Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. A. Thevis

10. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. (4P)

Geben Sie jeweils an, ob es eine entsprechende lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt. Berechnen Sie $\phi(e_i)$ für die linearen Abbildungen und die Einheitsvektoren e_i.

a)

$$\phi_1(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}) = 1,\ \phi_1(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = 2,\ \phi_1(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}) = 3.$$

b)

$$\phi_2(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) = 0,\ \phi_2(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = 8,\ \phi_2(\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}) = 15.$$

Aufgabe 2. (4P)

Hinweis: In dieser Aufgabe dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass auch unendlichdimensionale Vektorräume stets eine Basis haben.

Seien V, W zwei Vektorräume und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

a) ϕ ist genau dann injektiv, wenn es eine Basis B von V gibt, so dass die Bilder von zwei verschiedenen Elementen aus B nie gleich sind und $\phi(B)$ linear unabhängig ist.

b) ϕ ist genau dann surjektiv, wenn ein Erzeugendensystem von W im Bild von ϕ liegt.

c) ϕ ist genau dann bijektiv, wenn es eine Basis B von V und eine Basis C von W gibt mit $\phi(B) = C$ und $\phi|_B : B \to C$ ist eine Bijektion.

Anregung: (ohne Punkte): Sind die Aussagen abhängig von der Wahl der Basen?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 11. 01. 2019 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar.

Aufgabe 3. (4P)

Wir betrachten die komplexen 2×2-Matrizen als reellen Vektorraum. Sei $\mathbb{H}$ der von den Matrizen

$$1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, j := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Untervektorraum.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{H}$ abgeschlossen unter Multiplikation ist, d.h. für $A, B \in \mathbb{H}$ gilt $A \cdot B \in \mathbb{H}$ mit der üblichen Matrizenmultiplikation. Folgern Sie, dass $\mathbb{H}$ ein nicht-kommutativer Ring ist.

b) Zeigen Sie, dass jedes Element in $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ ein Inverses in $\mathbb{H}$ hat.

Solche nicht-kommutativen Ringe mit Inversen werden auch *Schiefkörper* genannt. Der obige Schiefkörper $\mathbb{H}$ sind die sogenannten *Quaternionen*.

Aufgabe 4. (4P)

Lösen Sie eine der drei folgenden Teilaufgaben, wobei c) die volle Punktzahl gibt, b) höchstens 3 Punkte und a) höchstens 2 Punkte.

a) Wie viele invertierbare 2×2 Matrizen gibt es über dem Körper $\mathbb{F}_3$?

b) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Bestimmen Sie die Anzahl der invertierbaren 2×2 Matrizen über dem Körper $\mathbb{F}_p$.

c) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Anzahl der invertierbaren $n \times n$ Matrizen über dem Körper $\mathbb{F}_p$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 11. 01. 2019 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar.