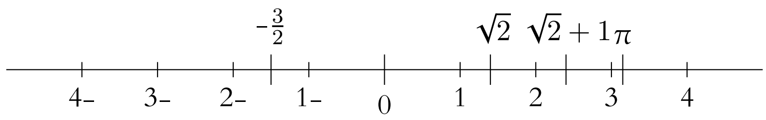
حساب الأشعّة (المتجهات)

١٤ أغسطس ٢٠١٧

المحتويات

١ الأشعّة

يمكننا تخيّل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كمستقيم أعداد لا نهائي الطول، حيث تكون الأعداد مرتبة بشكل متسلسل. يمكننا أيضا الرمز لأي نقطة على المستقيم برقم والتنقل على المستقيم بجمع أو طرح أي عدد حقيقي.



شكل ١: مستقيم الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

هكذا يمكننا عن طريق الأعداد الحقيقية وصف نقاط وخطوط اتجاه في بعد ما. لكن كيف يمكننا رسم النقاط وخطوط الإتجاه في مستوي أو في الفراغ ثلاثي الأبعاد؟ من أجل ذلك نحتاج إلى إحداثيات أكثر.

تعريف ١.١

شعاع ذو البعد n هو عبارة عن صف من n رقم حقيقي، نقوم بتمثيله غالباً على الشكل:

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$$

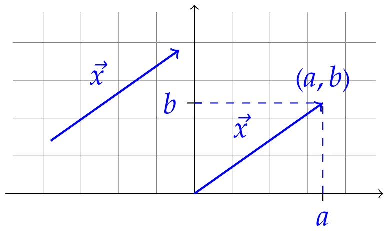
نحصل من أجل $n = 2$ و $n = 3$ على:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad , \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ملاحظة ١.٢

يمكننا تصوّر الأشعّة على أنها أسهم ذات إتجاه وطول (نهائي) معيّنين. لنزوّد مثلاً المستوي بنظام إحداثيّات ديكارتي وليكن $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ شعاعاً ثنائي الأبعاد، $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$، عندها يشير الشعاع $\vec{x}$ على النقطة (a, b) عندما تكون بدايته من المركز 0.

$\vec{x}$ يدعى أيضاً شعاع توجيه (eng. Position Vector) للنقطة (a, b). إزاحة السهم في المستوي لا يغيّر الشعاع الذي يمثّله:



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

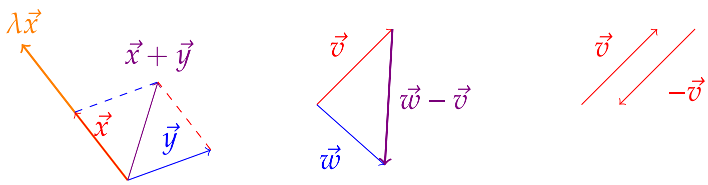
نعتبر أن سهمين يمثّلان نفس الشعاع إذا كان لهما نفس الطول والإتجاه، حتى أنهما حينها يعتبران شعاع التوجيه لنفس النقطة. بشكل مشابه تنطبق هذه الأفكار على شعاع $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

٢ العمليات الحسابية الأساسية مع الأشعّة

كما ذكرنا يمكننا التنقل على مستقيم الأعداد باستخدام عملية الجمع مع الأعداد الحقيقية.
الأن سنقوم بتعريف عمليّتي الجمع والضرب القياسي (eng. Scalar Product) للأشعّة، التي تمكننا من تركيب ومطّ/تقليص الأشعّة.

تعريف ٢.١
ليكن لدينا الشعاعين $\vec{x}, \vec{y}$ المعرّفين في $\mathbb{R}^n$، $\lambda \in \mathbb{R}$ عدد حقيقي. نطلق على العمليّتين $\vec{x} + \vec{y}$، $\lambda\vec{x}$ الجمع والضرب القياسي للأشعّة:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda\vec{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$



شكل ٢: الجمع والضرب القياسي للأشعّة في المستوي

ملاحظة ٢.٢
كما نرى في الشكل ٢، تمثل عملية جمع الأشعّة وضع أحد الشعاعين على مقدمة (نهاية) الشعاع الأخر. بالمثل يمكننا أيضاً طرح الأشعّة من بعضها البعض

وتقسيمها على عدد حقيقي $0 \neq$. يمثّل ناتج عملية الطرح بين شعاعين لهما نفس نقطة البداية سهماً ينطلق من مقدمة أحدهما وينتهي في مقدمة الأخر. ضرب شعاع بالعدد $1-$ يعكسه، أي أن الشعاع يحافظ على طوله ولكن يعكس إتجاهه.

تنبيه! لن نقوم حالياً بتعريف عملية ضرب الأشعّة، حيث أن ناتج $\vec{x} \cdot \vec{y}$ ليس شعاعاً! أولاً سنرى لاحقاً كيف وفي أي حالة يمكن حساب ''الضرب القياسي'' للأشعّة.

يمكننا بمساعدة مجموعة من الأشعّة وصف مستقيمات أو مستويات في الفضاء ثنائي أو ثلاثي الأبعاد.

تعريف ٢.٣
لتكن $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ثلاثة أشعّة في $\mathbb{R}^n$. عندها تعرّف المجموعة

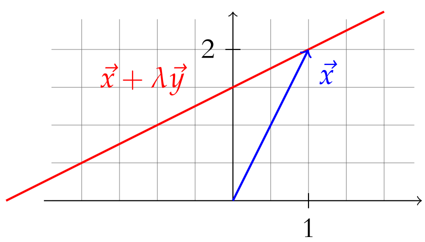
$$\{\vec{x} + \lambda \vec{y} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

المستقيمات عبر $\vec{x}$ في الإتجاه $\vec{y}$. بشكل مشابه تعرّف المجموعة

$$\{\vec{x} + \lambda \vec{y} + \mu \vec{z} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

المستوي عبر $\vec{x}$، الممدّد من قبل $\vec{y}$ و $\vec{z}$.

مثال ٢.٤
لتكن $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ في $\mathbb{R}^2$. عندها يكون للمستقيم العابر للشعاع $\vec{x}$ في الإتجاه $\vec{y}$ الشكل التالي:



٣ هندسة الأشعّة

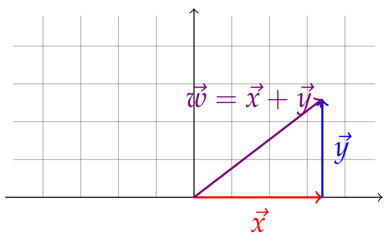
نريد الأن تعريف طول الشعاع. سنقوم انطلاقاً من نظرية فيثاغورث بتعريف طول شعاع في $\mathbb{R}^n$. تنص هذه النظرية على أن أطوال أضلاع المثلث قائم الزاوية تحقّق العلاقة:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

a, b, c تمثل أطوال أضلاع المثلث، c الوتر، أي الضلع المقابل للزاوية القائمة. نكتب الأن شعاعاً $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ على الشكل التالي:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \vec{x} + \vec{y},$$

هكذا يمكننا تعريف طول الشعاع $\vec{w}$ على النحو $\sqrt{x^2 + y^2}$ ، انظر الشكل ٣.



شكل ٣: نظرية فيثاغورث تعطينا طول الشعاع $\vec{w}$

هذا يوصلنا إلى تعريف عام لطول شعاع في $\mathbb{R}^n$:

تعريف ٣.١
ليكن $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ شعاع مؤلف من $x_1, x_2, \ldots, x_n$. عندها نعرّف طول هذا الشعاع $\| \vec{x} \|$ كالتالي:

$$\| \vec{x} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

نطلق على $\vec{x}$ شعاع الوحدة (eng. Unit Vector) عندما يكون $\| \vec{x} \| = 1$. عموماً نحصل على شعاع الوحدة لشعاع $\vec{y}$ كالتالي $\vec{y}' = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$.

لتحديد الزاوية بين شعاعين أو لنستطيع تعريف هذه الزاوية في البداية، نحتاج إلى منتج الضرب القياسي للشعاعين.

تعريف ٣.٢
ليكن لدينا $\vec{x}$،$\vec{y}$ شعاعين في $\mathbb{R}^n$ مؤلفان من العناصر $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ،$x_1, x_2, \ldots, x_n$ على التوالي. عندها نعرّف الضرب القياسي للشعاعين $\vec{x}$ و $\vec{y}$ كالتالي:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R}.$$

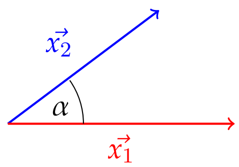
وبشكل خاص يصح $\vec{x} \cdot \vec{x} = \| \vec{x} \|^2$.

تمكننا عملية الضرب القياسي من ''ضرب'' شعاعين، ولكن الناتج عندها لا يكون شعاعاً جديداً إنما عدداً صحيحاً! بمساعدة الضرب القياسي يمكننا الأن تحديد الزوايا بين شعاعين.

ملاحظة ٣.٣
ليكن لدينا $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ شعاعين في $\mathbb{R}^n$ و α الزاوية بينهما (انظر الشكل ٤)، عندها يصح:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{x_1} \cdot \vec{x_2}}{\| \vec{x_1} \| \| \vec{x_2} \|}.$$

في حالة كون $\vec{x_1} \cdot \vec{x_2} = 0$، يكون عندها $\cos(\alpha) = 0$، أي أن $\alpha = 90^\circ$. الشعاعين يكونان حينها متعامدين.



شكل ٤: الشعاعين $\vec{x_1}$ و $\vec{x_2}$ يحصران الزاوية α بينهما.

تعريف ٣.٤
نطلق على شعاعين $\vec{x_1}, \vec{x_2} \in \mathbb{R}^n$ شعاعين متعامدين (eng. Orthogonal)، عندما يتحقّق $\vec{x_1} \cdot \vec{x_2} = 0$. نكتب أيضاً حينها:

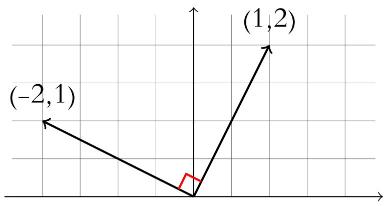
$$\vec{x_1} \perp \vec{x_2}.$$

مثال ٣.٥

الشعاعين $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ متعامدين لأن

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = 1\cdot(-2) + 1\cdot 2 = 0$$

محقّقة. أي أن الشعاعين يحدّان زاوية 90° بينهما (زاوية قائمة).



مثال ٣.٦

نريد هنا إيجاد شعاع وحدة $\neq 0$ والذي يعامد الشعاع $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. نكتب لأجل ذلك $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ ونقوم بالحساب لإيجاد التالي:

$$0 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = 2v_1 + v_2 + v_3.$$

نعيّن $v_3 = 0$ فيجب عندها حسب المعادلة في الأعلى أن يتحقّق $2v_1 = -v_2$. نعيّن أيضاً $v_1 = 1$، فنحصل على $v_2 = -2$. عندها يعامد مثلاً الشعاع $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ الشعاع $\vec{x}$. الآن يجب علينا جعل $\vec{v}$ شعاع وحدة (هذا لا يؤثّر على تعامده مع الشعاع $\vec{x}$). لأجل ذلك نقوم بحساب طول الشعاع $\vec{v}$:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

والأن يجب علينا بعدها تقسيم $\vec{v}$ على طوله، فنحصل على:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{-2}{\sqrt{5}}\\ 0\end{pmatrix}$$

والذي يحقّق المطلوب بكونه شعاع وحدة يعامد الشعاع $\vec{x}$.

الضرب القياسي يحتوي على معلومات عن الموقع الهندسي للأشعة بالنسبة لبعضها البعض. يمكننا على سبيل المثال بمساعدة الضرب القياسي تحديد بعد نقطة عن مستقيم ما.

مثال ٣.٧

لنعاين المستقيم المار عبر $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ في الإتجاه $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$، أي مجموعة الأشعّة التي يمكن كتابتها على الشكل $\vec{x_0} + \lambda \vec{v}$ من أجل $\lambda \in \mathbb{R}$.

نريد اكتشاف كم تبعد النقطة P ذات شعاع التوجيه $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ عن هذا المستقيم. أي أننا نحتاج طول الشعاع $\vec{z} - \vec{x}(\lambda)$، هنا يكون $\vec{x}(\lambda)$ شعاع المستقيم المختار بحيث يتحقّق:

$$\vec{z} - \vec{x}(\lambda) \perp \vec{v}$$

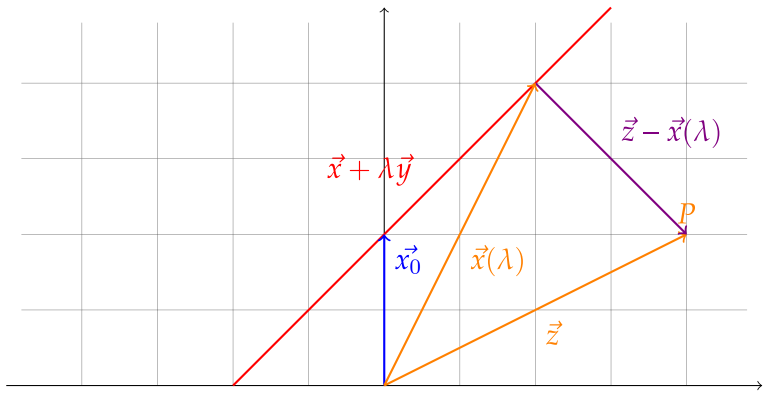
إذا تعامد الشعاعين بالفعل يكون طول $\vec{z} - \vec{x}(\lambda)$ تماماً أقصر طريق من النقطة P للمستقيم (انظر الشكل ٥). سنحسب إذاً λ عن طريق معادلة الضرب القياسي التالية:

$$0 = (\vec{z} - \vec{x}(\lambda)) \cdot \vec{v} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 + \lambda \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 1 - 1 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - \lambda - \lambda = 2 - 2\lambda.$$

هذه العملية تعطينا $\lambda = 1$ ولأجله يكون $\vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ شعاع المستقيم المطلوب. أخيراً نقوم بحساب طول الشعاع $\vec{z} - \vec{x}(1)$ عن طريق:

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}.$$

تكون عندها المسافة بين النقطة P والمستقيم تعادل $\sqrt{2}$.



شكل ٥: بُعد النقطة P عن المستقيم محددة بالشعاع $\vec{z} - \vec{x}(\lambda)$.

٤ الضرب التقاطعي – (eng. Cross Product)

نهايةً نريد التعرّف على عملية خاصة بين الأشعّة ثلاثية الأبعاد، ألا وهي الضرب التقاطعي.

تعريف ٤.١
ليكن لدينا $\vec{x}$،$\vec{y}$ شعاعين في $\mathbb{R}^3$ يحتويان العناصر y_1, y_2, y_3، x_1, x_2, x_3 على التوالي. نعرّف عملية الضرب التقاطعي بينهما $\vec{x} \times \vec{y}$ على التالي:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

هندسياً يعرّف الضرب التقاطعي $\vec{x} \times \vec{y}$ شعاعاً عامودياً على المستوي الممتد بين الشعاعين $\vec{x}$ و $\vec{y}$، أي أنه $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{x} = 0$ و $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{y} = 0$.
طول الشعاع الناتج عن الضرب التقاطعي يساوي تماماً مساحة متوازي الأضلاع المحدد من قبل $\vec{x}$ و $\vec{y}$. بشكل خاص يمكننا عن طريق حاصل الضرب التقاطعي لشعاع ما تكوين شعاع أخر يعامده.

مثال ٤.٢
ليكن $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع في $\mathbb{R}^3$. عندها يكون على سبيل المثال

$$\vec{x} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

شعاعاً عامودياً على $\vec{x}$.

ملاحظة ٤.٣
الضرب التقاطعي معرّف فقط من أجل الأشعّة في $\mathbb{R}^3$. بالرغم من وجود تعميمات للضرب التقاطعي من أجل الأبعاد الأُخرى، ولكننا لن نتطرق لها هنا.