Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. A. Thevis

Winterübungsblatt zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1.

Seien X, Y nicht-leere Mengen.

a) Auf $\mathrm{Abb}(X,Y)$ definieren wir wie folgt Relationen R_1, R_2. Für $f, g \in \mathrm{Abb}(X,Y)$ gilt:

$$\begin{aligned} fR_1g &\iff \exists h \in \mathrm{Abb}(Y,Y) : h \circ f = g \text{ und } h \text{ ist bijektiv} \\ fR_2g &\iff \exists h \in \mathrm{Abb}(X,X) : f \circ h = g \end{aligned}$$

Geben Sie jeweils an ob R_1 bzw. R_2 eine Äquivalenzrelation definieren.

b) Zeigen Sie für die Relationen aus Teil b), dass alle surjektiven Abbildungen unter R_2 in Relation stehen.

Aufgabe 2.

a) Sei K ein Körper und $n, m \in \mathbb{N}$. Wir betrachten $\mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_m(K)$ mit komponentenweiser Multiplikation als Gruppe. Geben Sie jeweils mit Begründung an, ob folgende Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind:

(i) $\phi_1 : \mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K)\ ,\ (A, B) \mapsto A \cdot B$

(ii) $\phi_2 : \mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_m(K) \to \mathrm{GL}_m(K)\ ,\ (A, B) \mapsto \det(A) \cdot B$

b) Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$G := \{A \in K^{n \times n} \mid \det(A) \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$$

mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

c) Zeigen Sie für ungerades $n \in \mathbb{N}$ und $K = \mathbb{R}$, dass $p : \mathrm{GL}_n(K) \to G\ ,\ A \mapsto \frac{1}{\sqrt[n]{\det(A)}} \cdot A$ ein Gruppenhomomorphismus ist und bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(p)$.

Aufgabe 3.

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in S_n$. Zeigen Sie, dass wenn σ ungerade Ordnung hat, dann gilt $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$.

b) Wir betrachten den Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Berechnen Sie für $n \in \{8, 9\}$ die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Entscheiden Sie, ob die multiplikative Gruppe in diesen Fällen zyklisch ist.

Aufgabe 4.

a) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit des Parameters $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrrrrl}
x_1 & & +(2t-2)x_3 & +5x_4 & & = 3 \\
-x_1 + & tx_2 & & -\ x_4 & +3x_5 & = 4 \\
x_1 & & +\ (t-1)x_3 & +3x_4 & +\ x_5 & = 5 \\
 & 4tx_2 + & (t-1)x_3 & +2x_4 & +\ x_5 & = 6
\end{array}$$

b) Seien $A, B \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

$$A \cdot B \text{ ist invertierbar } \iff A \text{ und } B \text{ sind invertierbar.}$$

Aufgabe 5.

a) Geben Sie jeweils an, ob die folgende Matrix über $\mathbb{R}$, F_3 und F_5 invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls ihr Inverses:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit Einträgen in $\mathbb{Z}$, d.h. $\alpha_{i,j} \in \mathbb{Z}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, ist $\det(A) = 1$, dann sind auch die Einträge von $A^{-1} = (\beta_{i,j})_{i,j}$ in $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 6.

Sei $\mathbb{R}[X]$ der Vektorraum der reellwertigen Polynome und für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$P_n := \{f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq n\}$$

der Untervektorraum der Polynome von Grad kleiner oder gleich n. Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die Abbildung

$$\phi_a : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \ , \ f(X) \mapsto g(X) := \int_a^X f(t)dt$$

a) Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Einschränkung $\phi_a|_{P_n} : P_n \to P_{n+1}$ ein Vektorraumhomomorphismus ist.

b) Bestimmen Sie für die Basen $B := (1, X, X^2) \subseteq P_2$ und $C := (1, X, X^2, X^3) \subseteq P_3$ die Abbildungsmatrix $D_{CB}(\phi_a|_{P_2})$.

c) Geben Sie jeweils an, ob ϕ_a injektiv oder surjektiv ist.

Aufgabe 7.

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 8.

a) Seien U, W_1, W_2 Untervektorräume des endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes V, sodass U ein echter Untervektorraum von W_1 und W_2 ist, d.h. $U \subsetneq W_1$ und $U \subsetneq W_2$. Es seien

$$S : W_1 \to U \quad \text{und} \quad T : U \to W_2$$

lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $T \circ S$ weder injektiv noch surjektiv ist.

b) Sei V ein Vektorraum und $U \subseteq W \subseteq V$ zwei Untervektorräume. Zeigen Sie:

$$(V/U)/(W/U) \cong V/W.$$

Aufgabe 9.

a) Sei $V = \mathbb{R}^5$ mit den Untervektorräumen

$$U :=< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > \quad , \quad W :=< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} > .$$

Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis von $U \cap W$ und $U + W$

b) Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $U, W \subseteq V$ zwei Untervektorräume. Zeigen Sie, dass U und W genau dann isomorph sind, wenn $U/(U \cap W)$ und $W/(U \cap W)$ isomorph sind.

Aufgabe 10.

Sei K ein Körper, V ein Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\phi^k = \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{k-\text{mal}}$ ist die Nullabbildung.

a) Zeigen Sie, dass ϕ genau dann diagonalisierbar, wenn ϕ bereits die Nullabbildung ist.

b) Sei nun zusätzlich $\dim(V) = n$. Zeigen Sie, dass ϕ^n die Nullabbildung ist.

Aufgabe 11.

Sei K ein Körper und die Matrix $A \in K^{5\times 5}$ gegeben durch:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Determinante von A für $K = \mathbb{R}$.
Was ist ihr Rang unter den Körpern $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{Q}\}$?

Aufgabe 12.

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Für eine Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$ ist die Spur von A definiert als

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=0}^{n} a_{i,i}$$

a) Zeigen Sie, dass die Spur $\mathrm{tr} : K^{n\times n} \to K$ eine lineare Abbildung ist.

b) Wir definieren die Abbildung

$$\beta : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K \ , \ (A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^t \cdot B)$$

Zeigen Sie, dass β eine Bilinearform ist. Geben Sie für $K = \mathbb{R}$ jeweils an, ob β symmetrisch, positiv definit und ein Skalarprodukt ist.

c) Geben Sie für $K = \mathbb{R}$ und $n = 2$ die Gram-Matrix $G_B(\beta)$ bezüglich einer Basis B Ihrer Wahl an.