Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. A. Thevis

9. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. (4P)

Lösen Sie jeweils das folgende lineare Gleichungssystem über den Körpern $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$ und $\mathbb{F}_5$:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\; + 3x_3 + 2x_4 &= 5 \\ -x_1 + 7x_2 \quad\quad\; - 6x_4 &= 10 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 20 \\ -2x_1 + 7x_2 \quad\quad\; + 6x_4 &= 15 \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (3P+1P)

a) Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die folgende Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 \\ a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ zusammen mit der üblichen Vektorraumaddition ein Körper bildet. Man bezeichnet diesen Körper als den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen und schreibt auch $a + ib$ statt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

b) Sei $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ wie in Aufgabenteil a). Zeigen Sie, dass

$$\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2\times 2} \quad , \quad a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ein Ringhomomorphismus in den Ring der reellen 2×2 Matrizen ist.
Sehen Sie einen Teilring der reellen 2×2 Matrizen, der ein Körper ist?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 22. 12. 2018 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar. Gruppenabgaben sind nicht erlaubt.

Aufgabe 3. (4P)

a) Zeigen Sie für die reellen Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}$$

dass für alle $i \neq j$ die Vektoren v_i, v_j linear unabhänig sind, aber v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind.

b) Seien V ein Vektorraum, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ und $w_i = v_i + v_{i+1}$ für $i < n$.
Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

$$v_1, v_2, \ldots, v_n \text{ sind linear unabhängig} \iff w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, v_n \text{ sind linear unabhängig}$$

Aufgabe 4. (4P)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien weiterhin $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ beliebige Vektoren von V.

a) Zeigen Sie, sind $\phi(v_1), \phi(v_2), \ldots, \phi(v_n)$ linear unabhängig, dann sind auch $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

b) Sei weiterhin ϕ injektiv, dann sind $\phi(v_1), \phi(v_2), \ldots, \phi(v_n)$ genau dann linear unabhängig, wenn auch $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 22. 12. 2018 vor der Vorlesung in den Abgabekästen im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer gut lesbar auf Ihre Abgabe. Die richtigen Kästen sind an dem kleinen grünen Bild bei der Beschriftung erkennbar. Gruppenabgaben sind nicht erlaubt.