Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. A. Thevis

8. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. (4P)

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Abbildungen Ringhomomorphismen sind. Bestimmen Sie Bild und Kern der Abbildungen, die Ringhomomorphismen sind.

a) $\varphi_1 : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +, \cdot),\ n \mapsto n^2$,

b) $\varphi_2 : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \cdot),\ n \mapsto [n^2]$. Hier bezeichnet $[n]$ die Äquivalenzklasse von n in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{Z}$.

c) Definiere die Abbildung $\varphi_3 : (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ durch $\varphi_3([n]_6) := [n]_3$ für $n \in \mathbb{Z}$. Hier bezeichnet $[n]_3$ die Äquivalenzklasse von n in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $[n]_6$ die Äquivalenzklasse von n in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{Z}$.

d) Definiere die Abbildung $\varphi_4 : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \cdot)$ durch $\varphi_4([n]_3) := [n]_6$ für $n \in \mathbb{Z}$. Wieder bezeichnet $[n]_3$ die Äquivalenzklasse von n in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $[n]_6$ die Äquivalenzklasse von n in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{Z}$.

e) $\varphi_5 : (\mathbb{Z}[x], +, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +, \cdot),\ f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^n a_i$, d.h. ein Polynom wird auf die Summe seiner Koeffizienten abgebildet.
Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass für Polynome $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ mit $n \geq m$ gilt

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{i} a_k \cdot b_{i-k} \right) x^i.$$

Hier ist $b_i := 0$ für $m < i \leq n$.

Aufgabe 2. (4P)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit folgender Eigenschaft: Für $a, b \in R$ gilt

$$a \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad (a = 0 \text{ oder } b = 0).$$

Solche Ringe nennt man **Integritätsbereich**.

a) Es seien $a, b, c \in R$ mit $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass $a \cdot b = a \cdot c$ die Gleichung $b = c$ impliziert.

b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Ringe Integritätsbereiche sind:

(i) Ein beliebiger Körper K.

(ii) Der Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für eine gerade natürliche Zahl $n > 2$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 14. 12. 2018 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar.

(iii) Der Polynomring $\mathbb{R}[x]$.
Hinweis: Sie dürfen die Formel aus Aufgabe 1 für die Multiplikation von Polynomen benutzen.

(iv) Die 2×2 - Matrizen $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Matrixmultiplikation und eintragsweiser Addition als Verknüpfungen.

c) Bestimmen Sie das Signum der folgenden Permutationen

$$\sigma := (1,2,4)(2,5,1)(3,4),$$
$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 4 & 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. (4P)

a) Es sei $R = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$. Wir definieren auf R eine Addition und eine Mutliplikation wie folgt,

$$+ : R \times R \to R \text{ durch } (q,z) + (q',z') = (q+q', z+z')$$
$$\cdot : R \times R \to R \text{ durch } \quad (q,z)\cdot(q',z') = (q\cdot q', z\cdot z').$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $(R,+,\cdot)$ ein Ring mit neutralen Elementen $0_R = (0,0)$ und $1_R = (1,1)$ ist. Beantworten Sie folgende Fragen (mit Begründung!).

(i) Ist R ein kommutativer Ring?

(ii) Ist R ein Integritätsbereich?

(iii) Welche Elemente in R sind invertierbar?

(iv) Ist R ein Körper?

b) In dieser Aufgabe dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass ein Körper $K = \{0,1,a,b\}$ mit vier Elementen existiert. Die Addition und Multiplikation in K sind durch die Körperaxiome eindeutig bestimmt. Füllen Sie die Additions- und Multiplikationstabellen in K aus. (Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.)

$+$	0	1	a	b
0				
1				
a				
b				

$\cdot$	0	1	a	b
0				
1				
a				
b				

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass in beiden Tabellen in jeder Zeile bzw. Spalte, in der nicht ausschließlich Nullen stehen, jedes Körperelement genau einmal vorkommt.

Aufgabe 4. (4P)

a) Zeigen Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist.

b) Es sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass die Charakteristik von K eine Primzahl ist.
Hinweis: Aufgabe 2 b) könnte hilfreich sein.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 14. 12. 2018 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar.