Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. A. Thevis

14. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. (4P)

Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix.

a) Wie in der Vorlesung bezeichne $A^{\#} = (\beta_{i,j}) \in K^{n\times n}$ mit $\beta_{i,j} := (-1)^{i+j}\det(A_{j,i})$ die Adjunkte von A. Zeigen Sie, dass $AA^{\#} = \det(A)I_n$ gilt.

b) Sei nun $A = (s_1|\ldots|s_n)$ invertierbar und $b \in K^n$. Sei weiterhin $A_j := (s_1|\ldots|s_{j-1}|b|s_{j+1}|\ldots|s_n)$. Zeigen Sie, dass

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mit } x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist.

Aufgabe 2. (4P)

Auf dem Vektorraum $C([0,1],\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen vom Einheitsintervall nach $\mathbb{R}$ betrachten wir das Skalarprodukt

$$\beta(f,g) = \int_0^1 f(t)\cdot g(t)dt$$

a) Sei $P_n := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq n\} \subseteq C([0,1],\mathbb{R})$ für $n \in \mathbb{N}$ die Polynome von Grad kleiner oder gleich n. Bestimmen Sie die Gram-Matrix zu β bezüglich der Basis $(1, X, \ldots, X^n)$.

b) Geben Sie für P_2 eine orthonormale Basis bezüglich β an.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 08. 02. 2019 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar. Gruppenabgaben sind nicht erlaubt.

Aufgabe 3. (1P+2P+1P)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform $\beta : V \times V \to K$ und $U \leq V$ ein Untervektorraum. Wir definieren

$$U^\perp := \{w \in V \mid \forall u \in U : \beta(u, w) = 0\}$$

als den zu U orthogonalen Raum.

a) Zeigen Sie, dass $U^\perp$ ein Untervektorraum ist.

Sei ab nun $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, V endlich dimensional und β ein Skalarprodukt.

b) Zeigen Sie, dass $U^\perp$ ein Komplement von U ist, d.h. es gilt $V = U \oplus U^\perp$.
Es wird auch *orthogonales Komplement* von U genannt.

c) Zeigen Sie, dass $(U^\perp)^\perp = U$ gilt.

Aufgabe 4. (4P)

a) Auf $\mathbb{C}^2$ definieren wir die folgende Bilinearform

$$\beta_1(v, w) := v^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w$$

(i) Geben Sie jeweils an, ob β_1 symmetrisch, positiv definit und ein Skalarprodukt ist.

(ii) Bestimmen Sie $< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} >^\perp$ und $< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} >^\perp$.

b) Sei $\mathbb{R}_b^\mathbb{N}$ der Vektorraum der beschränkten Folgen, d.h. für jedes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_b^\mathbb{N}$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Auf $\mathbb{R}_b^\mathbb{N}$ definieren wir die Bilinearform

$$\beta_2((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i \cdot b_i}{i^2}$$

(i) Geben Sie jeweils an, ob β_2 auf $\mathbb{R}_b^\mathbb{N}$ symmetrisch, positiv definit und ein Skalarprodukt ist.

(ii) Sei $U := \mathbb{R}_f^\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}_b^\mathbb{N}$ der Untervektorraum der endlichen Folgen, d.h. für jedes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n = 0$ für alle $n \geq N$. Bestimmen Sie $U^\perp$ und $(U^\perp)^\perp$ bezüglich β_2.

Aufgabe 5. (4 Bonuspunkte)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $< \cdot\,,\, \cdot >$.

a) Zeigen Sie für $\phi \in \mathrm{End}(V)$ folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} &\forall v \in V : \|\phi(v)\| = \|v\| \\ \iff &\forall v, w \in V : \; < \phi(v), \phi(w) > = < v, w > \end{aligned}$$

b) Gilt die Aussage in a) auch, wenn V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist? Begründen Sie ihre Aussage.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 08. 02. 2019 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar. Gruppenabgaben sind nicht erlaubt.