Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. A. Thevis

3. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. (4P)

Seien A, B und C drei nichtleere Mengen, $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Abbildungen und $h := g \circ f : A \to C$ ihre Verknüpfung.
Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) f und g sind injektiv $\Rightarrow h$ ist injektiv.

b) f und g sind surjektiv $\Rightarrow h$ ist surjektiv.

c) h ist injektiv $\Rightarrow f$ ist injektiv.

d) h ist injektiv, dann ist g nicht notwendigerweise injektiv.

Aufgabe 2. (4P)

a) Sei $A := \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Betrachten Sie die Funktion $f : A \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ und die Äquivalenzrelation $\sim$ von Aufgabe 2 a) auf Übungsblatt 2, d.h. $x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$ für $x, y \in A$. Geben Sie die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation an.

b) Sei $B := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Bestimmen Sie die kleinste Äquivalenzrelation $R \subseteq B \times B$ auf der Menge B, die folgende Elemente enthält $(1, 2), (1, 3), (4, 5)$. Geben Sie die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation an.
("Kleinste Äquivalenzrelation"bedeutet, dass für jede andere Äquivalenzrelation R_0 mit der gewünschten Eigenschaft gilt, dass $R \subseteq R_0$ ist.)

c) Betrachten Sie die Menge $A := \mathbb{Z} \times (\mathbb{N}_{>0}) = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ y \in \mathbb{N} \ \wedge \ y > 0\}$. Für zwei Tupel $(x, y), (v, w) \in A$ gilt $(x, y) \sim (v, w)$ genau dann, wenn $x \cdot w = y \cdot v$. Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Finden Sie eine Bijektion zwischen den rationalen Zahlen und den Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation (und zeigen Sie, dass es sich um eine Bijektion handelt).

Aufgabe 3. (4P)

Sei A eine nichtleere Menge.

a) Sei $\sim$ eine reflexive Relation auf A, mit der folgenden Eigenschaft

$$\forall\, a, b, c \in A : \ a \sim b \ \wedge \ a \sim c \ \Rightarrow \ b \sim c.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 09. 11. 2018 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar. Gruppenabgaben sind nicht erlaubt.

b) Seien $\sim_1$ und $\sim_2$ Äquivalenzrelationen auf A. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf A durch

$$a \sim b \;:\Leftrightarrow\; a \sim_1 b \;\wedge\; a \sim_2 b$$

für $a, b \in A$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und dass für $a \in A$ die Gleichheit $[a] = [a]_1 \cap [a]_2$ gilt. Hierbei bezeichnet $[a]$ die Äquivalenzklasse von a bezüglich $\sim$, $[a]_1$ die Äquivalenzklasse von a bezüglich $\sim_1$ und $[a]_2$ die Äquivalenzklasse von a bezüglich $\sim_2$.

c) Sei $S \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$ eine Partition von A. Zeigen Sie, dass es eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf A gibt, für die S die Menge der Äquivalenzklassen ist. Das bedeutet, dass $S = \{[x]_\sim \mid x \in A\}$ gilt.

Bemerkung: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass jede Äquivalenzrelation auf der Menge A durch die Äquivalenzklassen eine Partition von A definiert. In dieser Teilaufgabe wird gezeigt, dass auch die Rückrichtung gilt.

Aufgabe 4. (4P)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für alle $v, w \in V$ gibt es genau ein $x \in V$ mit $v+x = w$ (die Gleichung $v+x = w$ ist eindeutig lösbar). Insbesondere ist der Nullvektor $\mathbf{0}$ das einzige neutrale Element der Vektoraddition.

b) $a \cdot \mathbf{0} = 0 \cdot v = \mathbf{0}$ für alle $a \in \mathbb{R}, v \in V$.

c) $a \cdot (-v) = (-a) \cdot v = -(a \cdot v)$ für alle $a \in \mathbb{R}, v \in V$.

d) $(-a) \cdot (-v) = a \cdot v$ für alle $a \in \mathbb{R}, v \in V$.

e) $a \cdot (v - w) = a \cdot v - a \cdot w$ für alle $a \in \mathbb{R}, v, w \in V$.

f) $(a - b) \cdot v = a \cdot v - b \cdot v$ für alle $a, b \in \mathbb{R}, v \in V$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 09. 11. 2018 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar. Gruppenabgaben sind nicht erlaubt.