Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. A. Thevis

13. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

In allen Aufgaben auf diesem Übungsblatt sei K ein Körper und n eine natürliche Zahl.

Aufgabe 1. (4P)

Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ x \mapsto Ax$. Hierbei ist die Matrix A gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von φ.

b) Gibt es eine Basis aus Eigenvektoren? Wenn ja, berechnen Sie eine solche. Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Aufgabe 2. (4P)

a) Sei $t \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Matrix

$$A_t := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & t \\ t & t+2 & 1 & t+2 \\ t+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Für welche Werte von t ist die Matrix A_t invertierbar?

b) Seien A, B ähnliche $n \times n$ - Matrizen über dem Körper K. Zeigen Sie, A ist genau dann diagonalisierbar, wenn B diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3. (4P)

a) Sei A eine $n \times n$ - Matrix über dem Körper K, sodass für jede Spalte die Summe ihrer Einträge gleich $c \in K$ ist. Zeigen Sie, dass c ein Eigenwert der Matrix A ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 1. 2. 2019 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar.

b) Es sei $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der reellen Funktionen. Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ definiert durch $\varphi(f)(x) = x \cdot f(x)$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte von φ und die zugehörigen Eigenräume. Besitzt V eine Basis, die aus Eigenvektoren von φ besteht?

Aufgabe 4. (4P)

Eine Matrix $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in K^{n\times n}$ heißt **Dreiecksmatrix**, wenn sie eine obere oder eine untere Dreiecksmatrix ist. Dies ist der Fall, wenn die Einträge unterhalb der Diagonalen 0 sind, d.h. $a_{i,j} = 0$ für alle $i > j$, oder die Einträge oberhalb der Diagonalen 0 sind, d.h. $a_{i,j} = 0$ für alle $i < j$.

a) Zeigen Sie, dass die Determinante einer Dreiecksmatrix $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in K^{n\times n}$ gleich dem Produkt der Diagonaleinträge von A ist, d.h.

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Sie dürfen für den Beweis **ausschließlich** Aussagen bis einschließlich Kapitel V Abschnitt 4 verwenden.
Hinweis: Es kann hilfreich sein, zunächst den Fall von oberen (oder unteren) Dreiecksmatrizen separat zu betrachten und die Aussage für die verbleibenden Dreiecksmatrizen daraus abzuleiten.

b) Zeigen Sie, dass Dreiecksmatrizen (über einem Körper K) mit paarweise verschiedenen Einträgen auf der Diagonalen diagonalisierbar sind.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass Aufgabenteil a) auch für Matrizen über einem Polynomring, d.h. Matrizen in $(K[x])^{n\times n}$, gilt.

Aufgabe 5. (4 Bonuspunkte)

Sei $t \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & t+2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & t+2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 2 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

Berechnen Sie für $i = 1, 2, 3$ die Eigenwerte von A_i (in Abhängigkeit von t). Für welche Werte von t sind die Matrizen A_i (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 1. 2. 2019 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar.