Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. A. Thevis

# 11. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

In allen Aufgaben auf diesem Übungsblatt sei $K$ ein Körper.

**Aufgabe 1. (4P)**

Wir betrachten die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^5$.

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Zeigen Sie, dass $V$ ein Untervektorraum von $U$ ist. Berechnen Sie dann die Dimensionen folgender Vektorräume:

a) $U/V$, b) $V + U$, c) $U + W$, d) $U/(W \cap U)$.

**Hinweis:** Es kann hilfreich sein, zunächst die Dimensionen von $U, V$ und $W$ zu berechnen.

**Aufgabe 2. (4P)**

a) Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Zudem seien $W_1, W_2$ Untervektorräume von $V$ mit $W_1 \subseteq W_2$. Wir betrachten die kanonische Projektion

$$\pi : V \to V/W_2,\ v \mapsto [v]_2.$$

Hierbei bezeichnet $[v]_2$ die Restklasse von $v$ in $V/W_2$.
Zeigen Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes, dass die Abbildung

$$\pi' : V/W_1 \to V/W_2,\ [v]_1 \mapsto [v]_2$$

eine (wohldefinierte!) lineare Abbildung ist. Hierbei bezeichnet $[v]_1$ die Restklasse von $v$ in $V/W_1$. Wann ist $\pi'$ ein Isomorphismus?

b) Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Des Weiteren seien $W, X$ Untervektorräume von $V$, für die gelte $V = W \oplus X$. Zeigen Sie, dass $V/W \cong X$ gilt.

**Aufgabe 3. (4P)**

a) Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass folgende Vektorräume isomorph sind.

(i) $V/\langle \underline{0} \rangle \cong V$,

---

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 18. 1. 2019 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar.

(ii) $V/V \cong \langle \underline{0} \rangle$.

(iii) In dieser Teilaufgabe habe $V$ Dimension $n$ und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sei eine Basis. Zeigen Sie, dass dann der Faktorraum $V/\langle v_1 \rangle$ isomorph zu dem Vektorraum $\langle v_2, \ldots, v_n \rangle$ ist.

b) Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $U$ eine Untergruppe von $G$. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung von $G$ im Allgemeinen keine Verknüpfung auf den Nebenklassen induziert. D.h. zeigen Sie, dass

$$\overline{*} : G/U \times G/U \to G/U, \ ([g], [h]) \mapsto [g * h]$$

im Allgemeinen keine Gruppenstruktur auf $G/U$ definiert.

**Hinweis:** Wenn $G$ abelsch ist, induziert die Verknüpfung von $G$ für jede Untergruppe eine Gruppenstruktur auf den Nebenklassen. Falls Sie nach einem Gegenbeispiel suchen, kann es helfen, (auf Übungsblättern und in der Vorlesung) nach Beispielen von Gruppen, Untergruppen und den dazu gehörigen Nebenklassen zu suchen.

**Aufgabe 4. (4P)**

a) Sei $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum und seien $U, W$ Untervektorräume von $V$. Ziel dieser Teilaufgabe ist es, einen alternativen Beweis für folgende Dimensionsformel aus Satz 11 aus der Vorlesung zu entwickeln

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Gehen Sie wie folgt vor: Beginnen Sie mit einer Basis $B$ vom Schnitt $U \cap W$. Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis $C$ von $U$ sowie zu einer Basis $D$ von $W$. Zeigen Sie nun, dass $C \cup D$ eine Basis von $U + W$ ist und berechnen Sie die Anzahl der Elemente dieser Basis.

b) Zeigen Sie, dass zwei endlichdimensionale Vektorräume genau dann isomorph sind, wenn sie die gleiche Dimension haben.

**Aufgabe 5. (4 Bonuspunkte)**

Wir arbeiten mit den beiden Basen $S_1 = \{b_1, b_2, b_3\}$ und $S_2 = \{c_1, c_2, c_3\}$ des $\mathbb{R}^3$. Hierbei sind

$$b_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \ b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ b_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ c_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nun betrachten wir die Identitätsabbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ v \mapsto v$.

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $D_{S_2 S_1}(\Phi)$, d.h. die Matrix $A = (a_{ij})$ mit $\Phi(b_j) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} c_i$.

b) Bestimmen Sie zu $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ die Koordinatendarstellung von $v$ bezüglich der Basis $S_1$, d.h.

$$D_{S_1}(v) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } v = d_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + d_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + d_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Benutzen Sie die in Aufgabenteil a) berechnete Abbildungsmatrix, um die Koordinatendarstellung von $v$ bezüglich der Basis $S_2$, d.h. $D_{S_2}(v)$, zu berechnen.

---

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 18. 1. 2019 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar.