Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. A. Thevis

6. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. (4P)

Bestimmen Sie abhängig von den Parametern α und β die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2+2\alpha \\ 1 & 3+\alpha & 1+\alpha \\ 3 & 6 & 7+7\alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3+4\beta \\ 4+2\beta \\ 9+14\beta \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie das Gleichungssystem dazu als erweiterte Koeffizientenmatrix, d.h. $(A|b)$. Verwenden Sie Zeilen- und Spaltenumformungen, um das Gleichungssystem zu lösen.

Aufgabe 2. (4P)

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist folgende Matrix invertierbar:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie für entsprechende α die Inverse A^{-1} von A.

Aufgabe 3. (4P)

a) Sei M eine Menge und $\star$ die wie folgt definierte Verknüpfung auf $\mathcal{P}(M)$:

$$A \star B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad \text{für } A, B \subseteq M.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(M)$ zusammen mit $\star$ eine Gruppe bildet.

b) Geben Sie jeweils mit einer kurzen Begründung an, welche der folgenden Mengen mit der entsprechenden Verknüpfung Gruppen sind:

(i) $(\{0\}, +)$

(ii) $(\{0, 1\}, \cdot)$

(iii) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \hat{\ })$ mit $a\hat{\ }b = a^b$

(iv) $(\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, +)$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 30. 11. 2018 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar. Gruppenabgaben sind nicht erlaubt.

Aufgabe 4. (4P)

a) Sei $(G_1, \circ)$ eine Gruppe in der jedes Element Ordnung zwei hat, d.h. für alle $g \in G_1$ gilt $g \circ g = e_{G_1}$.
Zeigen Sie, dass G_1 abelsch ist.

b) Sei G_2 eine Menge mit assoziativer Verknüpfung $\star$ mit folgenden Eigenschaften:

- G_2 hat ein linksneutrales Element $e \in G_2$, d.h. für alle $g \in G_2$ gilt $e \star g = g$
- G_2 hat Linksinverse, d.h. für alle $g \in G_2$ existiert ein $\overline{g} \in G_2$ mit $\overline{g} \star g = e$

Zeigen Sie, dass $(G_2, \star)$ eine Gruppe ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 30. 11. 2018 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar. Gruppenabgaben sind nicht erlaubt.