Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. A. Thevis

5. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. (4P)

a) Schreiben Sie die folgende Matrix als Produkt von Vertauschungsmatrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Geben Sie den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ in Abhängigkeit vom Parameter α an. Bestimmen Sie außerdem die Lösungsmenge für das folgende lineare Gleichungssystem $Ax = b$ in Abhängigkeit von α. Geben Sie dabei eine spezielle Lösung und die Lösung des homogenen Gleichungssystems an.

c) Finden Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit der Eigenschaft, dass die Matrix

$$B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

in Treppenform ist.

Aufgabe 2. (4P)

Berechnen Sie die Lösung der linearen Gleichungssystems $Ax = b$ und $Ax = c$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie die Gleichungssysteme dazu als erweiterte Koeffizientenmatrix, d.h. $(A|b)$ bzw. $(A|c)$. Verwenden Sie Zeilen- und Spaltenumformungen, um die Gleichungssysteme zu lösen.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 23. 11. 2018 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar.

Aufgabe 3. (4P)

Sei $\mathbb{R}^{m\times n}$ die Menge der Matrizen mit m Zeilen, n Spalten und Einträgen in den reellen Zahlen. Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißen äquivalent, wenn es zwei invertierbare Matrizen $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, so dass $A = C \cdot B \cdot D$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $A \sim B$.

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert.

b) Zeigen Sie, dass es für $m = n = 2$ genau drei Äquivalenzklassen gibt, nämlich

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_\sim, \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_\sim, \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_\sim.$$

Hinweis:

- Sie dürfen Aufgabe 4 a) von Übungsblatt 4 benutzen. Diese Aufgabe liefert ein Kriterium, um zu entscheiden, wann eine 2×2 Matrix invertierbar ist.
- Man kann die in der Vorlesung eingeführte Treppenform zum Lösen der Aufgabe verwenden.

Bemerkung: Aufgabenteil b) zeigt, dass der Rang einer Matrix (für 2×2 Matrizen) deren Äquivalenzklasse eindeutig festlegt. Diese Aussage gilt allgemeiner für $m \times n$ Matrizen.

Aufgabe 4. (4P)

Betrachten Sie die Menge der oberen Dreiecksmatrizen

$$\mathcal{O} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und die Menge der unteren Dreiecksmatrizen

$$\mathcal{U} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Die Mengen $\mathcal{O}$ und $\mathcal{U}$ sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^{3\times 3}$. (Das muss nicht gezeigt werden.) Berechnen Sie die Vektorräume $\mathcal{O} \cap \mathcal{U}$ und $\mathcal{O} + \mathcal{U}$.

b) Zeigen Sie, dass eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \in \mathcal{O}$$

genau dann invertierbar ist, wenn die Einträge a, d, f ungleich 0 sind.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 23. 11. 2018 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar.