Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. A. Thevis

2. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. (4P)

Geben Sie jeweils an, ob die Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

a) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \lceil \frac{n}{2} \rceil$ wobei $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl größer gleich x bedeutet (aufrunden).

b) $f_2 : \{\text{Andrea, Benedikt, Christian, Daniel}\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ mit
$f_2(\text{Andrea}) = 1$, $f_2(\text{Benedikt}) = 3$,
$f_2(\text{Christian}) = 4$, $f_2(\text{Daniel}) = 1$

c) $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto (-1)^n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x bedeutet (abrunden).

d) $f_4 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto (a + b)^2 + a$

Aufgabe 2. (4P)

Seien M und N nichtleere Mengen und $f : M \to M$ und $g : M \to N$ Abbildungen.
Geben Sie jeweils mit Begründung bzw. Gegenbeispiel an, ob die Relationen für alle Abbildungen f, g reflexiv, transitiv und symmetrisch sind:

a) Für $x, y \in M$ gilt $x \sim y :\iff g(x) = g(y)$.

b) Für $x, y \in M$ gilt $x \sim y :\iff \exists k \in \mathbb{N} : f^k(x) = y$ mit $f^k := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ mal}}$.

Aufgabe 3. (4P)

Seien M und N zwei nichtleere Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung.
Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Ist f injektiv, dann existiert eine surjektive Abbildung $g : N \to M$ mit $g \circ f = id_M$.

b) Ist f surjektiv, dann existiert eine injektive Abbildung $g : N \to M$ mit $f \circ g = id_N$.
Hinweis: Sie dürfen das Auswahlaxiom annehmen, d.h. für jede Menge A existiert eine Auswahlfunktion $h : \mathcal{P}(\mathcal{A}) \setminus \{\emptyset\} \to A$ mit $h(B) \in B$, sprich h wählt sich aus jeder nichtleeren Teilmenge ein Element aus.

c) Existieren Abbildungen $g, h : N \to M$ mit $g \circ f = id_M$ und $f \circ h = id_N$, dann ist f bijektiv und es gilt $g = h$.

d) f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Umkehrabbildung $f^{-1} : N \to M$ mit $f \circ f^1 = id_N$ und $f^{-1} \circ f = id_M$ gibt.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 02. 11. 2018 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar. Gruppenabgaben sind nicht erlaubt.

Aufgabe 4. (4P)

Sei M eine endliche Menge, d.h. M enthält nur endlich viele Elemente, und $f : M \to M$ eine Abbildung.
Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) f ist injektiv $\iff$ f ist surjektiv.

b) Es existieren $k, l \in \mathbb{N}$ mit $f^k(x) = f^{k+l}(x)$ für alle $x \in M$.

c) Ist f injektiv, dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $id_M = f^k$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 02. 11. 2018 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar. Gruppenabgaben sind nicht erlaubt.