Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. A. Thevis

# 7. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

**Aufgabe 1. (4P)**

a) Wir betrachten die symmetrische Gruppe $S_4$. Seien $a = (1, 2, 3, 4), b = (2, 3)$ und $c = (1, 2, 4)$. Berechnen Sie $a^{-1}bc$ und $c^{-1}b$.

b) Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe $S_n$ für $n > 2$ nicht abelsch ist.

c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen Untergruppen von $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ sind. Prüfen Sie die Mengen, die Untergruppen sind, auf Kommutativität.

(i) Die Menge der invertierbaren Diagonalmatrizen, d.h.

$$H_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

(ii) Die Menge der invertierbaren Matrizen mit Einsen auf der Diagonalen, d.h.

$$H_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b \neq 1 \right\}.$$

(iii) Die Menge der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen, d.h.

$$H_3 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \neq c \right\}.$$

**Aufgabe 2. (4P)**

a) Es sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe und $H$ eine Untergruppe von $G$. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf $G$ durch

$$g_1 \sim g_2 \quad :\Leftrightarrow \quad g_1 \circ g_2^{-1} \in H.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
**Hinweis:** Die Aussage entspricht Lemma 1.16 i) aus der Vorlesung. Es wird erwartet, dass Sie die Definition von Äquivalenzrelation für $\sim$ nachrechnen.

b) Nun sei $G = S_3$ die symmetrische Gruppe auf drei Punkten und es sei $H := \{(1), (1, 2)\} \subseteq G$. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $H$ eine Untergruppe von $G$ ist. Bestimmen Sie für dieses Beispiel die Äquivalenzklassen der in Aufgabenteil a) definierten Äquivalenzrelation.

---

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 7. 12. 2018 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar.

c) Es sei $G$ eine endliche Gruppe und $g \in G$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{ord}(g) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid g^n = e_G\}.$$

Folgern Sie, dass $g^{|G|} = e_G$. Hierbei bezeichnet $e_G$ das neutrale Element in $G$.
**Hinweis:** Sie dürfen Proposition 1.13 aus dem Skript verwenden.

**Aufgabe 3. (4P)**

a) Es sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe. Weiter seien $a, b, c \in G$. Zeigen Sie folgende Aussagen über die Ordnungen von Gruppenelementen in $G$.

(i) $\operatorname{ord}(a) = \operatorname{ord}(a^{-1})$,

(ii) $\operatorname{ord}(a \circ b) = \operatorname{ord}(b \circ a)$,

(iii) $\operatorname{ord}(a \circ b \circ c) = \operatorname{ord}(b \circ c \circ a)$,

(iv) Geben Sie drei Elemente $a, b, c$ der symmetrischen Gruppe $S_4$ an, für die gilt $\operatorname{ord}(abc) \neq \operatorname{ord}(bac)$. (Berechnen Sie die Ordnungen der Elemente $abc$ und $bac$ und geben Sie diese mit an.)

b) Es sei $G := \{g_1, \ldots, g_n\}$ eine abelsche Gruppe von Ordnung $n$ mit Verknüpfung $\circ$. Betrachten sie das Element $c := g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_n$ und zeigen Sie, dass $c^2 = 1_G$ gilt. Hierbei bezeichnet $1_G$ das neutrale Element in $G$.

**Aufgabe 4. (4P)**

a) Es seien $G, H$ Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

(i) Zeigen Sie, dass wenn $G$ zyklisch ist auch das Bild von $\varphi$ zyklisch ist.

(ii) Zeigen Sie, dass wenn $G$ abelsch ist auch das Bild von $\varphi$ abelsch ist.

b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind.

(i) Definiere $\varphi_1 : S_3 \to S_3,\ x \mapsto x^{-1}$.

(ii) Definiere $\varphi_2 : S_2 \to S_2,\ x \mapsto x^{-1}$.

(iii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Definiere $\varphi_3 : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +),\ x \mapsto x \mod n$.

(iv) Definiere $\varphi_4 : (\mathbb{Z}, +) \to (2 \cdot \mathbb{Z}, +),\ x \mapsto 2 \cdot (x - 1)$.

---

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 7. 12. 2018 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar.