Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. A. Thevis

12. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Während des gesamten Blattes sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Aufgabe 1. (4P)

Sei $\mathbb{R}[X]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome, $n \in \mathbb{N}$ und $P_n := \{f \in P \mid \deg(f) \leq n\}$ der Untervektorraum der Polynome von Grad kleiner oder gleich n. Auf $\mathbb{R}[X]$ sei

$$\mathrm{der} : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]\ ,\ f(X) \mapsto f'(X)$$

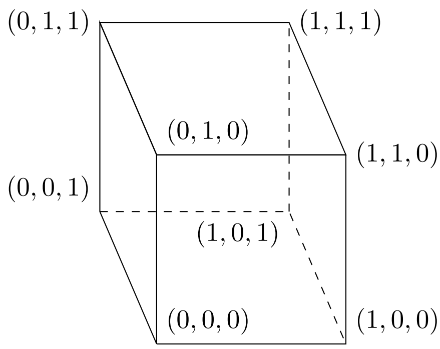
die Ableitungsabbildung. Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass $\mathrm{der} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}[X])$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass P_n ein der-invarianter Unterraum ist. Bestimmen Sie für $n = 5$ und einer Untervektorraumbasis $B \subset P_5$ Ihrer Wahl die Darstellungsmatrix $D_{BB}(\mathrm{der}\,|_{P_n})$, die Eigenwerte und die Eigenvektoren von $\mathrm{der}\,|_{P_n}$. Hierbei bezeichnet $\mathrm{der}\,|_{P_n}$ die Einschränkung von der auf P_n.

b) Sei $J := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(i) = 0\}$ die Menge aller reellen Polynome die $i \in \mathbb{C}$ als komplexe Nullstelle haben. Zeigen Sie, dass J ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$ ist und bestimmen Sie die Dimension des Vektorraums $\mathbb{R}[X]/J$.

Aufgabe 2. (4P)

Wir identifizieren die Ecken des dreidimensionalen Würfels mit $\mathbb{F}_2^3$ wie folgt:



a) Seien ρ, σ eine Drehung bzw. eine Spiegelung des Würfels die den Ursprung fix lassen und den Würfel auf sich selbst abbilden. Geben Sie jeweils eine geometrische Beschreibung und die Darstellungsmatrix auf $\mathbb{F}_2^3$ bezüglich einer Basis Ihrer Wahl für solch ein ρ und σ an.
Bemerkung: Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass solche Drehungen und Spiegelungen Endomorphismen von $\mathbb{F}_2^3$ induzieren.

b) Bestimmen Sie zu Ihren Abbildungen aus Teil a) jeweils die invarianten Unterräume. Haben diese invariante Komplemente?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 25. 01. 2019 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar. Gruppenabgaben sind nicht erlaubt.

Aufgabe 3. (4P)

Sei $\phi \in \text{End}(V)$ und $V = V_1 \oplus V_2$ mit V_1 und V_2 ϕ-invariante Untervektorräume.

a) Wir erhalten auf V die natürliche Projektionen

$$\pi_i : V \to V_i \ , \ v = v_1 + v_2 \mapsto v_i \quad \text{mit } v_i \in V_i.$$

Zeigen Sie, dass π_i Eigenräume von ϕ auf Eigenräume von $\phi|_{V_i}$ abbildet.

b) Zeigen Sie, dass ϕ genau dann diagonalisierbar ist, wenn $\phi|_{V_1}$ und $\phi|_{V_2}$ diagonalisierbar sind.

c) Seien $\phi, \varphi \in \text{End}(V)$ zwei diagonalisierbare Endomorphismen von V.
Zeigen Sie, dass ϕ und φ genau dann kommutieren, d.h. $\phi \circ \varphi = \varphi \circ \phi$ gilt, wenn es eine Basis $B \subset V$ von V gibt, sodass $D_{BB}(\phi)$ und $D_{BB}(\varphi)$ Diagonalgestalt haben.

Aufgabe 4. (4P)

Sei $\phi \in \text{End}(V)$ ein Endomorphismus von V.

a) Seien U, V, W K-Vektorräume, $\sigma \in \text{Hom}_{K-VR}(U, V)$ und $\rho, \tau \in \text{Hom}_{K-VR}(V, W)$.
Zeigen Sie, dass $\tau + \rho : V \to W \ , \ v \mapsto \tau(v) + \rho(v)$ und $\tau \circ \sigma$ lineare Abbildungen sind. Folgern Sie hieraus, dass für ein Polynom $f(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i \in K[X]$ auch

$$f(\phi) : v \mapsto \sum_{i=0}^{k} a_i \phi^i(v) \quad \text{mit} \quad \phi^i(v) := \underbrace{(\phi \circ \cdots \circ \phi)}_{i-mal}(v) \text{ und } \phi^0(v) := v$$

ein Endomorphismus von V ist.

b) Zeigen Sie, dass ein Polynom $f(X) \in K[X] \setminus \{0\}$ existiert, so dass $f(\phi) = 0$ die Nullabbildung ist.

c) Sei $\phi \in \text{Aut}(V)$ ein Automorphismus mit Umkehrabbildung ϕ^{-1}.
Zeigen Sie, dass ein Polynom $f(X) \in K[X]$ mit $\phi^{-1} = f(\phi)$ existiert.
Hinweis: Wie immer dürfen Sie auch die vorherigen Aufgabenteile benutzen, auch wenn Sie diese nicht gelöst haben.

d) Sei $\phi \in \text{End}(V)$ nicht invertierbar. Zeigen Sie, dass dann ein Polynom $f(X) \in K[X]$ mit $f(\phi) \neq 0$ und $f(\phi) \circ \phi = 0$ existiert, wobei 0 die Nullabbildung bezeichnet.

Aufgabe 5. (4 Bonuspunkte)

Sei $\phi \in \text{End}(V)$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

a) Sei $\dim(V) \geq 2$ sowie $\{0\}$ und V die einzigen ϕ-invarianten Unterräume von V, dann ist ϕ bijektiv.

b) Jeder Unterraum von V ist ϕ-invariant $\iff$ $\phi = \lambda * id_V$ für ein $\lambda \in K$.

Bemerkung: Die Aussagen gelten auch für unendlich dimensionale Vektorräume.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 25. 01. 2019 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar. Gruppenabgaben sind nicht erlaubt.