Die Entfernung des Punktes P von der Geraden ist durch den Vektor $\vec{z} - \vec{x}(\lambda)$ bestimmt.

4 Das Kreuzprodukt

Zum Abschluss wollen wir noch eine besondere Verknüpfung von dreidimensionalen Vektoren kennenlernen, das Kreuzprodukt.

Definition 4.1
Es seien $\vec{x}, \vec{y}$ zwei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ mit Einträgen x_1, x_2, x_3, bzw. y_1, y_2, y_3. Das Kreuzprodukt $\vec{x} \times \vec{y}$ ist dann definiert als

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Geometrisch definiert das Kreuzprodukt $\vec{x} \times \vec{y}$ einen Vektor, der orthogonal auf der von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Ebene steht, das heißt $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{x} = 0$ und $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{y} = 0$. Die Länge des Kreuzprodukts entspricht genau dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannt wird. Insbesondere können wir also mit dem Kreuzprodukt zu einem gegebenen Vektor einen orthogonalen Vektor konstruieren.

Beispiel 4.2
Es sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Vektor des $\mathbb{R}^3$. Dann ist zum Beispiel

$$\vec{x} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ein Vektor, der orthogonal auf $\vec{x}$ steht.

Bemerkung 4.3
Das Kreuzprodukt ist nur für Vektoren des $\mathbb{R}^3$ definiert. Für andere Dimensionen gibt es zwar Verallgemeinerungen des Kreuzprodukts, diese sollen hier aber nicht behandelt werden.